ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν βιβλίο αποτελεί ένα ακόμα βήμα της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας στη συνεχή προσπάθειά της για την αναβάθμιση της μαθηματικής παιδείας στη χώρα μας, για την υποστήριξη του έργου των μαθηματικών αλλά και για την υποβοήθηση της μελέτης μαθητών και σπουδαστών.

Ο κύριος στόχος του βιβλίου είναι η όσο το δυνατόν πληρέστερη παρουσίαση των Μαθηματικών Ολυμπιάδων, ενός θεσμού στον οποίο η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία έχει μακρά και συνεχή παράδοση.

Το βιβλίο είναι το πρώτο μιας σειράς μαθηματικών βιβλίων που η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία μέσω της Επιτροπής Διαγωνισμών έχει αποφασίσει να προσφέρει στους Έλληνες μαθητές. Θα ακολουθήσει η έκδοση βιβλίου με όλα τα θέματα των Βαλκανικών Μαθηματικών Ολυμπιάδων Μεγάλων και Νέων, η έκδοση των θεμάτων των Διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, καθώς και η έκδοση βιβλίων σε όλες τις θεματικές ενότητες των Διεθνών Μαθηματικών Ολυμπιάδων.

Το Διοικητικό Συμβούλιο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (Ε.Μ.Ε.) θεωρεί υποχρέωσή του να εκφράσει τις θερμές ευχαριστίες του

α) Προς τον πρόεδρο της Επιτροπής Διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας και τα μέλη της που αποτελούν τη συγγραφική ομάδα:

Ανάργυρο Φελλούρη, Επίκουρο Καθηγητή του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου,

Παναγιώτη Βλάμο, Διδάκτορα Μαθηματικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου,

Αντώνη Δούναβη, Μαθηματικό

Σωτήρη Λουρίδα, Μαθηματικό

Ευστράτιο Ράππο, Μαθηματικό

οι οποίοι κατέβαλαν επίπονη και μακροχρόνια προσπάθεια για τη συγγραφή και την επιμελημένη παρουσίαση του βιβλίου.

β) Προς το συνεργάτη της Ε.Μ.Ε. Στέλιο Μαραγκάκη για την επιμέλεια της έκδοσης και την κ. Ανδρονίκη Μαστοράκη για την επιμελημένη δακτυλογράφηση του βιβλίου.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2001

Το Διοικητικό Συμβούλιο της Ε.Μ.Ε.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ

Οι Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες (Δ.Μ.Ο.) είναι πλέον ένας θεσμός υψηλοτάτου ενδιαφέροντος, αφού από την πρώτη Δ.Μ.Ο. που έγινε στη Ρουμανία το 1959 με συμμετοχή 7 χωρών και 58 μαθητών έχουμε φθάσει στην 41η Δ.Μ.Ο. που έγινε τον Ιούλιο του 2000 στη Ν. Κορέα με συμμετοχή 82 χωρών και 466 μαθητών.

Η εξαιρετική και συνεχής ανάπτυξη των Δ.Μ.Ο. έχει πολλές εξηγήσεις. Πολλοί λένε ότι τα Μαθηματικά είναι μια σημαντική και δυναμική επιστήμη που ασκεί με την πάροδο του χρόνου ολοένα και μεγαλύτερη επιρροή στην πορεία άλλων επιστημών και έχει μεγάλη συνεισφορά στην εμφάνιση νέων τεχνολογιών, μιας καλύτερης ποιότητας ζωής και πιθανώς μιας νέας κοινωνίας. Πιστεύουμε ότι οι προηγούμενες εξηγήσεις δεν είναι αρκετές για να καταλάβει κανείς γιατί τόσοι πολλοί νεαροί μαθητές σε όλα τα μήκη και πλάτη της γής αφοσιώνονται στη λύση δύσκολων μαθηματικών προβλημάτων, εργαζόμενοι σκληρά μέρες, μήνες, ακόμα και χρόνια με σκοπό τη συμμετοχή τους σε μια Δ.Μ.Ο. Η κατάλληλη εξήγηση μπορεί να βρεθεί στη φύση των Μαθηματικών και στη γοητεία που ασκούν σε όλους αυτούς τους νεαρούς μαθητές.

Έχοντες συναίσθηση του καθήκοντος απέναντι σε όλους αυτούς τους νεαρούς μαθητές σε όλα τα μέρη της Ελλάδος, αφιερώνουμε πρώτα σε αυτούς το παρόν βιβλίο.

Έναυσμα για την προσπάθεια αυτή αποτέλεσε και ο συνάδελφος μαθηματικός που θέλει να προωθήσει την ιδέα των διεθνών διαγωνισμών αλλά και εκείνων της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Πιστεύουμε ότι του προσφέρουμε ένα σημαντικό βοήθημα στην προσπάθειά του αυτή.

Όμως δεν θα μπορούσαμε να ξεχάσουμε τις ιερές σκιές των Αρχαίων Ελλήνων Μαθηματικών, που είναι από τους πρώτους που έδωσαν τα φώτα τους σε ολόκληρο τον κόσμο σε μαθηματικά προβλήματα Γεωμετρίας και Θεωρίας Αριθμών, βασικά συστατικά των προβλημάτων τα οποία εξετάζονται στις Δ.Μ.Ο. Αξίζει για αυτό να αναφέρουμε τη γνώμη του μεγάλου Ρουμάνου γεωμέτρη και ποιητή Dan Barbilian (από την εισήγηση του αρχηγού της Ρουμανικής ομάδας M. Becheanu στην 40η Δ.Μ.Ο. του Βουκουρεστίου το 1999):

«Η πόρτα για να εισέλθει κανείς στον αρχαίο Ελληνικό κόσμο δεν είναι κατ' ανάγκην ο Όμηρος. Η Ελληνική Γεωμετρία είναι μία πόρτα ανοικτή διάπλατα,

που προσφέρει στα μάτια ένα λιτό αλλά ουσιώδες τοπίο. Ο Πλάτων μας έδωσε τη δυνατότητα να καταλάβουμε την ασυμμετρία του λόγου της διαγωνίου προς την πλευρά του τετραγώνου και ο Πλάτων επίσης μας βοήθησε να απαριθμήσουμε τα πέντε κανονικά πολύεδρα».

Η προσπάθειά μας αυτή, στο πλαίσιο των εκδόσεων της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας πιστεύουμε ότι θα έχει συνέχεια με τη συγγραφή και άλλων βιβλίων για διαγωνισμούς. Σκοπός τους θα είναι η δημιουργία της κατάλληλης υποδομής για την προετοιμασία των μαθητών για τους διαγωνισμούς της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, τις Βαλκανικές Μαθηματικές Ολυμπιάδες, και τις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2001

Οι συγγραφείς

Α. Φελλούρης
Π. Βλάμος
Α. Δούναβης
Σ. Λουρίδας
Ε. Ράππος

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Ευκλείδης Β΄, τεύχη 28, 29 (1998), 34 (1999), 35 (2000), 37 (2000).

[2] Edward Barbeau. Polynomials. Springer – Verlag , 1989

[3] Edward Barbeau, William Moser, and Murray Klamin. 500 Mathematical Challenges . MAA, 1995.

[4] Y. Boltiansky and I. Gohberg. Results and Problems in Combinatorial Geometry. Cambridge University Press, 1985.

[5] Judita Cofman. What to Solve? Oxford University Press, 1990.

[6] Judita Cofman. Numbers and Shapes Revisited. Oxford University Press,1995.

[7] H. Coxeter and S. Greitzer . Geometry Revisited. MAA, 1967.

[8] Heinrich Doerrie. 100 Great Problems of Elemantary Mathematics. Dover, 1965.

[9] A. ENGEL, Problem Solving Strategies, Springer (1998).

[10] D. Fomin and A. Kirichenko. Leningrad mathematical Olympiads 1987-1991/ MathPro Press,1994.

[11] A. Gardiner. The Mathematical Olympiad Handbook. Oxford University Press,1997. *.

[12] Solomon Golomb. Polyominoes. Princeton, 1996. *.

[13] SAMUEL L. GREITZER, International Mathematical Olympiads 1959 – 1977, The Mathematical Association of America, N.M.L. 27 (1978).

[14] Derek Holton. Problem solving series . 15 booklets. *.

[15] Ross Honsberger. Mathematical Gems. MAA, 1973.

[16] Ross Honsberger. Mathematical Gems II. MAA,1976.

[17] Ross Honsberger Mathematical Gems III. MAA 1985.

[18] Ross Honsberger. Mathematical Morsels. MAA, 1978.

[19] Ross Honsberger. More Mathematical Morsels. MAA, 1985.

[20] Ross Honsberger. Mathematical Plums. MAA, 1979.

[21] Ross Honsberger. From Erdoes to Kiev. MAA, 1995.

[22] Ross Honsberger. Episodes in 19th and 20th Century Euclidean Geometry.MAA,1995.

[23] HORNSCHUH H. – D. (Ed.), International Mathematik Olympiade Vol. 1 (1959 – 1968), Vol 2 (1969 – 1978), Vol. 3 (1979 – 1988).

[24] M. KLAMKIN, International Mathematical Olympiads 1978 – 1985, The Mathematical Association of America, N.M.L. 31 (1986).

[25] Murray Klamkin. USA Mathematical Olympiads 1972-1986.MAA, 1988.*.

[26] M. Kuzcma.144 Problems of the Austria – Polish Olympiad. ?., 1994 *.

[27] Loren Larson. Problem – solving through Problems. Springer,1983.

[28] Z. Melzak. Invitation to Geometry. Wiley, 1983

[29] I. Niven. Mathematics of Choice: How to Count Without Counting. MAA, 1965

[30] Hans Rademacher and Otto Toeplitz. The Enjoyment of Mathematics. Princeton, 1966

[31] A. Yaglom and I. Yaglom. Challenging Mathematical Problems with Elemantary Solutions, volume Vol. 2. Dover, 1987

[32] A/ Yaglom and I. Yaglom. Challenging Mathematical Problems with Elemantary Solutions, volume Vol.1: Combinatorics. Dover 1987.

[33] A. Yaglomand I. Yaglom. The USSR Olympiad Problem Book. Dover,1993.

[34] L. Zimmerman and G. Kessler. ARML – NYSML Contests 1983 – 1988. MathPro Press,1989

[35] L. Zimmerman and G. Kessler. ARML – NYSML Contests 1989 – 1994 . MathPro Press,1995

[36] Crux Mathematoricum. Canadian Mathematical Society.

[37] The Mathematical Gazette. Mathematical Association

ΟΙ ΔΙΕΘΝΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

α. Ιστορική αναδρομή

Η πρώτη Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα (ΔΜΟ) έγινε το 1959, δηλαδή πριν 41 χρόνια, στο Βουκουρέστι της Ρουμανίας. Την πρωτοβουλία για τη διοργάνωση είχε η Ρουμανική Εταιρεία Μαθηματικών και Φυσικής, η οποία είχε μακρά παράδοση διοργανώσεων διαγωνισμών στα Μαθηματικά και τη Φυσική.

Τα πρώτα χρόνια συμμετείχαν μόνο οι Ευρωπαϊκές Σοσιαλιστικές χώρες, όπως η Ρουμανία, Ουγγαρία, Τσεχοσλοβακία, Βουλγαρία, Πολωνία, Σοβιετική Ένωση και η τέως Ανατολική Γερμανία. Η πρώτη μη Ευρωπαϊκή χώρα που έλαβε μέρος ήταν η Μογγολία το 1964. Η πρώτη Ευρωπαϊκή μη Σοσιαλιστική χώρα που έλαβε μέρος ήταν η Φιλανδία το 1965. Οι Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής έλαβαν μέρος για πρώτη φορά το 1974 στο Βερολίνο της τέως Ανατολικής Γερμανίας, ενώ η Ελλάδα έλαβε μέρος για πρώτη φορά το 1975 στη Σόφια της Βουλγαρίας. Η μοναδική χρονιά που δεν έγινε η ΔΜΟ ήταν το 1980.

β. Κανονισμοί

Σύμφωνα με τους κανονισμούς οι σκοποί των Διεθνών Μαθηματικών Ολυμπιάδων είναι οι εξής:

- Να ανακαλύψουν και να ενθαρρύνουν τους προικισμένους στα Μαθηματικά νέους ανθρώπους, καθώς και να διεγείρουν την ευγενή άμιλλα μεταξύ αυτών, σε όλες τις χώρες.
- Να συνάψουν φιλικές σχέσεις μεταξύ Μαθηματικών από όλες τις χώρες.
- Να δημιουργήσουν δυνατότητες για την ανταλλαγή πληροφοριών για τα Σχολικά προγράμματα όλων των χωρών.

Η συμμετοχή σε μία ΔΜΟ γίνεται με πρόσκληση από τη διοργανώτρια χώρα. Κάθε προσκαλούμενη χώρα έχει το δικαίωμα να στείλει μία ομάδα που θα αποτελείται από έναν αρχηγό, έναν υπαρχηγό και από 6 το πολύ μαθητές, οι οποίοι δεν πρέπει να έχουν αρχίσει σπουδές σε κάποιο Πανεπιστήμιο ή σε οποιοδήποτε άλλο ισοδύναμο Μεταλυκειακό Ίδρυμα. Επιπλέον οι διαγωνιζόμενοι δεν πρέπει να έχουν συμπληρώσει τα 20 χρόνια τους κατά τη δεύτερη ημέρα του διαγωνισμού.

Ο διαγωνισμός γίνεται σε δύο διαδοχικές ημέρες. Κάθε ημέρα δίνονται στους διαγωνιζόμενους προς επίλυση 3 προβλήματα διαφορετικής δυσκολί-

ας με διάρκεια εξέτασης 4 ώρες και 30 λεπτά. Κάθε πρόβλημα έχει ως μέγιστη βαθμολογία τις 7 μονάδες.

Τα εξεταζόμενα προβλήματα επιλέγονται από το Συμβούλιο των Αρχηγών (Jury) σε διαδοχικές συνεδριάσεις που προηγούνται του διαγωνισμού, μέσα από ένα σύνολο 25 περίπου προβλημάτων που έχουν ήδη επιλεγεί από την Επιτροπή Επιλογής Προβλημάτων (Problem Selection Committee) της διοργανώτριας χώρας. Η επιλογή της παραπάνω λίστας προβλημάτων γίνεται από τα προβλήματα που αποστέλλουν οι συμμετέχουσες χώρες στην Επιτροπή Επιλογής Προβλημάτων. Κάθε συμμετέχουσα χώρα, πλην της διοργανώτριας μπορεί να στείλει μέχρι 6 προβλήματα.

Η τελική βαθμολογία κάθε διαγωνιζόμενου αποφασίζεται από τους βαθμολογητές της διοργανώτριας χώρας (Coordinators), με τη βοήθεια των αρχηγών και υπαρχηγών των ομάδων οι οποίοι μεταφράζουν τις λύσεις των μαθητών, όταν αυτό είναι αναγκαίο.

Οι αριθμοί των πρώτων, δεύτερων και τρίτων βραβείων που απονέμονται είναι κατά προσέγγιση σε αναλογία 1:2:3. Ο συνολικός αριθμός των παραπάνω βραβείων δεν πρέπει να ξεπερνάει το μισό του αριθμού των διαγωνιζομένων. Για τους διαγωνιζόμενους που δεν πήραν κάποιο από τα παραπάνω βραβεία, αλλά σε κάποιο πρόβλημα βαθμολογήθηκαν με το μέγιστο των 7 βαθμών, υπάρχει η απονομή πιστοποιητικού εύφημης μνείας (honorable mention).

γ. *Στατιστικά στοιχεία*

Στη συνέχεια δίνουμε ένα πίνακα με πλήρη στοιχεία που καλύπτει όλες τις ΔΜΟ από το 1959 μέχρι και το 2000.

Στον πίνακα αυτό για κάθε κράτος που έχει λάβει μέρος σε μία τουλάχιστον ΔΜΟ φαίνονται:

- Το όνομά του και ο κωδικός του, (ΚΡΑΤΟΣ – ΚΩΔ.).
- Το πρώτο έτος συμμετοχής του σε μία ΔΜΟ, (ΕΤΟΣ).
- Ο αριθμός των συμμετοχών του σε ΔΜΟ, (ΣΥΜ.).
- Πόσες φορές διοργάνωσε το κράτος αυτό μία ΔΜΟ, (ΔΙ).
- Ο αριθμός των προβλημάτων που προτάθηκαν από αυτό και επελέγησαν για το διαγωνισμό από το Συμβούλιο αρχηγών, (ΕΠ).
- Ο αριθμός των μαθητών που συμμετείχαν από το κράτος αυτό συνολικά από το 1959 μέχρι και το 2000, (ΑΣ).
- Ο αριθμός των βραβείων που συνολικά έχει λάβει το κράτος αυτό,

  Χ: Χρυσό μετάλλιο, Α: Αργυρό μετάλλιο, Χα: Χάλκινο μετάλλιο, Δ: Ειδικό δίπλωμα για εξαιρετικές λύσεις.

ΚΡΑΤΟΣ	ΚΩΔ	ΕΤΟΣ	ΣΥΜ.	ΔΙ	ΕΠ	ΑΣ	Χ	Α	Χα	Δ
ΑΖΕΡΜΠΑΙΖΑΝ	ASB	1993	7	0	0	37	0	0	0	0
ΑΛΒΑΝΙΑ	ALB	1993	5	0	0	23	0	0	0	0
ΑΛΓΕΡΙΑ	DZ	1997	12	0	0	56	0	1	2	0
ΑΡΓΕΝΤΙΝΗ	ARG	1988	12	1	0	69	1	9	25	0
ΑΡΜΕΝΙΑ	ARM	1993	8	0	1,5	49	1	7	17	0
ΑΥΣΤΡΑΛΙΑ	AUS	1981	20	1	3,5	126	8	29	45	0
ΑΥΣΤΡΙΑ	AUT	1970	30	1	0	200	12	26	70	0
ΒΕΛΓΙΟ	BEL	1969	22	0	2	137	1	5	34	0
ΒΕΝΕΖΟΥΕΛΑ	VEN	1981	7	0	0	25	0	0	0	0
ΒΙΕΤΝΑΜ	VIE	1974	24	0	4	148	25	60	45	1
ΒΟΛΙΒΙΑ	BOL	1997	1	0	0	3	0	0	0	0
ΒΟΣΝΙΑ-ΕΡΖΕΓΟΒΙΝΗ	BIH	1993	8	0	0	40	0	1	13	0
ΒΡΑΖΙΛΙΑ	BRA	1979	21	0	0	123	6	3	31	0
ΒΟΥΛΓΑΡΙΑ	BUL	1959	41	2	14	288	29	69	81	2
ΓΑΛΛΙΑ	FRA	1967	31	1	4	205	20	36	59	0
ΓΙΟΥΓΚΟΣΛΑΒΙΑ	YUG	1963	35	2	4	244	6	44	88	1
ΓΕΡΜΑΝΙΑ (ΑΝΑ-ΤΟΛΙΚΗ)	DDR	1959	29	2	9	206	26	62	60	7
ΓΕΡΜΑΝΙΑ	FDR	1977	23	1	11	144	35	55	41	1
ΓΕΩΡΓΙΑ	GEO	1993	8	0	0	48	1	5	14	0
ΓΟΥΑΤΕΜΑΛΑ	GUA	1997	3	0	0	18	0	0	0	0
ΔΑΝΙΑ	DEN	1991	10	0	0	55	0	1	12	0
ΕΛΒΕΤΙΑ	SWI	1991	10	0	0	41	0	5	11	0
ΕΛΛΑΔΑ	HEL	1975	22	0	1	138	0	10	27	0
ΕΣΘΟΝΙΑ	EST	1993	8	0	1	45	0	1	7	0
ΗΝ. ΠΟΛΙΤΕΙΕΣ (Η.Π.Α.)	USA	1974	26	1	8	168	51	79	28	3
ΗΝ. ΒΑΣΙΛΕΙΟ (Μ. ΒΡΕΤΑΝΙΑ)	UNK	1967	33	1	23	224	30	65	87	9
ΙΑΠΩΝΙΑ	JPN	1990	11	0	1	66	9	26	20	0
ΙΝΔΙΑ	IND	1989	12	1	3	72	5	32	28	0
ΙΝΔΟΝΗΣΙΑ	INA	1988	13	0	0	74	0	0	3	0
ΙΡΑΝ	IRI	1985	16	0	3	85	22	34	17	0
ΙΡΛΑΝΔΙΑ	IRL	1988	13	0	1	78	0	0	4	0
ΙΣΗΜΕΡΙΝΟΣ	ECU	1988	2	0	0	7	0	0	0	0
ΙΣΛΑΝΔΙΑ	ICE	1985	16	0	1	72	0	1	5	0
ΙΣΠΑΝΙΑ	ESP	1983	18	0	0	106	0	2	13	0
ΙΣΡΑΗΛ	ISR	1979	19	0	2	116	7	18	53	0
ΙΤΑΛΙΑ	ITA	1967	21	0	2	120	2	6	36	0
ΚΑΖΑΚΣΤΑΝ	KAZ	1993	7	0	0	42	0	2	14	0
ΚΑΝΑΔΑΣ	CAN	1981	20	1	1	120	10	24	46	0
ΚΕΫΛΑΝΗ	SRL	1995	5	0	0	12	0	0	1	0
ΚΙΝΑ	CHN	1985	16	1	3	86	58	21	5	0
ΚΙΡΓΙΣΤΑΝ	KRG	1993	8	0	0	38	0	0	1	0
ΚΟΛΟΜΒΙΑ	COL	1981	20	0	0	126	1	7	32	0

ΚΡΑΤΟΣ	ΚΩΔ	ΕΤΟΣ	ΣΥΜ.	ΔΙ	ΕΠ	ΑΣ	Χ	Α	Χα	Δ
ΚΟΡΕΑ Β.	PRK	1990	3	0	0	18	0	4	5	0
ΚΟΡΕΑ Ν.	ROK	1988	13	1	0	78	14	26	23	0
ΚΟΥΒΑ	CUB	1971	28	1	1	134	0	4	24	0
ΚΟΥΒΕΪΤ	KUW	1982	17	0	0	78	0	0	1	0
ΚΡΟΑΤΙΑ	CRO	1993	8	0	0	48	0	2	22	0
ΚΥΠΡΟΣ	CYP	1984	17	0	0	86	0	1	5	0
ΛΕΤΟΝΙΑ	LAT	1993	8	0	0	48	1	6	18	0
ΛΕΥΚΟΡΩΣΣΙΑ	BLR	1993	8	0	4	46	6	12	20	0
ΛΙΘΟΥΑΝΙΑ	LIT	1993	8	0	1	48	0	2	8	0
ΛΟΥΞΕΜΒΟΥΡΓΟ	LUX	1979	15	0	2	32	2	4	11	0
ΜΑΚΑΟΥ	MAC	1990	11	0	0	65	0	1	1	0
Π.Γ.Δ. ΜΑΚΕΔΟ-ΝΙΑΣ	MCD	1993	8	0	1	44	0	2	20	0
ΜΑΛΑΙΣΙΑ	MAL	1995	6	0	0	27	0	0	2	0
ΜΑΡΟΚΟ	MOR	1983	18	0	0	107	0	3	22	0
ΜΕΞΙΚΟ	MEX	1981	15	0	0	88	1	2	11	0
ΜΟΓΓΟΛΙΑ	MON	1964	30	0	2	206	1	9	23	2
ΜΟΛΔΑΒΙΑ	MOL	1993	8	0	0	40	0	4	11	0
ΜΠΑΧΡΕΪΝ	BRN	1990	3	0	0	18	0	0	0	0
ΜΠΡΟΥΝΕΪ	BRU	2000	1	0	0	2	0	0	0	0
ΝΕΑ ΖΗΛΑΝΔΙΑ	NZL	1988	13	0	2	78	0	2	22	0
ΝΙΚΑΡΑΓΟΥΑ	NIC	1987	1	0	0	6	0	0	0	0
ΝΟΡΒΗΓΙΑ	NOR	1984	17	0	0	88	0	7	21	1
ΝΟΤΙΑ ΑΦΡΙΚΗ	SAF	1992	9	0	0	54	1	2	16	0
ΟΛΛΑΝΔΙΑ	NET	1969	30	0	21	202	2	19	40	1
ΟΥΓΓΑΡΙΑ	HUN	1959	40	3	15	276	66	113	89	20
ΟΥΖΜΠΕΚΙΣΤΑΝ	UZB	1997	3	0	0	15	0	0	2	0
ΟΥΚΡΑΝΙΑ	UKP	1993	8	0	1	48	11	14	14	0
ΟΥΡΟΥΓΟΥΑΗ	URU	1987	5	0	0	23	0	0	0	0
ΠΑΝΑΜΑΣ	PAN	1987	1	0	0	6	0	0	0	0
ΠΑΡΑΓΟΥΑΗ	PAR	1997	2	0	0	11	0	0	0	0
ΠΕΡΟΥ	PER	1987	7	0	0	33	0	2	3	0
ΠΟΛΩΝΙΑ	POL	1959	40	3	19	274	14	43	71	3
ΠΟΡΤΟΓΑΛΙΑ	POR	1989	12	0	0	71	0	0	2	0
ΠΟΥΕΡΤΟ ΡΙΚΟ	PUR	1997	2	0	0	12	0	0	0	0
ΡΟΥΜΑΝΙΑ	ROM	1959	41	4	14	284	53	86	77	5
ΡΩΣΙΑ	RUS	1992	9	1	7	54	29	18	7	0
ΣΙΓΚΑΠΟΥΡΗ	SIN	1988	13	0	0	78	1	11	33	0
ΣΛΟΒΑΚΙΑ	SVK	1993	8	0	0	48	2	14	21	0
ΣΛΟΒΕΝΙΑ	SLO	1993	8	0	0	45	0	1	10	0
ΣΟΒΙΕΤΙΚΗ ΕΝΩ-ΣΗ	SU	1959	31	3	20	210	79	70	45	5
ΣΟΥΗΔΙΑ	SWE	1967	33	1	7	223	5	22	50	1
ΤΑΪΒΑΝ	CHT	1992	8	1	1	54	8	30	12	0
ΤΑΫΛΑΝΔΗ	THA	1989	12	0	0	72	0	5	20	0
ΤΟΥΡΚΙΑ	TUR	1978	17	1	1	104	1	13	43	0

ΚΡΑΤΟΣ	ΚΩΔ	ΕΤΟΣ	ΣΥΜ.	ΔΙ	ΕΠ	ΑΣ	Χ	Α	Χα	Δ
ΤΟΥΡΚΜΕΝΙΣΤΑΝ	TRK	1993	3	0	0	8	0	0	0	0
ΤΡΙΝΙΝΤΑΝΤ & ΤΑΜΠΑΚΟ	TTB	1991	10	0	0	58	0	0	1	0
ΤΣΕΧΙΑ	CZE	1993	8	0	2	48	2	13	20	0
ΤΣΕΧΟΣΛΟΒΑΚΙΑ	CS	1959	33	3	16	273	10	50	73	3
ΤΥΝΗΣΙΑ	TUN	1981	12	0	0	54	1	2	10	0
ΦΙΛΑΝΔΙΑ	FIN	1965	27	1	6	176	1	4	34	1
ΦΙΛΙΠΠΙΝΕΣ	PHI	1988	13	0	1	63	0	1	6	0
ΧΙΛΗ	RCH	1994	4	0	0	12	0	1	0	0
ΧΟΝΓΚ-ΚΟΝΓΚ	HKG	1988	13	1	0	78	0	10	40	0

δ. Οι καλύτεροι των αρίστων

Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνονται όλοι οι μαθητές που έχουν κερδίσει σε όλες τις συμμετοχές τους στις ΔΜΟ τουλάχιστον τρία χρυσά μετάλλια.

Όνομα	**Χώρα**	**Έτη**	**Μετάλλια**
Burmeister Wolfgang	Α. Γερμανία	1967-1971	ΧΧΧΑΑ
Härterich Martin	Γερμανία	1985-1989	ΧΧΧΑΧα
Lovász László	Ουγγαρία	1963-1966	ΧΧΧΑ
Nikolov Nikolai	Βουλγαρία	1992-1995	ΧΧΧΑΔ
Pelikán József	Ουγγαρία	1963-1966	ΧΧΧΑ
Banica Theodor	Ρουμανία	1989-1991	ΧΧΧ
Dourov Nikolai	Ρωσία	1996-1998	ΧΧΧ
Ivanov Ivan	Βουλγαρία	1996-1998	ΧΧΧ
Ivanov Sergej	Σοβ. Ένωση	1987-1989	ΧΧΧ
Malinnikova Evgenija	Σοβ. Ένωση	1989-1991	ΧΧΧ
Manolescu Ciprian	Ρουμανία	1995-1997	ΧΧΧ
Norton Simon	Ηνωμ. Βασίλειο	1967-1969	ΧΧΧ
Samikov Yulij	Ουκρανία	1994-1996	ΧΧΧ

ε. *Πίνακας διοργανώσεων των ΔΜΟ*

Έτος	Διοργανώτρια Χώρα	Πόλη	Αρ. Χωρών
1959	Ρουμανία	Μπρασόβ Βουκουρέστι	7
1960	Ρουμανία	Σινάια	5
1961	Ουγγαρία	Βέσπρεμ	6
1962	Τσεχοσλοβακία	Τσέσκε Μπουντεζόβιτσε	7
1963	Πολωνία	Βαρσοβία/Wroclaw	8
1964	Σοβιετική Ένωση	Μόσχα	9
1965	Ανατολική Γερμανία	Βερολίνο	10
1966	Βουλγαρία	Σόφια	9
1967	Γιουγκοσλαβία	Cetinje	12
1968	Σοβιετική Ένωση	Μόσχα	12
1969	Ρουμανία	Βουκουρέστι	14
1970	Ουγγαρία	Keszthely/Βουδαπέστη	14
1971	Τσεχοσλοβακία	Ζίλινα	15
1972	Πολωνία	Τορούν	14
1973	Σοβιετική Ένωση	Μόσχα	16
1974	Ανατολική Γερμανία	Έρφουρτ Βερολίνο	18
1975	Βουλγαρία	Μπουργκάς/Σόφια	17
1976	Αυστρία	Λιντς/Βιέννη	19
1977	Γιουγκοσλαβία	Βελιγράδι	20
1978	Ρουμανία	Βουκουρέστι	17
1979	Ηνωμένο Βασίλειο/Β. Ιρλανδία	Λονδίνο	23
1980	Δεν έγινε η ΔΜΟ	--	--
1981	Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής	Ουάσιγκτον	27
1982	Ουγγαρία	Βουδαπέστη	30
1983	Γαλλία	Παρίσι	32
1984	Τσεχοσλοβακία	Πράγα	34
1985	Φιλανδία	Γιούτσα/Ελσίνκι	38
1986	Πολωνία	Βαρσοβία	37
1987	Κούβα	Αβάνα	42
1988	Αυστραλία	Καμπέρα	49
1989	Δυτική Γερμανία	Μπραουνσβάικ	50
1990	Κίνα	Μπέιζινγκ	54
1991	Σουηδία	Σιγκτούνα	56
1992	Ρωσία	Μόσχα	56
1993	Τουρκία	Κωνσταντινούπολη	73
1994	Χονγκ-Κονγκ	Χονγκ-Κονγκ	69
1995	Καναδάς	Τορόντο	73
1996	Ινδία	Βομβάη	75
1997	Αργεντινή	Μαρ Ντε Πλάτα	82
1998	Ταϊβάν	Ταϊπέι	76
1999	Ρουμανία	Μπρασόβ Βουκουρέστι	81
2000	Ν. Κορέα	Τσονάμ/Ταεζόν	82

ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ					
Έτος	Άλγεβρα	Γεωμετρία	Θεωρία Αριθμών	Συνδυαστική Γραφήματα Θεωρία παιγνίων	Ανάλυση
1959	2, 3	4, 5, 6	1		
1960	2	3, 4, 5, 6, 7	1		
1961	1, 3	2, 4, 5, 6			
1962	1, 2, 4	3, 5, 6,			
1963	1, 3, 4, 5	2		6	
1964	2	3, 6	1	4, 5	
1965	1, 2, 4	3, 5		6	
1966	1, 2, 4, 5	3, 6			
1967	6	1, 2, 4	3		5
1968	2, 3, 6	1, 4			5
1969	2, 6	3, 4	1	5	
1970		1, 5	2, 4	6	3
1971	1,6	2, 4 5	3		
1972	4	2, 6	3	1	5
1973	3, 6	1, 2, 4			5
1974	1, 6	2	3	4	5
1975	1, 6	3, 5	2, 4		
1976	2, 3, 5	1	4		6
1977	2, 4	1	3, 5		6
1978	5	2, 4	1	6	3
1979	5	2, 3, 4	1		6
1980	–	–	–	–	–
1981	2	1, 5		4	3, 6
1982		2, 5, 6	4		1, 3
1983	5, 6	2, 4	3		1
1984	1	3, 4, 5	2,6		
1985	3	1, 5	4	2	6
1986		2, 4	1	3, 6	5
1987	3	2, 5	6	1	4
1988	4	1, 5	2, 6		3
1989		2, 4	5	1, 3, 6	
1990		1, 6	3, 5	2	4
1991		1, 5	2, 3	4	6
1992	6	4, 5	1	3	2
1993	1	2, 4		3, 6	5
1994	1	2	4, 6		3, 5
1995	2, 4	1, 3, 5	6		
1996	6	2, 5	4	1	3
1997	3	2	5	1, 4	6
1998		1, 5	3, 4	2	6
1999	2	1, 5	4	3	6
2000	2	1, 6	5	4	3



1^{η} Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1959

Τόπος Διοργάνωσης:	Ρουμανία (Μπρασόφ – Βουκουρέστι)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	G. Moisil (Παν. Βουκουρεστίου) Simionescu (Παν. Βουκουρεστίου)
Συμμετοχή:	7 χώρες με 8 το πολύ μαθητές η καθεμία
Μέγιστη Βαθμολογία:	40 βαθμοί ανά μαθητή
Τελική Βαθμολογία:	Ρουμανία (249), Ουγγαρία (233), Τσεχοσλοβακία (192), Βουλγαρία (131), Πολωνία (122), Σοβ. Ένωση (111, με 4 μαθητές), Α. Γερμανία (40).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να αποδείξετε ότι το κλάσμα $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ είναι ανάγωγο για κάθε φυσικό αριθμό n.

Λύση:

Θα δείξουμε ότι $(21n+4, 14n+3)=1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έστω ότι $(21n+4, 14n+3)=m \in \mathbb{N}$. Τότε θα ισχύει ότι

$$21n+4=k_1 m \text{ και } 14n+3=k_2 m,\ k_1, k_2 \in \mathbb{N},$$

οπότε

$$(3k_2-2k_1)m=42n+9-(42n+8)=1,$$

με $3k_2-2k_1 \in \mathbb{Z}$, δηλαδή ο m είναι διαιρέτης του 1, οπότε $m=1$.

Επίσης θα μπορούσαμε να εργασθούμε ως εξής:

$$\begin{aligned}(21n+4,14n+3)&=(14n+3,21n+4-14n-3)\\&=(14n+3,7n+1)\\&=(7n+1,7n+2)\\&=(7n+1,1)=1.\end{aligned}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Για ποιες πραγματικές τιμές του x ισχύει ότι

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=A, \tag{1}$$

όπου (i) $A=\sqrt{2}$, (ii) $A=1$ και (iii) $A=2$;

[Μόνο μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί έχουν τετραγωνική ρίζα.]

Λύση:

Το πρώτο μέλος της εξίσωσης ορίζεται όταν

$$2x-1\ge 0,\ \ x\pm\sqrt{2x-1}\ge 0$$

ή ισοδύναμα, όταν

$$x\ge\frac{1}{2}\ \text{και}\ x\ge\pm\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{2}.$$

Για $x\ge\frac{1}{2}$ η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη προς την εξίσωση

$$2x+2\sqrt{x^2-(2x-1)}=A^2$$

$$\Leftrightarrow x+|x-1|=\frac{A^2}{2} \tag{2}$$

(i) Για $A=\sqrt{2}$ η (2) γίνεται:

$$x+|x-1|=1,$$

η οποία για $x\ge 1$ γίνεται $x+x-1=1$ ή $2x=2$ και έχει τη λύση $x=1$, ενώ για $\frac{1}{2}\le x<1$, γίνεται $x+1-x=1$ και έχει ως λύση κάθε $x\in\left[\frac{1}{2},1\right)$. Επομένως για $A=\sqrt{2}$ η εξίσωση έχει ως λύση κάθε $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$.

(ii) Για $A=1$ η εξίσωση (2) γίνεται:

$$x+|x-1|=\frac{1}{2},$$

η οποία για $x\geq 1$ γίνεται $x+x-1=\frac{1}{2}$ ή $x=\frac{3}{4}$ (απορρίπτεται γιατί είναι $\frac{3}{4}<1$), ενώ για $\frac{1}{2}\leq x<1$ γίνεται $x+1-x=\frac{1}{2}$ ή $0\cdot x=-\frac{1}{2}$ και είναι αδύνατη. Άρα η εξίσωση για $A=1$, δεν έχει λύση.

(iii) Για $A=2$ η (2) γίνεται: $x+|x-1|=2$ και έχει τη λύση $x=\frac{3}{2}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω ότι $a,b,c\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε την δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς συνx :

$$a\sigma\upsilon\nu^2 x+b\sigma\upsilon\nu x+c=0. \quad (1)$$

Χρησιμοποιώντας τους αριθμούς a, b, c, να σχηματίσετε μία δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς συν2x, της οποίας οι ρίζες είναι ίδιες με αυτές της αρχικής εξίσωσης (1). Να συγκρίνετε τις δύο εξισώσεις ως προς συνx και συν2x, όταν $a=4, b=2, c=-1$.

Λύση: ($1^{ος}$ τρόπος)

Στην εξίσωση (1) αντικαθιστούμε το συνx με

$$\sigma\upsilon\nu x=\pm\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}}$$

και λαμβάνουμε την ισοδύναμη εξίσωση

$$a\left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)\pm b\left(\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}}\right)+c=0,$$

η οποία με χωρισμό της ρίζας και ύψωση στο τετράγωνο γίνεται

$$a^2\sigma\upsilon\nu^2 2x+\left(2a^2+4ac-2b^2\right)\sigma\upsilon\nu 2x+\left(a^2+4ac+4c^2-2b^2\right)=0. \quad (2)$$

Για $a=4, b=2, c=-1$ η δοθείσα εξίσωση γίνεται

$$4\sigma\upsilon\nu^2 2x+8\sigma\upsilon\nu 2x-4=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 2x+2\sigma\upsilon\nu 2x-1=0,,$$

η οποία ταυτίζεται με τη δοθείσα εξίσωση (1).

$2^{ος}$ τρόπος

Έστω $r_1 = συνx_1, r_2 = συνx_2$ οι ρίζες της εξίσωσης (1). Επειδή $συν2x_i = 2συν^2 x_i - 1$, $i = 1,2$, οι ρίζες R_1, R_2 της εξίσωσης που αναζητούμε ως προς $ω = συν2x$, έστω $Aω^2 + Bω + C = 0$, θα είναι:

$$R_1 = 2r_1^2 - 1 \text{ και } R_2 = 2r_2^2 - 1.$$

Έτσι έχουμε

$$R_1 + R_2 = 2\left(r_1^2 + r_2^2\right) - 2 = 2\left[\left(r_1 + r_2\right)^2 - 2r_1 r_2\right] - 2 = -\frac{B}{A},$$

$$R_1 \cdot R_2 = \left(2r_1^2 - 1\right)\left(2r_2^2 - 1\right) = 4r_1^2 r_2^2 - 2\left(r_1^2 + r_2^2\right) + 1 = \frac{C}{A},$$

και επειδή είναι

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}, \quad r_1 r_2 = \frac{c}{a},$$

θα έχουμε

$$R_1 + R_2 = 2\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{c}{a}\right) - 2 = -\frac{B}{A}$$

$$R_1 R_2 = 4\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 2\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)\right] + 1 = \frac{C}{A}.$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα ως προς B, C με το A ως αυθαίρετο άγνωστο, λαμβάνουμε

$$B = \frac{\left(2a^2 + 4ac - 2b^2\right)A}{a^2} \qquad C = \frac{\left(4c^2 - 2b^2 + 4ac + a^2\right)A}{a^2},$$

οπότε για $A = a^2$ καταλήγουμε στην εξίσωση

$$aω^2 + \left(2a^2 + 4ac - 2b^2\right)ω + 4c^2 - 2b^2 + 4ac + a^2 = 0,$$

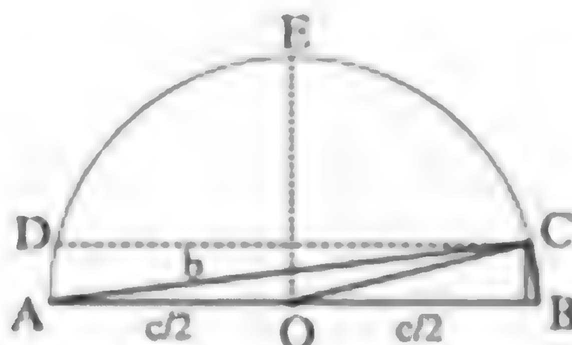
η οποία για α=4, b=2, c=-1 γίνεται: $4συν^2 2x + 8συν2x - 4 = 0$ και ομοίως όπως προηγουμένως ταυτίζεται με την (1).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να κατασκευάσετε ορθογώνιο τρίγωνο με δεδομένη υποτείνουσα c έτσι ώστε η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα να ισούται με τον γεωμετρικό μέσο των δύο κάθετων πλευρών του τριγώνου.

Λύση: (1ος τρόπος)

Θεωρούμε την υποτείνουσα c ως διάμετρο AB ενός ημικυκλίου (Σχ. 1). Κάθε τρίγωνο ACB εγγεγραμμένο στο ημικύκλιο έχει γωνία $\hat{C} = 90^\circ$ και ακτίνα $CO = \frac{c}{2}$.



Σχήμα 1

Θα προσδιορίσουμε το σημείο C έτσι ώστε το τμήμα CO να ισούται με τον γεωμετρικό μέσο των $CB = a$, $AC = b$, δηλαδή

$$\frac{a}{c/2} = \frac{c/2}{b} \text{ ή } 4ab = c^2. \qquad (1)$$

Αν φέρουμε το ύψος υ από την κορυφή C, τότε θα έχουμε

$$2E_{(ABC)} = ab = c\upsilon,$$

από την οποία, λόγω της (1), προκύπτει ότι $\upsilon = \frac{c}{4}$.

Επομένως, αν κατασκευάσουμε μία ευθεία παράλληλη προς τη διάμετρο AB σε απόσταση $c/4$ από αυτήν, θα τμήσει το ημικύκλιο στα σημεία C και D, οπότε τα τρίγωνα ACB και ADB αποτελούν λύση του προβλήματος.

2ος τρόπος

Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο COB με $C\hat{O}B = \theta$, και στο τρίγωνο AOC με $A\hat{O}C = \pi - \theta$, λαμβάνουμε

$$a^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4} - 2\cdot\frac{c^2}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = c^2\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu\theta}{2}\right)$$

$$b^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4} + 2\cdot\frac{c^2}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = c^2\left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{2}\right),$$

από τις οποίες προκύπτει ότι

$$a^2b^2 = c^4\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta}{4}\right) = \frac{c^4\eta\mu^2\theta}{4} \text{ ή } ab = \frac{c^2\eta\mu\theta}{2}.$$

Από τις συνθήκες του προβλήματος έχουμε ότι $ab = \frac{c^2}{4}$, οπότε προκύπτει ότι $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$, δηλαδή είναι

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ ή } \theta = \frac{5\pi}{6}$$

που οδηγούν στις δύο λύσεις που βρήκαμε στον πρώτο τρόπο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

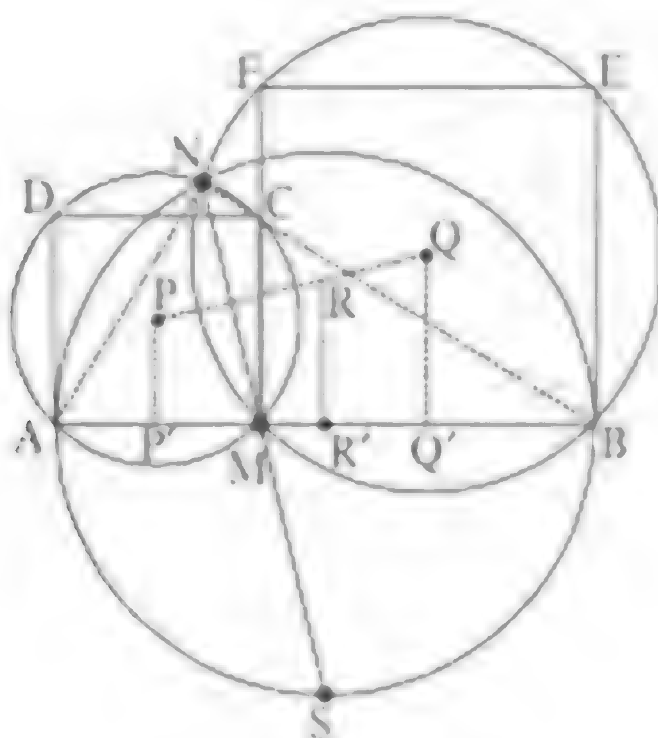
Θεωρούμε σημείο M εσωτερικό στο ευθύγραμμο τμήμα AB. Τα τετράγωνα AMCD και MBEF κατασκευάζονται προς το ίδιο μέρος του τμήματος AB με τα τμήματα AM και MB ως βάσεις του, αντιστοίχως. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των δύο τετραγώνων με κέντρα P και Q, αντίστοιχα, τέμνονται εκτός του σημείου M και στο σημείο N. Έστω N΄ το σημείο τομής των ευθειών AF και BC.

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία N και N΄ συμπίπτουν.

(β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες MN διέρχονται από ένα σταθερό σημείο S ανεξάρτητο από την επιλογή του M.

(γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων των τμημάτων PQ, καθώς το σημείο M μεταβάλλεται στο AB.

Λύση:



Σχήμα 2

(α) Φέρουμε τα τμήματα AN, NF, BC και CN. Τότε θα είναι $\widehat{ANF} = 45°$ και $\widehat{MNF} = 135°$, οπότε

$$\widehat{ANF} = \widehat{ANM} + \widehat{MNF} = 45° + 135° = 180°.$$

Άρα τα σημεία A, N και F είναι συνευθειακά.

Έχουμε ακόμη ότι $\widehat{ANC} = 90°$ και

$$\widehat{ANB} = \widehat{ANM} + \widehat{MNB} = 45° + 45° = 90°,$$

οπότε $\widehat{ANC} = \widehat{ANB}$. Άρα οι ευθείες NC και NB συμπίπτουν, δηλαδή τα N, C, B είναι συνευθειακά.

Επομένως οι ευθείες AF και BC τέμνονται στο N, οπότε $N \equiv N'$.

(β) Η ευθεία NM είναι διχοτόμος της γωνίας ANB, αφού $\widehat{ANM} = \widehat{MNB} = 45°$. Επομένως η NM προεκτεινόμενη θα τέμνει τον κύκλο διαμέτρου AB σε σημείο S που είναι μέσον του τόξου AB, δηλαδή $\overset{\frown}{AS} = \overset{\frown}{SB}$.

Επειδή είναι $\widehat{ANB} = 90°$, για τις διάφορες θέσεις του M εσωτερικά του AB, το σημείο N διαγράφει το άνω ημικύκλιο του κύκλου διαμέτρου AB, ενώ το σημείο S θα είναι πάντα το μέσον του κάτω ημικυκλίου, δηλαδή το S δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου M.

(γ) Έστω PP′, QQ′, RR′ είναι κάθετες προς την AB, από τα P, Q και το μέσον R της PQ, αντιστοίχως. Επειδή η RR′ είναι η διάμεσος του τραπεζίου P′Q′QP θα έχουμε

$$RR' = \frac{1}{2}(PP' + QQ') = \frac{AM + MB}{4} = \frac{AB}{4},$$

οπότε το R απέχει σταθερή απόσταση από την AB.

Επιπλέον στις οριακές θέσεις, όταν $M \to A$, τότε $P \to A$ και $AQ' \to \frac{AB}{2}$, οπότε $AR' \to \frac{AB}{4}$, ενώ όταν $M \to B$ θα έχουμε $P'B \to \frac{AB}{2}$ και $Q' \to B$, οπότε $R'B \to \frac{AB}{4}$.

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος του R είναι ευθύγραμμο τμήμα μήκους $\frac{AB}{2}$ παράλληλο προς την AB σε απόσταση $\frac{AB}{4}$ από αυτήν και προς το

μέρος των τετραγώνων AMCD και MBEF. Το μέσον του παραπάνω τμήματος είναι το σημείο τομής του με τη μεσοκάθετο της διαμέτρου AB.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

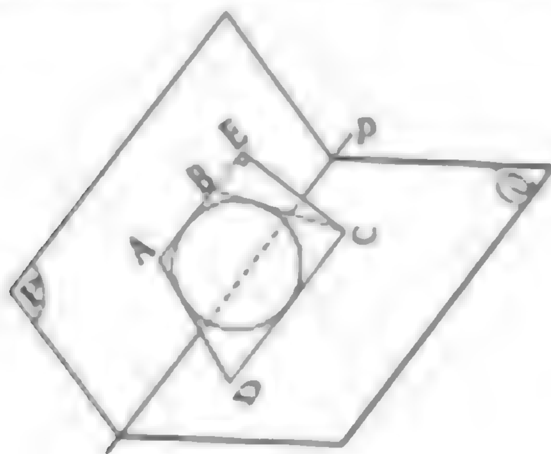
Δύο επίπεδα P και Q τέμνονται κατά την ευθεία p. Το σημείο A ανήκει στο επίπεδο P, ενώ το σημείο C ανήκει στο επίπεδο Q, χωρίς κανένα από τα A και C να ανήκει στην ευθεία p. Να κατασκευάσετε ισοσκελές τραπέζιο ABCD με AB || CD στο οποίο να μπορεί να εγγραφεί ένας κύκλος και του οποίου οι κορυφές B και D να ανήκουν στα επίπεδα P και Q, αντιστοίχως.

Λύση

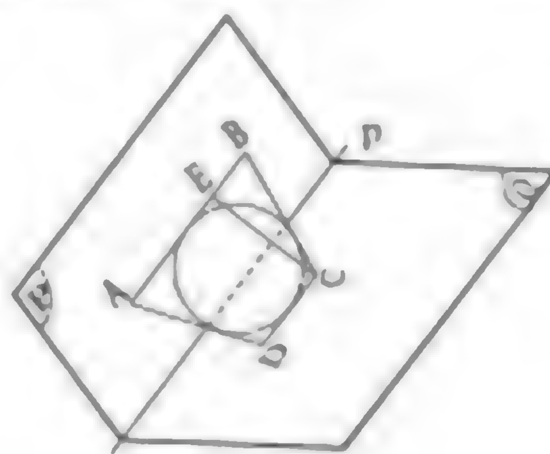
Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

- Οι παράλληλες πλευρές AB και CD του τραπεζίου ABCD θα είναι παράλληλες και προς την τομή p των δύο επιπέδων.
- Η απόσταση CE μεταξύ των παραλλήλων πλευρών του τραπεζίου (ύψος τραπεζίου) θα ισούται με τη διάμετρο του εγγεγραμμένου κύκλου του τραπεζίου.
- Η απόσταση AC των δεδομένων σημείων A και C είναι γνωστή.

Έστω ότι είναι $AB = a$, $CD = b$ και $AD = BC = c$.



Σχήμα 3(i)



Σχήμα 3(ii)

Επειδή οι εφαπτόμενες από μία κορυφή του τραπεζίου προς τον εγγεγραμμένο κύκλο είναι ίσες θα έχουμε

$$AB + CD = AD + BC \text{ ή } a + b = 2c \text{ ή } c = \frac{a+b}{2}.$$

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

(i) Αν είναι $a < b$ (Σχ. 3i), τότε $a + 2BE = b$, οπότε

$$BE = \frac{b-a}{2} \text{ και } AE = a + BE = \frac{a+b}{2} = c.$$

(ii) Αν είναι $a > b$ (Σχ. 3ii), τότε $a - 2BE = b$, οπότε

$$BE = \frac{a-b}{2} \text{ και } AE = a - BE = \frac{a+b}{2} = c.$$

Έτσι για την κατασκευή του τραπεζίου εργαζόμαστε ως εξής:

Στο επίπεδο P κατασκευάζουμε ευθεία ℓ που περνάει από το A και είναι παράλληλη προς την p και ομοίως στο επίπεδο Q κατασκευάζουμε ευθεία $m \parallel p$, που περνάει από το C.

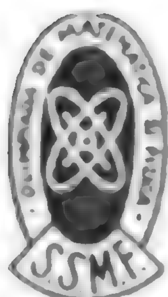
Φέρουμε από το C κάθετη προς την CD που τέμνει την ℓ στο σημείο E (στο επίπεδο που ορίζουν οι ℓ και m).

Με κέντρο C και ακτίνα AE γράφουμε κύκλο που τέμνει την AE στο B, ενώ με κέντρο A και ακτίνα AE γράφουμε κύκλο που τέμνει την ευθεία m στο D.

Αν είναι $CE < AE$, υπάρχουν δύο λύσεις (Σχ. 3i, 3ii).

Αν είναι $CE = AE$, υπάρχει μία μόνο λύση (το ABCD είναι τετράγωνο).

Αν είναι $CE > AE$, δεν υπάρχει λύση.



$2^η$ Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1960.

Τόπος Διοργάνωσης:	Ρουμανία (Σινάια)
Πρόεδρος Συμβουλίου Αρχηγών:	G. Moisil (Ακ. Επιστ. Βουκουρεστίου)
Συμμετοχή:	5 χώρες με 8 το πολύ μαθητές η καθεμία
Μέγιστη Βαθμολογία:	45 βαθμοί ανά μαθητή
Τελική Βαθμολογία:	Τσεχοσλοβακία (257), Ρουμανία (248), Ουγγαρία (248), Βουλγαρία (175), Α. Γερμανία (38).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε όλους τους τριψήφιους αριθμούς Ν που έχουν την ιδιότητα να διαιρούνται με το 11 και ο $\frac{N}{11}$ ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των ψηφίων του Ν.

Λύση

Έστω ότι ο αριθμός Ν είναι ο $100\alpha+10\beta+\gamma$, όπου α, β, γ είναι τα ψηφία του, τα οποία πρέπει να προσδιοριστούν έτσι ώστε να ισχύει

$$N=11\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right).$$

Επειδή ο Ν διαιρείται με το 11, είναι χρήσιμο να τον γράψουμε στη μορφή

$$N=(99\alpha+11\beta)+(\alpha-\beta+\gamma)=11(9\alpha+\beta)+(\alpha-\beta+\gamma)$$

οπότε ο Ν διαιρείται με το 11, αν, και μόνο αν, ο αριθμός $\alpha-\beta+\gamma$ διαιρείται με το 11. Επειδή τα α, β, γ είναι ψηφία ο αριθμός $\alpha-\beta+\gamma$ θα διαιρείται με το 11, αν, και μόνο αν, $\alpha-\beta+\gamma=0$ ή $\alpha-\beta+\gamma=11$, δεδομένου ότι θα

πρέπει να ισχύει: $-8 \leq \alpha - \beta + \gamma \leq 18$.

Έτσι διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $\alpha - \beta + \gamma = 0$, οπότε $\alpha + \gamma = \beta$.

Τότε θα έχουμε

$$99\alpha + 11\beta + (\alpha - \beta + \gamma) = 11\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)$$

$$9\alpha + \beta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

$$9\alpha + \alpha + \gamma = \alpha^2 + (\alpha + \gamma)^2 + \gamma^2$$

$$10\alpha + \gamma = 2\left(\alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2\right),$$

οπότε ο αριθμός γ πρέπει να είναι άρτιος. Η τελευταία εξίσωση γραφόμενη ως τριώνυμο μεταβλητής α γίνεται

$$2\alpha^2 + (2\gamma - 10)\alpha + 2\gamma^2 - \gamma = 0,$$

και επειδή ο α είναι ακέραιος, θα πρέπει η διακρίνουσα

$$\Delta = (2\gamma - 10)^2 - 8\left(2\gamma^2 - \gamma\right) = 4\left(25 - 8\gamma - 3\gamma^2\right)$$

να είναι τέλειο τετράγωνο. Αυτό αληθεύει μόνο όταν είναι $\gamma = 0$. Πράγματι, ο γ είναι άρτιος, και για $\gamma \geq 2$ είναι $\Delta < 0$. Με $\gamma = 0$ η εξίσωση γίνεται $2\alpha^2 - 10\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 5$, αφού ο α δεν μπορεί να είναι 0. Επομένως θα είναι $\beta = 5 + 0 = 5$ και $N = 550$.

(ii) $\alpha - \beta + \gamma = 11$, οπότε $\beta = \alpha + \gamma - 11$.

Τότε θα έχουμε

$$99\alpha + 11\beta + \alpha - \beta + \gamma = 11\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)$$

$$\alpha + \beta + 1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

$$\alpha + \alpha + \gamma - 11 + 1 = \alpha^2 + (\alpha + \gamma - 11)^2 + \gamma^2$$

$$10\alpha + \gamma - 10 = 2\left[\alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2 - 11(\alpha + \gamma)\right] + 121,$$

οπότε ο γ πρέπει να είναι περιττός. Η τελευταία εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$2\alpha^2 + (2\gamma - 32)\alpha + 2\gamma^2 - 23\gamma + 131 = 0,$$

και επειδή ο α είναι ακέραιος θα πρέπει η διακρίνουσα

$$\Delta' = (2\gamma - 32)^2 - 8(2\gamma^2 - 23\gamma + 131) = 4(-3\gamma^2 + 14\gamma - 6)$$

να είναι τέλειο τετράγωνο. Ο γ πρέπει να είναι περιττός και για $\gamma = 1$ είναι $\Delta' = 20$, για $\gamma = 3$ είναι $\Delta' = 36 = 6^2$, ενώ για $\gamma \geq 5$ είναι $\Delta' < 0$. Άρα πρέπει να είναι $\gamma = 3$, οπότε προκύπτει η εξίσωση $2\alpha^2 - 26\alpha + 80 = 0$ που έχει ρίζες $\alpha = 5$ ή $\alpha = 8$.

Για $\alpha = 5$ έχουμε $\beta = \alpha + \gamma - 11 = 5 + 3 - 11 = -3 < 0$ (άτοπο).

Για $\alpha = 8$ έχουμε $\beta = \alpha + \gamma - 11 = 8 + 3 - 11 = 0$, οπότε θα είναι $N = 803$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Για ποιες τιμές του x αληθεύει η ανίσωση

$$\frac{4x^2}{\left(1 - \sqrt{1 + 2x}\right)^2} < 2x + 9\,;$$

Λύση

Το πρώτο μέρος της ανίσωσης ορίζεται όταν είναι $x \geq -\frac{1}{2}$ και $x \neq 0$. Για τα παραπάνω x, με πολλαπλασιασμό και των δύο όρων του κλάσματος του πρώτου μέλους επί $\left(1 + \sqrt{1 + 2x}\right)^2$, λαμβάνουμε την ισοδύναμη ανίσωση

$$\left(1 + \sqrt{1 + 2x}\right)^2 < 2x + 9. \qquad (1)$$

Αν θέσουμε $y = \sqrt{1 + 2x} \geq 0$, τότε η (1) γίνεται

$$(1 + y)^2 < y^2 + 8 \Leftrightarrow y < \frac{7}{2}.$$

Επομένως θα έχουμε

$$\sqrt{1 + 2x} < \frac{7}{2} \Leftrightarrow 1 + 2x < \frac{49}{4} \Leftrightarrow x < \frac{45}{8}.$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει όταν $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{45}{8}$ και $x \neq 0$.

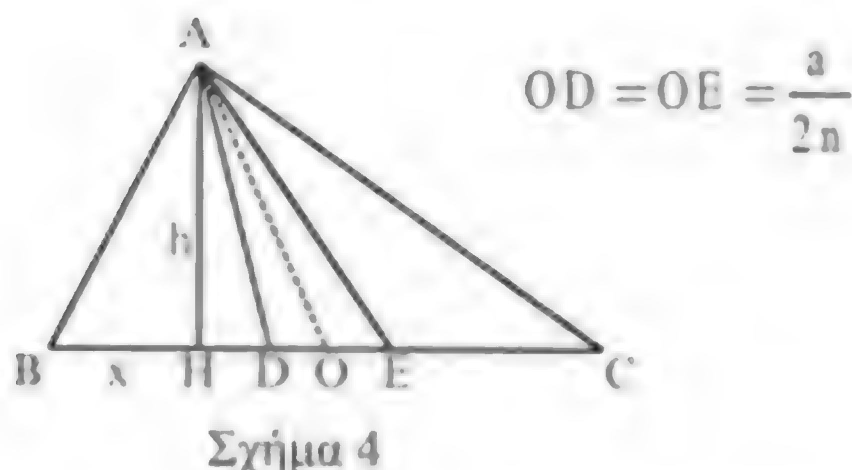
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Σε δεδομένο ορθογώνιο τρίγωνο ABC, η υποτείνουσα BC, μήκους a, διαιρείται σε n ίσα τμήματα, όπου n περιττός ακέραιος. Έστω *α* η γωνία υπό την οποία φαίνεται από την κορυφή A εκείνο το τμήμα, από αυτά που ορίζουμε στην υποτείνουσα, που περιέχει το μέσον της υποτεί-

νουσας. Αν h είναι το ύψος του τριγώνου προς την υποτείνουσα, να αποδείξετε ότι

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{4nh}{\left(n^2-1\right)a}.$$

Λύση



Σχήμα 4

Έστω ότι D και E είναι τα άκρα του τμήματος που ορίζουμε στην υποτείνουσα, όταν την διαιρούμε σε n ίσα τμήματα, το οποίο περιέχει το μέσον O της υποτείνουσας. Έστω ακόμη AH το ύψος προς την υποτείνουσα με $AH = h$, $BH = x$, $H\hat{A}E = \beta$ και $\gamma = H\hat{A}D$. Τότε θα είναι $\alpha = \beta - \gamma$ και

$$\varepsilon\varphi\alpha = \varepsilon\varphi(\beta-\gamma) = \frac{\varepsilon\varphi\beta - \varepsilon\varphi\gamma}{1+\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\gamma}. \quad (1)$$

Όμως έχουμε

$$\varepsilon\varphi\beta = \frac{HE}{AH} = \frac{BO-BH+OE}{AH} = \frac{a-2x}{2h} + \frac{a}{2nh} \quad (2)$$

$$\varepsilon\varphi\gamma = \frac{HD}{AH} = \frac{BO-BH+OD}{AH} = \frac{a-2x}{2h} - \frac{a}{2nh}, \quad (3)$$

οπότε με αντικατάσταση των (2) και (3) στην (1) και αφού στο ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει η ισότητα $h^2 = x(a-x)$, μετά τις πράξεις προκύπτει ότι

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{\frac{a}{nh}}{1+\frac{\left[a^2\left(n^2-1\right)-4n^2x(a-x)\right]}{4n^2h^2}}$$

ή

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{4nh}{a\left(n^2-1\right)}.$$

Παρατήρηση:

Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να λυθεί και με χρήση του νόμου των συνημιτόνων στα τρίγωνα OAD και OAE, όπου τελικά με $p = AD, q = AE$ προκύπτει η σχέση

$$p^2 + q^2 = \frac{a^2\left(n^2+1\right)}{2n^2}. \qquad (4)$$

Επίσης στο τρίγωνο ADE χρησιμοποιούμε τον τύπο του εμβαδού $\frac{1}{2}pq\eta\mu\alpha = \frac{1}{2}DE\cdot h = \frac{ah}{2n}$ για να βρούμε ότι

$$\eta\mu\alpha = \frac{ah}{pqn}, \qquad (5)$$

αλλά και το νόμο των συνημιτόνων για να βρούμε ότι

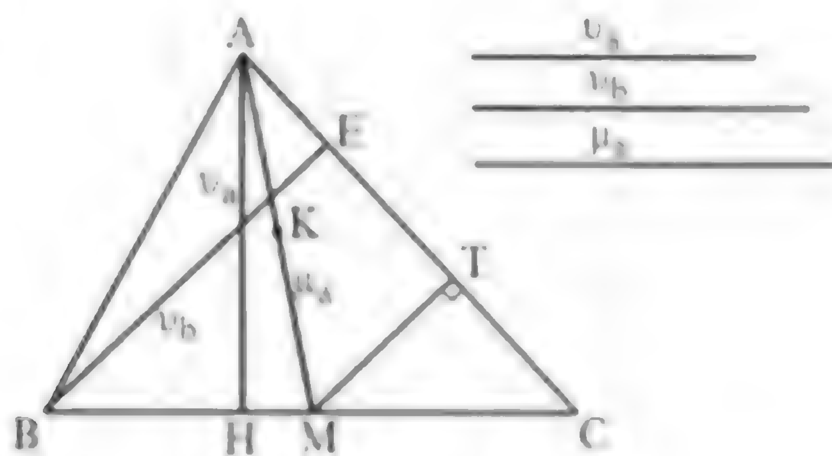
$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{2pq}\left(p^2+q^2-\frac{a^2}{n^2}\right). \qquad (6)$$

Από τις (4), (5) και (6) προκύπτει το ζητούμενο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να κατασκευάσετε τρίγωνο ABC, όταν δίνονται τα ύψη του υ_a, υ_b και η διάμεσος μ_a.

Λύση



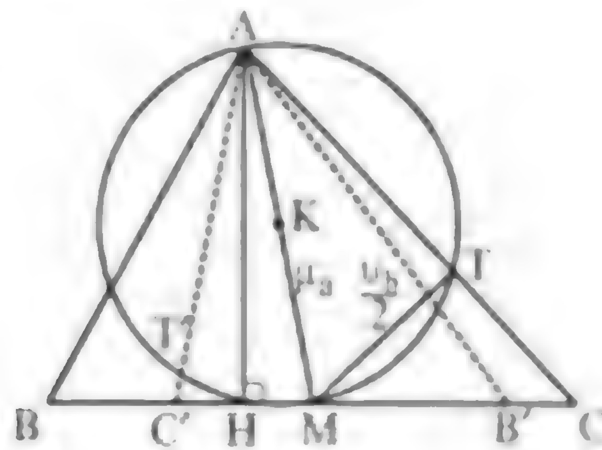
Σχήμα 5

Χρησιμοποιώντας την **Αναλυτική μέθοδο**, υποθέτουμε ότι έχουμε κατασκευάσει το τρίγωνο ABC με τα δεδομένα στοιχεία. Παρατηρούμε ότι στο ορθογώνιο τρίγωνο AHM είναι γνωστή η υποτείνουσα $AM = \mu_a$ και η κάθετη πλευρά $AH = \upsilon_a$, οπότε το τρίγωνο αυτό κατασκευάζεται.

Αν από το μέσον M της BC φέρουμε την $MT \perp AC$, τότε θα είναι

$MT \parallel BE = \upsilon_b$ και $MT = \frac{\upsilon_b}{2}$. Επομένως και το τρίγωνο AMT κατασκευάζεται, αφού είναι γνωστή η υποτείνουσα $AM = \mu_a$ και η κάθετη πλευρά του $MT = \frac{\upsilon_b}{2}$. Στη συνέχεια, η κορυφή C προσδιορίζεται ως τομή των HM και AT, ενώ η κορυφή B προσδιορίζεται από την ισότητα $MB = MC$.

Ερχόμενοι τώρα στη διαδικασία της **σύνθεσης**, κατασκευάζουμε πρώτα το ορθογώνιο τρίγωνο AHM ως εξής: Με διάμετρο $AM = \mu_a$ γράφουμε κύκλο C_1 και στη συνέχεια γράφουμε τον κύκλο $C_2(A, \upsilon_a)$ και ονομάζουμε H ένα σημείο τομής των παραπάνω κύκλων. Στη συνέχεια γράφουμε τον κύκλο $C_3\left(M, \frac{\upsilon_b}{2}\right)$ που τέμνει τον κύκλο C_1 στα σημεία T και T΄. Θεωρούμε το σημείο T σε διαφορετικό ημιεπίπεδο από το H ως προς την AM και προεκτείνουμε τις AT και HM. Το σημείο τομής τους είναι η κορυφή C του τριγώνου, ενώ η κορυφή B βρίσκεται πάνω στην ευθεία HM, αν πάρουμε $MB = MC$.



Σχήμα 6

Αν K είναι το κέντρο του κύκλου C_1 τότε είναι $KM = \frac{\mu_a}{2} = AK$ και οι κύκλοι C_1 και C_3 τέμνονται, όταν

$$\left|\frac{\mu_a}{2} - \upsilon_a\right| < AK = \frac{\mu_a}{2} < \frac{\mu_a}{2} + \upsilon_a, \quad (1)$$

ενώ οι κύκλοι C_1 και C_3 τέμνονται στα σημεία T και T΄, όταν

$$\left|\frac{\mu_a}{2} - \frac{\upsilon_b}{2}\right| < KM = \frac{\mu_a}{2} < \frac{\mu_a}{2} + \frac{\upsilon_b}{2}. \quad (2)$$

Οι ανισότητες (1) αληθεύουν, όταν $\upsilon_a - \frac{\mu_a}{2} < \frac{\mu_a}{2}$ ή $\upsilon_a < \mu_a$, ενώ οι α-

νισότητες (2) αληθεύουν, όταν $\frac{\upsilon_b}{2}-\frac{\mu_a}{2}<\frac{\mu_a}{2}$ ή $\upsilon_b<2\mu_a$.

Επομένως, όταν ισχύουν $\upsilon_a<\mu_a$ και $\upsilon_b<2\mu_a$ έχουμε ως δύο λύσεις τα τρίγωνα ABC και AB΄C΄.

Αν είναι $\upsilon_a=\mu_a$ και $\upsilon_b<2\mu_a$ τότε τα τρίγωνα ABC και AB΄C΄ ταυτίζονται, οπότε έχουμε μία λύση.

Αν είναι $\upsilon_a>\mu_a$ ή $\upsilon_b>2\mu_a$ το πρόβλημα δεν έχει λύση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Θεωρείστε τον κύβο ABCDA΄B΄C΄D΄ (με απέναντι βάσεις ABCD και A΄B΄C΄D΄).

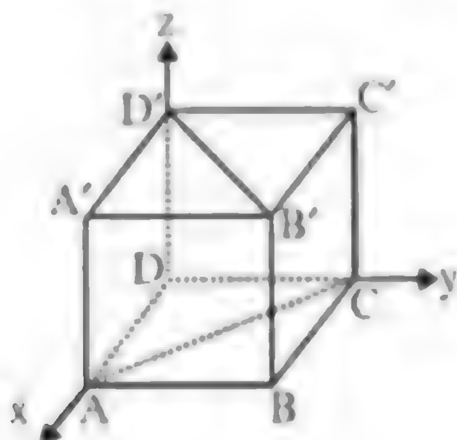
(α) Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων των τμημάτων XY, όπου X είναι τυχόν σημείο της AC και Y είναι τυχόν σημείο της B΄D΄.

(β) Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Z που βρίσκονται πάνω στα τμήματα XY του ερωτήματος (α) με $ZY=2XZ$.

Λύση

Χάριν απλότητος θεωρούμε την πλευρά του κύβου μήκους 1, καθώς και Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε

$$D=(0,0,0),\quad A=(1,0,0),\quad B=(1,1,0),\quad C=(0,1,0)$$
$$D'=(0,0,1),\quad A'=(1,0,1),\quad B'=(1,1,1),\quad C'=(0,1,1)$$



Σχήμα 7

Θυμίζουμε ότι, αν $\vec{r}=(x,y,z)$ είναι το διάνυσμα θέσης του τυχαίου σημείου της ευθείας που περνάει από τα σημεία $M_1=(x_1,y_1,z_1)$, $M_2=(x_2,y_2,z_2)$ τότε η εξίσωση (διανυσματική παραμετρική) είναι:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1),\ t \in \mathbb{R}$$
$$\vec{r} = (1-t)\vec{r}_1 + t\vec{r}_2,\ t \in \mathbb{R}$$
$$\vec{r} = ((1-t)x_1 + ty_1, (1-t)x_2 + ty_2, (1-t)x_3 + ty_3),\ t \in \mathbb{R},$$

ενώ όταν περιορίσουμε την παράμετρο t στο $[0,1]$ το $\vec{r}$ δίνει τα διανύσματα θέσης των σημείων του ευθυγράμμου τμήματος M_1M_2.

Σύμφωνα με αυτά για τα $X \in AC$, $Y \in B'D'$ θα είναι

$$X = (1-s)(1,0,0) + s(0,1,0) = (1-s, s, 0),\ 0 \le s \le 1$$
$$Y = (1-t)(0,0,1) + t(1,1,1) = (t,t,1),\qquad 0 \le t \le 1$$

(α) Το μέσον M του XY θα έχει συντεταγμένες που θα είναι τα ημιαθροίσματα των συντεταγμένων των άκρων X και Y, δηλ.

$$M = \left(\frac{1-s+t}{2}, \frac{s+t}{2}, \frac{1}{2}\right),\ s,t \in [0,1].$$

Επειδή η κατηγμένη του M είναι σταθερή και ίση προς $\frac{1}{2}$, το σημείο M θα ανήκει στο επίπεδο με εξίσωση $z = \frac{1}{2}$, που είναι μεσοπαράλληλο των εδρών ABCD και A΄B΄C΄D΄ του κύβου, που έχουν εξισώσεις $z = 0$ και $z = 1$, αντιστοίχως. Αν είναι

$$x_M = \frac{1-s+t}{2},\ y_M = \frac{s+t}{2},$$

τότε

$$x_M + y_M = t + \frac{1}{2},\ x_M - y_M = \frac{1}{2} - s$$

και επειδή είναι $s,t \in [0,1]$ θα έχουμε:

$$\frac{1}{2} \le x_M + y_M \le \frac{3}{2} \text{ και } -\frac{1}{2} \le x_M - y_M \le \frac{1}{2}.$$

Επομένως το σημείο M ανήκει στο επίπεδο $z = \frac{1}{2}$ και συγκεκριμένα στο τετράγωνο που ορίζεται ως τομή του επιπέδου $z = \frac{1}{2}$ με τα επίπεδα $x + y = \frac{1}{2}$, $x + y = \frac{3}{2}$, $x - y = -\frac{1}{2}$ και $x - y = \frac{1}{2}$, (σχήμα 8(i)).

Σχήμα 8(i) Σχήμα 8(ii)

(β) Επειδή είναι $\frac{ZY}{ZX}=2$ για το διάνυσμα θέσης του $\vec{r}_z$ του Z θα έχουμε

$$\vec{r}_z=\frac{1}{1+2}\vec{r}_y+\frac{2}{1+2}\vec{r}_x=\frac{1}{3}\vec{r}_y+\frac{2}{3}\vec{r}_x,$$

οπότε, σύμφωνα με το (α) θα είναι

$$Z=(x_z,y_z,z_z)=\frac{1}{3}(t,t,1)+\frac{2}{3}(1-s,s,0)$$

$$Z=\left(\frac{t+2-2s}{3},\frac{t+2s}{3},\frac{1}{3}\right),\ t,s\in[0,1].$$

Επομένως το Z ανήκει στο επίπεδο με εξίσωση $z=\frac{1}{3}$.

Επιπλέον έχουμε

$$x_z+y_z=\frac{2+2t}{3} \text{ και } x_z-y_z=\frac{2-4s}{3},$$

οπότε

$$\frac{2}{3}\le x_z+y_z\le\frac{4}{3} \text{ και } -\frac{2}{3}\le x-y\le\frac{2}{3}.$$

Άρα το σημείο Z ανήκει στο επίπεδο $z=\frac{1}{3}$ και συγκεκριμένα στο ορθογώνιο που ορίζεται από την τομή του επιπέδου $z=\frac{1}{3}$ με τα επίπεδα $x+y=\frac{2}{3}$, $x+y=\frac{4}{3}$, $x-y=-\frac{2}{3}$ και $x-y=\frac{2}{3}$, (σχήμα 8(ii)).

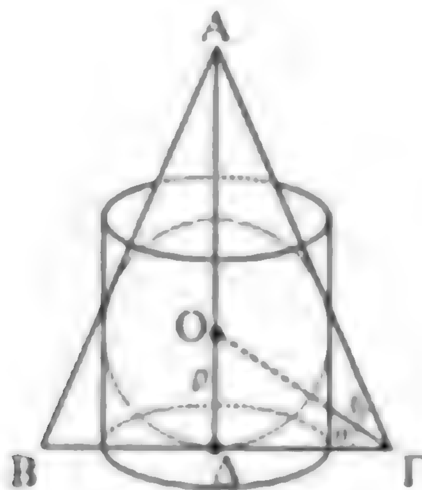
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Θεωρούμε κώνο εκ περιστροφής με μια εγγεγραμμένη σφαίρα που εφάπτεται στη βάση του κώνου. Ένας ορθός κύλινδρος είναι περιγεγραμμένος γύρω από τη σφαίρα έτσι ώστε η μία βάση του να βρίσκεται μέσα στη βάση του κώνου. Έστω V_1 ο όγκος του κώνου και V_2 ο όγκος του κυλίνδρου.

(α) Να αποδείξετε ότι $V_1 \neq V_2$.

(β) Να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό k για τον οποίο ισχύει $V_1 = kV_2$. Για τον παραπάνω k, να κατασκευάσετε τη γωνία υπό την οποία φαίνεται μία διάμετρος της βάσης του κώνου από την κορυφή του κώνου.

Λύση



Σχήμα 9

Έστω $ΑΔ = υ$ ο άξονας του κώνου, $ΔΒ = ΔΓ = r$ η ακτίνα της βάσης του και ρ η ακτίνα της εγγεγραμμένης σφαίρας κέντρου Ο στον κώνο. Στο σχήμα φαίνεται μία τομή του σχήματος κώνος - σφαίρα με κατακόρυφο επίπεδο, όπου οι ΓΔ, ΓΑ είναι εφαπτόμενες του κύκλου (O,ρ), οπότε η ΓΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{ΔΓΑ}$ και έστω ότι $\hat{ΔΓΟ} = \hat{ΟΓΑ} = \theta$. Τότε θα είναι

$$\rho = r\text{εφ}\theta \text{ και } υ = r\text{εφ}2\theta .$$

Επιπλέον θα έχουμε

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 υ = \frac{1}{3}\pi r^3 \text{εφ}2\theta = \frac{2\pi r^3 \text{εφ}\theta}{3\left(1-\text{εφ}^2\theta\right)}$$

$$V_2 = \pi\rho^2 \cdot 2\rho = 2\pi r^3 \text{εφ}^3\theta, \quad \text{και} \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3\text{εφ}^2\theta\left(1-\text{εφ}^2\theta\right)} = k \,.(1)$$

(α) Αρκεί να δείξουμε ότι είναι $k \neq 1$.

Η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη προς την εξίσωση

$$εφ^4θ - εφ^2θ + \frac{1}{3k} = 0, \quad (2)$$

με επιλύουσα εξίσωση

$$y^2 - y + \frac{1}{3k} = 0, \text{ αν } y = εφ^2θ, \quad (3)$$

η οποία έχει διακρίνουσα $Δ = 1 - \frac{4}{3k} \geq 0$. Είναι $Δ \geq 0 \Leftrightarrow k \geq \frac{4}{3}$, οπότε θα είναι $k \neq 1$.

(β) Σύμφωνα με το ερώτημα (α) η ελάχιστη τιμή του k για την οποία ισχύει $V_1 = kV_2$, δηλαδή η $εφ^2θ$ είναι πραγματικός αριθμός, είναι η $k = \frac{4}{3}$, οπότε είναι $εφ^2θ = \frac{1}{2}$ και $εφθ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, αφού $0 < θ < 90°$. Επομένως έχουμε

$$εφ2θ = \frac{2εφθ}{1 - εφ^2θ} = 2\sqrt{2} = \frac{υ}{r}.$$

Έτσι για την κατασκευή της γωνίας $Δ\hat{Γ}Α = 2θ$, κατασκευάζουμε τετράγωνο πλευράς r, οπότε η διαγώνιος του τετραγώνου είναι το μισό του ύψους του κώνου. Στη συνέχεια το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ κατασκευάζεται γιατί είναι γνωστές οι δύο κάθετες πλευρές του. Η γωνία που ζητάμε είναι διπλάσια της γωνίας $Δ\hat{Γ}Α$.

Παρατήρηση:

Για το ερώτημα (α) θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την ανίσωση $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, με $x = εφ^2θ$ και $y = 1 - εφ^2θ$, για να δείξουμε ότι $εφθ^2\left(1 - εφ^2θ\right) \leq \frac{1}{4}$, οπότε από την (2) προκύπτει ότι $k \geq \frac{4}{3}$, με την ισότητα να ισχύει για $x = y$, δηλαδή όταν $εφ^2θ = \frac{1}{2}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις a και c και ύψος h.

(α) Στον άξονα συμμετρίας του τραπεζίου, να βρείτε όλα τα σημεία P από τα οποία οι μη παράλληλες πλευρές του φαίνονται υπό ορθή γωνία.

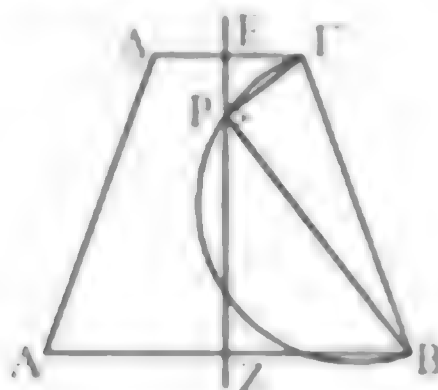
(β) Να υπολογίσετε την απόσταση του P από καθεμία βάση του τραπε-

ζίου.

(γ) **Να προσδιορίσετε κάτω από ποιες συνθήκες το σημείο P υπάρχει.**

Λύση

(α) Έστω ΕΖ ο άξονας του ισοσκελούς τραπεζίου και σημείο P πάνω στην ΕΖ τέτοιο ώστε $\widehat{BP\Gamma} = 90^\circ$. Το σημείο P προκύπτει ως τομή του κύκλου διαμέτρου ΒΓ με τον άξονα ΕΖ.



Σχήμα 10

(β) Επειδή τα ορθογώνια τρίγωνα PEΓ και PBZ είναι όμοια (αφού έχουν τις ομόλογες πλευρές κάθετες), θα έχουμε ότι

$$\frac{PE}{BZ} = \frac{E\Gamma}{PZ}.$$

Από τις υποθέσεις είναι $AB = c, \Gamma\Delta = a, EZ = h$, οπότε, αν θέσουμε $PE = x$, θα έχουμε

$$\frac{x}{\frac{c}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{h - x} \Leftrightarrow 4x^2 - 4hx + ac = 0,$$

οπότε θα είναι

$$x = \frac{h}{2} \pm \frac{\sqrt{h^2 - ac}}{2}, \text{ αν } h^2 - ac \geq 0.$$

Επειδή το άθροισμα των ριζών είναι h, η μία ρίζα της εξίσωσης είναι το μήκος του τμήματος PE και η άλλη είναι το μήκος του τμήματος PZ.

(γ) Αν είναι $h^2 - ac < 0$, δεν ορίζεται το σημείο P.

Αν είναι $h^2 - ac = 0$, υπάρχει ένα μόνο σημείο P, που είναι το μέσο του ΕΖ, τέτοιο ώστε $\widehat{BP\Gamma} = 90^\circ = \widehat{AP\Delta}$.

Αν είναι $h^2 - ac > 0$, υπάρχουν δύο σημεία P και P′ τέτοια ώστε $\widehat{BP\Gamma} = 90^\circ = \widehat{AP\Delta}$ και $\widehat{BP'\Gamma} = 90^\circ = \widehat{AP'\Delta}$.

$3^{η}$ Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1961.

Τόπος Διοργάνωσης:	Ουγγαρία (Veszprem)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	J. Suranyi (Παν/μιο Βουδαπέστης)
Συμμετοχή:	6 χώρες με 8 το πολύ μαθητές η καθεμία
Μέγιστη Βαθμολογία:	40 βαθμοί ανά μαθητή
Τελική Βαθμολογία:	Ουγγαρία (270), Πολωνία (203), Ρουμανία (197), Τσεχοσλοβακία (159), Α. Γερμανία (146), Βουλγαρία (108).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να λύσετε το σύστημα των εξισώσεων:

$$x+y+z=a \qquad (1)$$

$$x^2+y^2+z^2=b^2 \qquad (2)$$

$$xy=z^2 \qquad (3)$$

όπου οι a και b είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να δώσετε τη συνθήκη για τους a, b, ώστε οι x, y, z (λύση του συστήματος) να είναι θετικοί αριθμοί διάφοροι μεταξύ τους.

Λύση ($1^{ος}$ τρόπος)

Από $x+y+z=a$ έχουμε: $x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=a^2$, οπότε

$xy+yz+zx=\dfrac{a^2-b^2}{2}$ ή $z^2+yz+zx=\dfrac{a^2-b^2}{2}$ ή $z(z+y+x)=\dfrac{a^2-b^2}{2}$ ή

$z=\dfrac{a^2-b^2}{2a}$, $a\neq 0$. Τελικά έχουμε ότι

$$x+y=\frac{a^2+b^2}{2a},\ xy=\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{4a^2},\ a\neq 0,$$

οπότε οι x, y είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$t^2 - \frac{a^2+b^2}{2a}\cdot t + \frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{4a^2} = 0.$$

Η δέσμευση ότι οι x, y, z είναι θετικοί δίνει ότι $a>0$, και ότι $a^2>b^2$. Επιπλέον, η δέσμευση ότι οι x και y είναι πραγματικοί και διάφοροι μεταξύ τους, επιβάλλει την διακρίνουσα $\Delta = \frac{1}{4a^2}\left(3a^2-b^2\right)\left(3b^2-a^2\right)$ να είναι θετική. Από $3a^2-b^2>0$ έχουμε ότι $3b^2-a^2>0$, οπότε θα είναι $3b^2>a^2$. Όλες αυτές οι ανισότητες είναι ισοδύναμες προς τις:

$$|b| < a < \sqrt{3}|b|,$$

και οι ρίζες

$$x = \frac{a^2+b^2}{4a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2},\quad y = \frac{a^2+b^2}{4a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

μαζί με τον γεωμετρικό μέσο $z=\sqrt{xy}=\frac{a^2-b^2}{2a}$ δίνουν μία θετική διακεκριμένη λύση του προβλήματος (το z είναι διαφορετικό από το x και y, αφού ο γεωμετρικός μέσος δύο διαφορετικών αριθμών βρίσκεται ανάμεσά τους).

2ος τρόπος

Θεωρούμε ότι οι x, y, z είναι ρίζες της εξίσωσης

$$p^3 + s_1p^2 + s_2p + s_3 = 0 \tag{4}$$

όπου $x+y+z=-s_1$, $xy+yz+xz=s_2$, $xyz=-s_3$. Έχουμε $s_1=-a$, $\left(x+y+z\right)^2=a^2=b^2+2s_2$, $xyz=z^3=-s_3$ αντιστοίχως, οπότε είναι $s_1=-a$, $s_2=\frac{1}{2}\left(a^2-b^2\right)$, $s_3=-z^3$. Η εξίσωση (4) μπορεί να γραφεί ως:

$$p^3 - ap^2 + \frac{1}{2}\left(a^2-b^2\right)p - z^3 = 0. \tag{5}$$

Εφόσον το z είναι ρίζα, αντικαθιστούμε $p=z$ στην (5), οπότε $-az^2-\frac{1}{2}\left(a^2-b^2\right)z = -z\left[az-\frac{1}{2}\left(a^2-b^2\right)\right]=0 \Leftrightarrow z=0$ ή $z=\frac{a^2-b^2}{2a}$. Αν

$z = 0$, τότε η λύση (x, y, z) δεν θα αποτελείται από θετικούς αριθμούς, όπως απαιτείται. Αν $z = \frac{a^2 - b^2}{2a}$, τότε από την (1) έχουμε $x + y = a - z = \frac{a^2 + b^2}{2a}$ και από την (3) έχουμε $xy = \frac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2}$, και λύνουμε το σύστημα αυτό ως προς x και y με την μέθοδο που μας δίνεται στην πρώτη λύση.

Παρατήρηση

Η ανάγκη των ανισοτήτων $|b| < a < \sqrt{3}|b|$ για να είναι οι x, y, z θετικοί και διαφορετικοί μεταξύ τους, μπορεί να γίνει κατανοητή από τα παρακάτω:

i) Η απόσταση του επιπέδου $x + y + z = a$ από την αρχή $O(0,0,0)$ είναι $\frac{a}{\sqrt{3}}$, ενώ η ακτίνα της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ είναι $|b|$. Αυτές οι επιφάνειες έχουν κοινά σημεία, αν, και μόνο αν, $|b| \geq \frac{a}{\sqrt{3}}$. Αν η ισότητα ισχύει, η σφαίρα είναι εφαπτόμενη στο επίπεδο σε σημείο που θα έχει ίσες συντεταγμένες. Άρα η συνθήκη $0 < a < \sqrt{3}|b|$ είναι αναγκαία για να είναι θετικοί και διαφορετικοί ανά δύο οι x, y, z.

ii) Για τους δύο θετικούς αριθμούς x και y εφαρμόζοντας την ανισότητα $\frac{1}{2}(x + y) > \sqrt{xy}$ και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $x + y = \frac{a^2 + b^2}{2a}$ και $xy = \frac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2}$, προκύπτει ότι $\frac{a^2 + b^2}{4a} > \frac{a^2 b^2}{2a}$ όπου η ανισότητα είναι αυστηρή, αφού $x \neq y$. Επομένως θα είναι $a^2 < 3b^2$ ή αφού ο a είναι θετικός, $0 < a < \sqrt{3}|b|$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Έστω ότι a, b, c είναι οι πλευρές ενός τριγώνου, και E είναι το εμβαδόν του. Να αποδείξετε ότι $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}E$.

Σε ποια περίπτωση ισχύει η ισότητα;

Λύση (1^{ος} τρόπος)

$$a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}E,\ \text{με } E=\sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-b)(\tau-c)},\ 2\tau=a+b+c$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \ge 3\left[2\tau(2\tau-2a)(2\tau-2b)(2\tau-2c)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \ge 3(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \ge 3\left[(b+c)^2-a^2\right]\left[a^2-(b-c)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \ge 3\left(b^2+c^2+2bc-a^2\right)\left(a^2-b^2-c^2+2bc\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \ge 3\left[4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2+c^2\right)^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2 \ge 12b^2c^2-4\left(b^2+c^2-a^2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2a^2\left(2b^2+2c^2\right) \ge 12b^2c^2-4\left(b^2+c^2-a^2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 4a^2b^2+4a^2c^2+4\left(b^2+c^2-a^2\right)^2 \ge 12b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow 4a^2b^2+4a^2c^2+4\left(b^4+c^4+a^4-2b^2a^2-2c^2a^2+2b^2c^2\right) \ge 12b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2+a^2c^2+b^4+c^4+a^4-2b^2a^2-2c^2a^2+2b^2c^2 \ge 3b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2 \ge 0$$

$\Leftrightarrow \left(a^2-b^2\right)^2+\left(b^2-c^2\right)^2+\left(c^2-a^2\right)^2 \ge 0$, που είναι αληθής. Προφανώς η ισότητα ισχύει όταν $a=b=c$, δηλαδή όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

2^{ος} τρόπος

Από τα τρία ύψη του τριγώνου, τουλάχιστον ένα βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο. Σημειώνουμε το μήκος του με h και διαιρούμε την πλευρά προς την οποία είναι κάθετο σε τμήματα m και n. Τα τετράγωνα των άλλων δύο πλευρών θα είναι h^2+m^2 και h^2+n^2, και το εμβαδόν E είναι $E=\frac{1}{2}(m+n)h$. Η ανισότητα που πρέπει να αποδειχτεί παίρνει την μορφή $2h^2+m^2+n^2+(m+n)^2>2\sqrt{3}(m+n)h$, η οποία είναι ισοδύναμη προς την ανισότητα:

$$h^2-\sqrt{3}(m+n)h+n^2+m^2+mn>0 \qquad (1)$$

Το αριστερό μέλος που είναι δευτεροβάθμιο ως προς h, το ονομάζουμε $Q(h)$. Με την συμπλήρωση του τετραγώνου μπορούμε να το φέρουμε στην μορφή $Q(h)=\left[h-\frac{\sqrt{3}}{2}(m+n)\right]^2+\left[\frac{1}{2}(m-n)\right]^2$, ως άθροισμα δύο τετραγώνων. Επομένως το $Q(h)$ δεν είναι ποτέ αρνητικό, και η ανισότητα (1) επαληθεύεται για όλα τα h. Ισχύει $Q(h)=0$ αν, και μόνο αν, $m=n$ και $h=\sqrt{3}m$. Σε αυτή την περίπτωση το ύψος από το A διχοτομεί την βάση BC και έχει μήκος $\frac{\sqrt{3}}{2}BC$. Επομένως το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο, όταν $a^2+b^2+c^2=4\sqrt{3}E$.

3ος τρόπος

Σημειώνουμε την περίμετρο του τριγώνου με p, δηλαδή $p=a+b+c$. Σύμφωνα με το ισοπεριμετρικό θεώρημα των τριγώνων, μεταξύ όλων των τριγώνων με σταθερή περίμετρο, το ισόπλευρο τρίγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν. Το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά $\frac{p}{3}$ είναι $\left(\frac{p}{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ οπότε

$$E\le\left(\frac{p}{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} \tag{1}$$

Επιπλέον, με πρόσθεση κατά μέλη των ταυτοτήτων

$$p^2=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac$$

προκύπτει ότι

$$p^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=3\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Επομένως θα έχουμε

$$p^2\le 3\left(a^2+b^2+c^2\right), \tag{2}$$

και η ισότητα αληθεύει αν, και μόνο αν, $a=b=c$. Από τις (1) και (2) έπε-

ται ότι $E \le \frac{a^2+b^2+c^2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$, ή ισοδύναμα $a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}E$. Εφόσον η ισότητα στις (1) και (2) ισχύει αν, και μόνο αν, $a=b=c$, θα ισχύει το ίδιο και στην τελική ανισότητα, δηλαδή αν, και μόνο αν, το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Να λύσετε την εξίσωση $συν^n x - ημ^n x = 1$, όπου το n είναι φυσικός αριθμός.

Λύση

Εφόσον η συνάρτηση $συν^n x - ημ^n x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π, αρκεί να βρεθούν όλες οι λύσεις στο διάστημα $(-π,π]$. Όλες οι άλλες λύσεις θα βρεθούν προσθέτοντας ακέραια πολλαπλάσια του 2π σε αυτές που θα βρεθούν στο διάστημα $(-π,π]$. Πρώτα θα εξετάσουμε την περίπτωση με $n=1$. Θυμίζουμε ότι οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός $Aσυνx + Bημx$ των συνx και ημx μπορεί να γραφεί στη μορφή $C\cdot ημ(x+θ)$. Για να βρούμε τα C και θ ως προς τους A και B, χρησιμοποιούμε ότι:

$$C\cdot ημ(x+θ) = C\cdot[ημx\cdot συνθ + ημθ\cdot συνx] = [C\cdot ημθ\cdot συνx + C\cdot συνθ\cdot ημx].$$

Άρα πρέπει $A = Cημθ$, $B = Cσυνθ$, οπότε $C^2 = A^2 + B^2$, $εφθ = \frac{A}{B}$. Ειδικά, όταν $A=1$, $B=-1$, έχουμε: $συνx - ημx = \sqrt{2}ημ\left(x+\frac{3π}{4}\right)$. Άρα $συνx - ημx = 1 \Leftrightarrow ημ\left(x-\frac{3π}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x-\frac{3π}{4} = \frac{π}{4}$ ή $x = \frac{3π}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{π}{2}$ ή $x=0$.

Έπειτα θεωρούμε το n να είναι άρτιος ακέραιος, έστω $n=2m$, και γράφουμε την εξίσωση στη μορφή: $συν^{2m}x = 1 + ημ^{2m}x$. Το αριστερό μέλος ποτέ δεν υπερβαίνει το 1, ενώ το δεξιό μέλος είναι μεγαλύτερο του 1, εκτός εάν είναι $ημx = 0$, οπότε η εξίσωση αληθεύει μόνον αν $x=0$ ή π. Τελικώς, θεωρούμε το n να είναι περιττός και μεγαλύτερος από το 1, έστω $n = 2m+1$. Θέτουμε $y=-x$. Τότε

$$1 = \sigma\upsilon\nu^{2m+1}x - \eta\mu^{2m+1}x = \sigma\upsilon\nu^{2m+1}(-y) - \eta\mu^{2m+1}(-y)$$

$$= \sigma\upsilon\nu^{2m+1}y + \eta\mu^{2m+1}y \le \left|\sigma\upsilon\nu^{2m+1}y\right| + \left|\eta\mu^{2m+1}y\right|$$

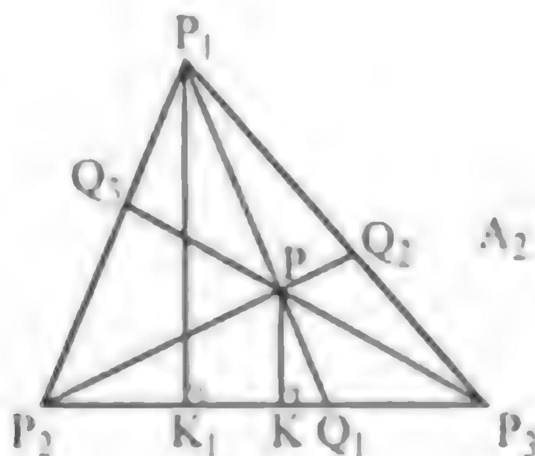
$$= \sigma\upsilon\nu^{2}y\left|\sigma\upsilon\nu^{2m-1}y\right| + \eta\mu^{2}y\left|\eta\mu^{2m-1}y\right| \le \sigma\upsilon\nu^{2}y + \eta\mu^{2}y = 1.$$

Η ισότητα ισχύει στην τρίτη σειρά αν, και μόνο αν, $\sigma\upsilon\nu y > 0$ και $\eta\mu y > 0$, ενώ η ισότητα ισχύει στην τελευταία σειρά αν, και μόνο αν, $|\eta\mu y| = 1$ ή $|\sigma\upsilon\nu y| = 1$. Άρα θα έχουμε $\eta\mu y = 1$ και $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu y = 1$ και $x = 2\kappa\pi$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Θεωρούμε τρίγωνο $P_1P_2P_3$ και σημείο P εντός του τριγώνου. Οι ευθείες P_1P, P_2P, P_3P τέμνουν τις απέναντι πλευρές στα σημεία Q_1, Q_2, Q_3 αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι από τους αριθμούς $\frac{P_1P}{PQ_1}$, $\frac{P_2P}{PQ_2}$, $\frac{P_3P}{PQ_3}$ τουλάχιστον ένας είναι μικρότερος ή ίσος του 2 και τουλάχιστον ένας είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 2.

Λύση



Σχήμα 11

Θέτουμε $A = E_{(PP_2P_3)}$, $B = E_{(PP_1P_3)}$, $C = E_{(PP_1P_2)}$. Τότε $A + B + C = E_{(P_1P_2P_3)}$, αφού το P είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου $P_1P_2P_3$. Τα τρίγωνα PP_2P_3

και $P_1P_2P_3$ έχουν την ίδια βάση P_2P_3, και τα ύψη τους έχουν λόγο $PQ_1 : P_1Q_1$. Άρα και τα εμβαδά τους θα έχουν τον ίδιο λόγο, δηλαδή $\frac{PQ_1}{P_1Q_1} = \frac{A}{A+B+C}$. Ομοίως έχουμε $\frac{PQ_2}{P_2Q_2} = \frac{B}{A+B+C}$ και $\frac{PQ_3}{P_3Q_3} = \frac{C}{A+B+C}$.

Άρα $\frac{PQ_1}{P_1Q_1} + \frac{PQ_2}{P_2Q_2} + \frac{PQ_3}{P_3Q_3} = 1$, που συνεπάγεται ότι τουλάχιστον ένας από τους λόγους $\frac{PQ_i}{P_iQ_i}$ είναι $\le \frac{1}{3}$ και ένας είναι $\ge \frac{1}{3}$. Αυτό είναι ισοδύναμο προς τις ζητούμενες ανισότητες $\frac{PQ_i}{P_iQ_i} \le \frac{1}{3}$ αν, και μόνο αν, $\frac{P_iQ_i}{PQ_i} = \frac{P_iP + PQ_i}{PQ_i} = \frac{P_iP}{PQ_i} + 1 \ge 3$, και αυτό ισχύει αν, και μόνο αν, $\frac{P_iP}{PQ_i} \ge 2$.

Ομοίως $\frac{PQ_i}{P_iQ_i} \ge \frac{1}{3}$ αν, και μόνο αν, $\frac{P_iP}{PQ_i} \le 2$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

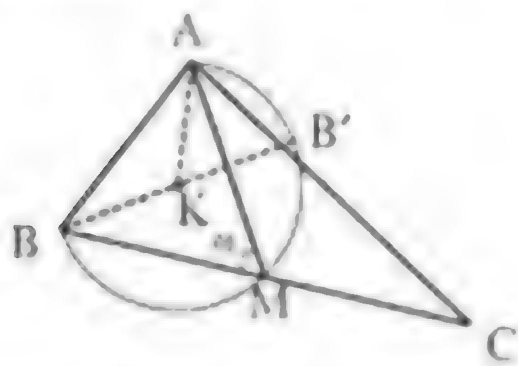
Να κατασκευάσετε τρίγωνο ABC, αν $AC = b$, $AB = c$ και $\hat{AMB} = \omega$, όπου M είναι το μέσο του τμήματος BC και $\omega < 90°$. Να αποδείξετε ότι η κατασκευή είναι δυνατή αν, και μόνο αν, $b \cdot \varepsilon\varphi \frac{\omega}{2} \le c < b$.

Σε ποια περίπτωση ισχύει η ισότητα;

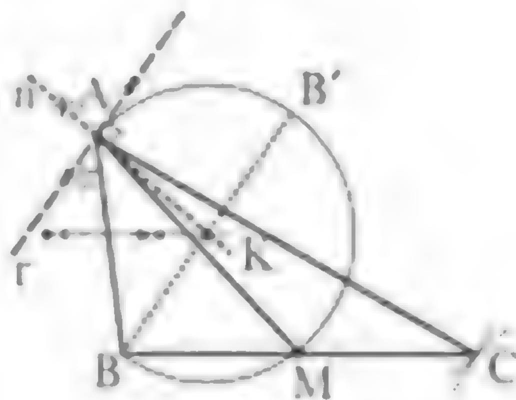
Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Ανάλυσης - Σύνθεσης

Ανάλυση



Σχήμα 12(i)



Σχήμα 12(ii)

Έστω ότι το τρίγωνο ABC έχει κατασκευαστεί. Αφού $\hat{AMB} = \omega$ δεδομένη, το M θα κινείται σε σταθερό τόξο σταθερού κύκλου κέντρου K, ώστε $\hat{AKB} = 2\omega$. Αν B′ το συμμετρικό του B ως προς K, τότε $B'C = 2KM = 2R$, όπου R η ακτίνα του εν λόγω κύκλου. Άρα το c προσδιορίζεται ως τομή των δύο σταθερών κύκλων $(B', 2R)$ και (A, b).

Σύνθεση

Στο άκρο A του $AB = c$ θεωρώ ημιευθεία Ar έτσι ώστε $\hat{BAr} = \omega$. Έστω K η τομή της An καθέτου προς την Ar και της μεσοκαθέτου του AB. Τότε $\hat{AKB} = 2\omega$. Έστω $AK = KB = R$. Θεωρώ B′ το συμμετρικό της B ως προς K. Με κέντρο το B′ και ακτίνα 2R γράφουμε κύκλο και με κέντρο το A και ακτίνα b γράφουμε κύκλο. Αν οι δύο κύκλοι τέμνονται σε κάποιο σημείο, έστω C, το $\overset{\Delta}{ABC}$ είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη

Αν M η τομή της BC με τον κύκλο (K, R) έχουμε $\hat{AMB} = \frac{2\omega}{2} = \omega$ και αν θεωρήσουμε την $KM' \parallel B'C$, M′ σημείο της BC διάφορο του B, τότε $KM' = \frac{2R}{2} = R$, οπότε το M′ ταυτίζεται με το M και επειδή το M′ είναι μέσο της BC και το M θα είναι μέσο του BC. Τέλος $AC = b$ ως ακτίνα του κύκλου (A, b)

Διερεύνηση

Από τα τρίγωνα AMB, AMC που έχουν την AM κοινή, $MB = MC = \frac{\alpha}{2}$, και $\hat{AMB} = \omega < 90^\circ < 180^\circ - \omega < \hat{AMC}$, προκύπτει ότι $b > c$.

Οι κύκλοι $(B', 2R)$ και (A, b) τέμνονται ή εφάπτονται, αν ισχύουν:

$$|b - 2R| \leq AB' \leq b + 2R,$$

όπου $\frac{c}{AB'} = \text{εφ}\omega$ και $\frac{c}{2R} = \text{ημ}\omega$, ή ισοδύναμα αν

$$\left|b-\frac{c}{\eta\mu\omega}\right|\le\frac{c}{\varepsilon\varphi\omega}\le b+\frac{c}{\eta\mu\omega}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{c}{\varepsilon\varphi\omega}\le b-\frac{c}{\eta\mu\omega}\le\frac{c}{\varepsilon\varphi\omega} \text{ και } \frac{c}{\varepsilon\varphi\omega}\le b+\frac{c}{\eta\mu\omega}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{\eta\mu\omega}-\frac{c}{\varepsilon\varphi\omega}\le b\le\frac{c}{\varepsilon\varphi\omega}+\frac{c}{\eta\mu\omega} \text{ και } \frac{c}{\varepsilon\varphi\omega}-\frac{c}{\eta\mu\omega}\le b$$

$$\Leftrightarrow \frac{c(1-\sigma\upsilon\nu\omega)}{\eta\mu\omega}\le b\le\frac{c(1+\sigma\upsilon\nu\omega)}{\eta\mu\omega} \text{ και } \frac{c(\sigma\upsilon\nu\omega-1)}{\eta\mu\omega}\le b$$

$$\Leftrightarrow c\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2}\le b\le c\sigma\varphi\frac{\omega}{2} \text{ (1) και } -c\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2}\le b \text{ (2).}$$

Η ανίσωση (2) αληθεύει, αφού από $\omega<90^\circ$, έπεται ότι $\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2}>0$. Επίσης το πρώτο μέλος της (1) αληθεύει, αφού από την $\omega<90^\circ$, έπεται ότι $0<\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2}<1$ και $c\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2}<c<b$. Επομένως η (1) αληθεύει αν, και μόνο αν, $b\le c\cdot\sigma\varphi\frac{\omega}{2}\Leftrightarrow c\ge b\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2}$. Έτσι από τα παραπάνω έχουμε ότι η κατασκευή του τριγώνου είναι δυνατή, όταν

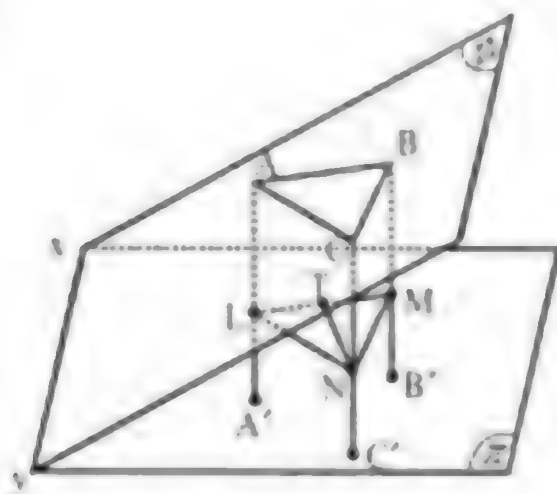
$$b\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2}\le c<b.$$

Όταν ισχύει η ισότητα $c=b\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2}$, οι κύκλοι $(B',2R)$ και (A,b) εφάπτονται εσωτερικά, οπότε έχουμε μία λύση. Τότε το B΄ βρίσκεται πάνω στην πλευρά AC και το τρίγωνο ABC είναι ορθογώνιο στο A.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Θεωρούμε ένα επίπεδο π και τρία μη συγγραμμικά σημεία A, B, C προς το ίδιο μέρος του π, τέτοια ώστε το επίπεδο που ορίζουν τα A, B, C δεν είναι παράλληλο προς το π. Πάνω στο επίπεδο θεωρήστε τρία συμβατικά σημεία A΄, B΄, C΄ ώστε τα μέσα L, M, N των AA΄, BB΄, CC΄ αντίστοιχα να σχηματίζουν τρίγωνο. Έστω G το κέντρο βάρους του τριγώνου LMN. Ποιος ο γεωμετρικός τόπος του σημείου G κατά την κίνηση των A΄, B΄, C΄ πάνω στο επίπεδο π;

Λύση (1ος τρόπος)



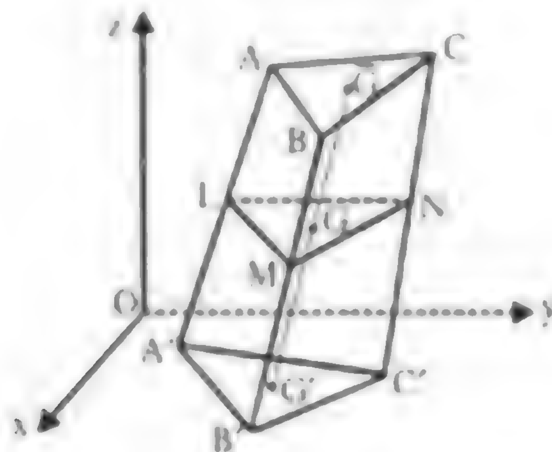
Σχήμα 13

Έστω xy η τομή των επιπέδων η και π, η το επίπεδο το οριζόμενο από τα σημεία A, B, C. Από υπόθεση τα σημεία A, B, C είναι μη συνευθειακά, οπότε τουλάχιστον μία από τις ευθείες AB, BC, AC θα είναι μη παράλληλη προς την xy, έστω η AB. Θεωρούμε τις αποστάσεις AA_1, BB_1, CC_1 των A, B, C από το επίπεδο π και S_1, S_2, S_3 τα αντίστοιχα μέσα τους. Ο γεωμετρικός τόπος του L θα είναι το παράλληλο επίπεδο π_1 προς το π, από το S_1, του M το παράλληλο επίπεδο π_2 προς το π, από το S_2, του N το παράλληλο επίπεδο π_3 προς το π, από το S_3. Τότε το μέσο του LM το T θα κινείται στο μεσοπαράλληλο επίπεδο θ των π_1, π_2 που θα είναι και ο γεωμετρικός τόπος. Αν αυτό ταυτίζεται με το π_3 ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι το επίπεδο π_3. Αν δεν ταυτίζεται με το π_3 τότε ο γεωμετρικός τόπος θα είναι το επίπεδο που είναι παράλληλο προς το επίπεδο θ, άρα και προς το π_3 από ένα σημείο της ευθείας DD_1, έστω E με $\frac{DE}{D_1E}=\frac{1}{2}$, όπου είναι να D σημείο του θ και D_1 είναι σημείου του π_3, αφού $\frac{GT}{GN}=\frac{1}{2}$.

2ος τρόπος

Ορίζουμε το ε να είναι το επίπεδο $z=0$ ενός τρισδιάστατου καρτεσιανού συστήματος, και ορίζουμε τα σημεία A, B, C να είναι στον ανώτερο ημιεπιπεδικό χώρο $z>0$. Ορίζουμε το άθροισμα των δύο σημείων $X=(x_1, x_2, x_3)$ και $Y=(y_1, y_2, y_3)$ να είναι το σημείο

$X+Y=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$. Τότε είναι εύκολο να φανεί ότι το μέσο του τμήματος XY είναι $\frac{X+Y}{2}$ και το κέντρο βάρους του $\overset{\Delta}{XYZ}$ είναι το $\frac{X+Y+Z}{3}$. Τα μέσα L, M, N των τμημάτων AA΄, BB΄, CC΄, αντιστοίχως, είναι $L=\frac{1}{2}(A+A')$, $M=\frac{1}{2}(B+B')$, $N=\frac{1}{2}(C+C')$, οπότε το κέντρο βάρους G του $\overset{\Delta}{LMN}$ είναι: $G=\frac{1}{3}(L+M+N)=\frac{1}{4}(A+A'+B+B'+C+C')=$ $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(A+B+C)+\frac{1}{3}(A'+B'+C')\right]=\frac{1}{2}(\bar{G}+G')$, όπου το $\bar{G}$ είναι το κέντρο του δοσμένου τριγώνου ABC, και το G΄ είναι το κέντρο του μεταβλητού τριγώνου A΄B΄C΄ στο επίπεδο $z=0$. Άρα ο τόπος του G είναι το επίπεδο $z=\frac{1}{6}(a_3+b_3+c_3)$, παράλληλο προς το $z=0$ και το μισό τη απόστασης από το $\bar{G}$ προς το επίπεδο $z=0$ (εδώ τα a_3,b_3,c_3 είναι οι z-συντεταγμένες του A, B, C).



Σχήμα 14



4^{η} Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1962.

Τόπος Διοργάνωσης:	Τσεχοσλοβακία (Ceske Budejovice)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	J. Novak (Ακ. Επιστ. Πράγας)
Συμμετοχή:	7 χώρες με 8 το πολύ μαθητές η καθεμία.
Μέγιστη Βαθμολογία:	46 βαθμοί ανά μαθητή
Τελική Βαθμολογία:	Ουγγαρία (289), Σοβ. Ένωση (263), Ρουμανία (257), Τσεχοσλοβακία (212), Πολωνία (212), Βουλγαρία (196), Αν. Γερμανία (153).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να βρείτε τον ελάχιστο φυσικό αριθμό του οποίου το τελευταίο ψηφίο είναι το 6 και αν μετακινήσουμε το τελευταίο 6 στην αρχή ο αριθμός που προκύπτει είναι τετραπλάσιος του αρχικού.

Λύση

Έστω ο αριθμός έχει $\kappa+1$ ψηφία και είναι ο

$\overline{\nu_\kappa \nu_{\kappa-1}\cdots\nu_1 6} = \nu_\kappa\cdot 10^\kappa + \nu_{\kappa-1}\cdot 10^{\kappa-1}+\cdots+\nu_2\cdot 10^2+\nu_1\cdot 10+6 = 10\nu+6$,

όπου $\nu = \nu_\kappa\cdot 10^{\kappa-1}+\nu_{\kappa-1}\cdot 10^{\kappa-2}+\cdots+\nu_2\cdot 10+\nu_1$. Αν μεταφέρουμε το τελευταίο ψηφίο στην πρώτη θέση, τότε ο αριθμός που προκύπτει είναι ο

$$\overline{6\nu_\kappa\nu_{\kappa+1}\cdots\nu_2\nu_1} = 6\cdot 10^\kappa+\nu.$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος, θα έχουμε την εξίσωση

$$4(10\nu+6) = 6\cdot 10^\kappa+\nu \Leftrightarrow 13\nu = 2\cdot 10^\kappa-8,$$

οπότε ο ν θα είναι άρτιος, έστω $\nu = 2\mu$, και τότε

$$13\mu = 10^\kappa-4. \qquad (1)$$

Δοκιμάζοντας τιμές για το κ στην (1), διαπιστώνουμε ότι η ζητούμενη ελάχιστη τιμή είναι $\kappa = 5$, οπότε ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 153846.

Η εύρεση του κ μπορεί να γίνει και με μία διαίρεση, αν λάβουμε υπόψη μας ότι $10^{\kappa} - 4 = 9999\cdots96$, όπου τα $\kappa - 1$ πρώτα ψηφία είναι 9, οπότε με τη παρακάτω διαίρεση διαπιστώνουμε ότι τα $\kappa - 1$ πρώτα ψηφία πρέπει να είναι 4, δηλαδή $\kappa = 5$. Άρα είναι $\nu = 2\mu = 2 \cdot 7692 = 153840$, ενώ ο ζητούμενος αριθμός είναι ο $10\nu + 6 = 153840 + 6 = 153846$.

```
999........6 | 13
91           |-----
-----        | 7692
 89
 78
-----
 119
 117
-----
   26
   26
-----
    0
```

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x που ικανοποιούν την ανισότητα

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}.$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Πρέπει $3 - x \geq 0$ και $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$. Για $x \in [-1, 3]$ η δεδομένη ανίσωση γράφεται

$$\sqrt{3-x} > \frac{1}{2} + \sqrt{x+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - x > \frac{1}{4} + \sqrt{x+1} + x + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{4} - 2x > \sqrt{x+1} \geq 0$$

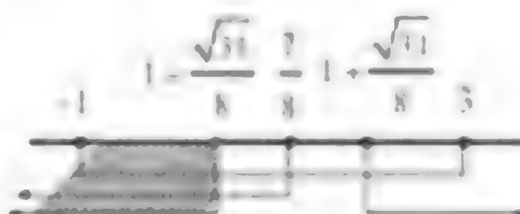
$$\Leftrightarrow \left(\frac{7}{4} - 2x\right)^2 > \left(\sqrt{x+1}\right)^2 \quad [\text{υπό τον όρο ότι: } \frac{7}{4} - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{7}{8}]$$

$$\Leftrightarrow \frac{49}{16} - 7x + 4x^2 > x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + \frac{33}{64} > 0$$

$\Leftrightarrow x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}$ ή $x > 1 + \frac{\sqrt{31}}{8}$.

Συναληθεύοντας όλες τις ανισότητες που έχουν προκύψει παραπάνω έχουμε ότι: $-1 \le x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}$.



2ος τρόπος

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$, με $-1 \le x \le 3$.

Θέτουμε $t = x+1$, $0 \le t \le 4$ οπότε η (1) γίνεται

$$\sqrt{4-t} > \frac{1}{2} + \sqrt{t} \Leftrightarrow 4 - t > \frac{1}{4} + \sqrt{t} + t \Leftrightarrow 8t + 4\sqrt{t} - 15 < 0,$$

$$(\text{με } \Delta = 16 \cdot 31) \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{t} < \frac{-1+\sqrt{31}}{4} \Leftrightarrow 0 \le t < \frac{32 - 2\sqrt{31}}{16} \Leftrightarrow$$

$$0 \le x + 1 < 2 - \frac{\sqrt{31}}{8} \Leftrightarrow -1 \le x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Θεωρούμε τον κύβο ABCDA΄B΄C΄D΄ (που οι ABCD και A΄B΄C΄D΄ είναι η πάνω και κάτω βάση αντίστοιχα, ενώ οι ακμές AA΄, BB΄, CC΄ και DD΄ είναι μεταξύ τους παράλληλες). Το σημείο X κινείται με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος της περιμέτρου του τετραγώνου ABCD κατά τη διεύθυνση ABCDA, και το σημείο Y κινείται με τον ίδιο ρυθμό κατά μήκος της περιμέτρου του τετραγώνου B΄C΄CB κατά τη διεύθυνση B΄C΄CBB΄. Τα σημεία X και Y ξεκινούν την κίνησή τους την ίδια χρονική στιγμή από τα σημεία A και B αντίστοιχα.

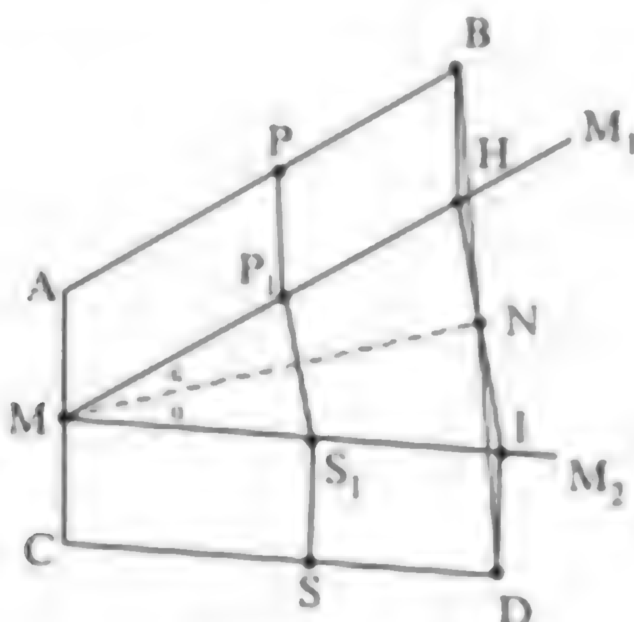
Να προσδιορίσετε και να χαράξετε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων των ευθυγράμμων τμημάτων XY.

Λύση (1ος τρόπος)

Θα αποδείξουμε καταρχήν μια βοηθητική πρόταση

Λήμμα

Δίνονται δύο ευθύγραμμα τμήματα AB, CD τέτοια ώστε $AB = CD$ και τα οποία ορίζουν ασύμβατες ευθείες. Έστω δύο σημεία που κινούνται το μεν πρώτο κατά μήκος του AB από το A στο B το δε δεύτερο κατά μήκος του CD από το C στο D με ίδιες ταχύτητες. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζονται από τα δύο αυτά σημεία.

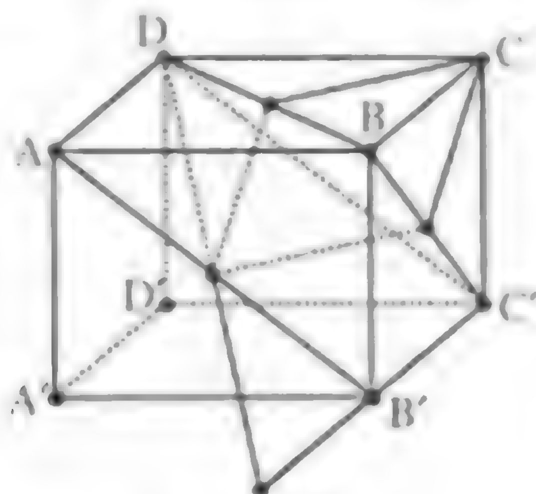


Σχήμα 15(i)

Λύση

Έστω το σημείο που κινείται στο AB ότι είναι το P ενώ το κινούμενο στο CD είναι το S. Οι ίδιες ταχύτητες σημαίνει ότι καθ' όλη την κίνηση $AP = CS$. Άρα δύο προφανή σημεία του γεωμετρικού τόπου είναι τα μέσα των AC και BD, M, N αντίστοιχα. Έστω $MM_1 \parallel AB$, $MM_2 \parallel CD$, $PP_1 \parallel AC$, $SS_1 \parallel AC$. Από τα παραλληλόγραμμα που σχηματίζονται έχουμε: $SS_1 = CM = MA = PP_1$ και $MP_1 = AP = CS = MS_1$. Άρα το PP_1SS_1 είναι παραλληλόγραμμο και επομένως ζητούμε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου του P_1S_1. Επίσης το $\overset{\Delta}{MS_1P_1}$ είναι ισοσκελές τρίγωνο, όπως και το $\overset{\Delta}{MHI}$, οι $BH \parallel AC$ και $DI \parallel AC$, με $AB = CD$ (υπόθεση). Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι το ευθύγραμμο τμήμα MN.

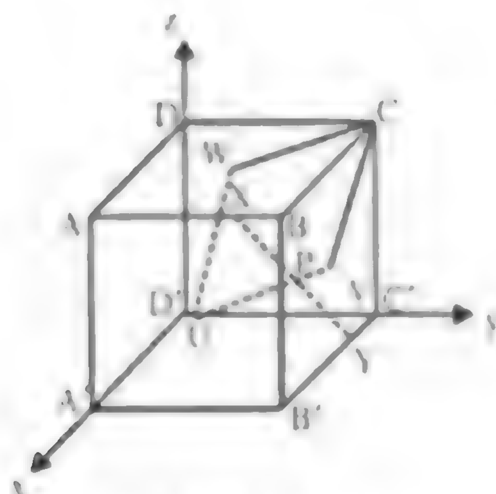
Επειδή το παραπάνω φαινόμενο είναι επαναλαμβανόμενο εύκολα βλέπουμε ότι ο γεωμετρικός τόπος είναι ο ρόμβος με μία κορυφή την C και άλλες τα κέντρα των τετραγώνων AA΄B΄B, BB΄C΄C, ABCD.



Σχήμα 15(ii)

2ος τρόπος

Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 15 (iii)

Έστω ότι το χρονικό διάστημα κατά το οποίο τα σημεία X και Y διέρχονται από τις πρώτες ακμές της διαδρομής τους είναι $0 \le t \le 1$.

Τότε οι θέσεις των X και Y σε κάθε χρονική στιγμή t $(0 \le t \le 4)$ φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

t	X	Y
$0 \le t \le 1$	$(1-t)A + tB$	$(1-t)B' + tC'$
$1 \le t \le 2$	$(2-t)B + (t-1)C$	$(2-t)C' + (t-1)C$
$2 \le t \le 3$	$(3-t)C + (t-2)D$	$(3-t)C + (t-2)B$
$3 \le t \le 4$	$(4-t)D + (t-3)A$	$(4-t)B + (t-3)B'$

Τα κεφαλαία γράμματα παριστάνουν σημεία και ταυτόχρονα διανύσματα που έχουν ως αρχή την αρχή των αξόνων και πέρας τα σημεία αυτά.

Τότε τα μέσα P των ευθυγράμμων τμημάτων XY έχουν τις ακόλουθες θέσεις:

$$P=\frac{X+Y}{2}=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[(1-t)(A+B')+t(B+C')\right] \\ \quad =(1-t)\frac{A+B'}{2}+t\frac{B+C'}{2}, & 0\le t\le 1 \\ \frac{1}{2}\left[(2-t)(B+C')+(t-2)(2C)\right] \\ \quad =(2-t)\frac{B+C'}{2}+(t-1)C, & 1\le t\le 2 \\ \frac{1}{2}\left[(3-t)2C+(t-2)(B+D)\right] \\ \quad =(3-t)C+(t-2)\frac{B+D}{2}, & 2\le t\le 3 \\ \frac{1}{2}\left[(4-t)(B+D)+(t-3)(A+B')\right] \\ \quad =(4-t)\frac{B+D}{2}+(t-3)\frac{A+B'}{2}, & 3\le t\le 4.\end{cases}$$

Οι εκφράσεις στο δεξιό μέλος δείχνουν ότι όταν το t μεταβάλλεται από 0 έως 1, το P κινείται από το μέσο του τμήματος AB΄ έως το μέσο του τμήματος BC΄, δηλαδή από το κέντρο U της έδρας ABB΄A΄ έως το κέντρο V της έδρας BCC΄B΄, και η διαδρομή του P είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα στο εσωτερικό του κύβου. Όταν το t μεταβάλλεται από 1 έως 2, τότε το P κινείται από την κορυφή C κατά μήκος μιας ευθείας. Όταν το t μεταβάλλεται από 2 έως 3, το P κινείται από το C προς το κέντρο W της έδρας ABCD, ενώ όταν το t μεταβάλλεται από 3 έως 4, τότε το P κινείται προς το αρχικό σημείο εκκίνησης κατά μήκος μιας ευθειας που ανήκει στο εσωτερικό του κύβου.

Εύκολα βλέπουμε ότι τα τμήματα που διανύει το P στο πρώτο και τρίτο χρονικό διάστημα κίνησης είναι παράλληλα, όπως και αυτά που διανύει κατά το δεύτερο και τέταρτο χρονικό διάστημα. Επιπλέον, το διάνυσμα $\overline{OP}$ κινείται με σταθερή ταχύτητα, επομένως καλύπτει την ίδια απόσταση σε κάθε χρονικό διάστημα μήκους 1. Επομένως, το P διαγράφει έναν ρόμβο

του οποίου η πλευρά ισούται με το μισό της διαγωνίου των τετράγωνων εδρών.

Συνεπώς, αν κάθε πλευρά του κύβου έχει μήκος a, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων P είναι ένας ρόμβος με πλευρά μήκους $\frac{\sqrt{2}a}{2}$, ο οποίος βρίσκεται στο επίπεδο $x+y+z=2a$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να βρεθούν όλες οι πραγματικές λύσεις της εξίσωσης

$$\textbf{συν}^2 x + \textbf{συν}^2 2x + \textbf{συν}^2 3x = 1.$$

Λύση ($1^{ος}$ τρόπος)

Έστω $c = συνx$. Τότε έχουμε $συν2x = 2c^2 - 1$, $συν3x = 4c^3 - 3c$, οπότε η εξίσωση γράφεται:

$$c^2 + (2c^2-1)^2 + (4c^3-3c)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow c^2\left(c^2 - \frac{1}{2}\right)\left(c^2 - \frac{3}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow c = 0 \text{ ή } c = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } c = \pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\Leftrightarrow x = κπ + \frac{π}{2} \quad \text{ή} \quad x = 2κπ \pm \frac{π}{4} \quad \text{ή} \quad x = 2κπ \pm \frac{3π}{4} \quad \text{ή} \quad x = 2κπ \pm \frac{π}{6} \quad \text{ή}$$

$x = 2κπ \pm \frac{5π}{6}$, $κ \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = κπ + \frac{π}{2}$ ή $x = κπ + \frac{π}{4}$ ή $x = κπ + \frac{π}{6}$, $κ \in \mathbb{Z}$, αφού κάποιες από τις προηγούμενες λύσεις συμπίπτουν.

$2^{ος}$ τρόπος

Με τη χρήση των ισοτήτων $συν^2 x = \frac{1+συν2x}{2}$, $συν^2 3x = \frac{1+συν6x}{2}$, η εξίσωση γίνεται:

$$συν2x + 2συν^2 2x + συν6x = 0$$

$$\Leftrightarrow (συν2x + συν6x) + 2συν^2 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2συν4xσυν2x + 2συν^2 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2συν2x \cdot (συν4x + συν2x) = 0$$

$\Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu 3x = 0$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0$ ή $\sigma\upsilon\nu 2x = 0$ ή $\sigma\upsilon\nu 3x = 0$

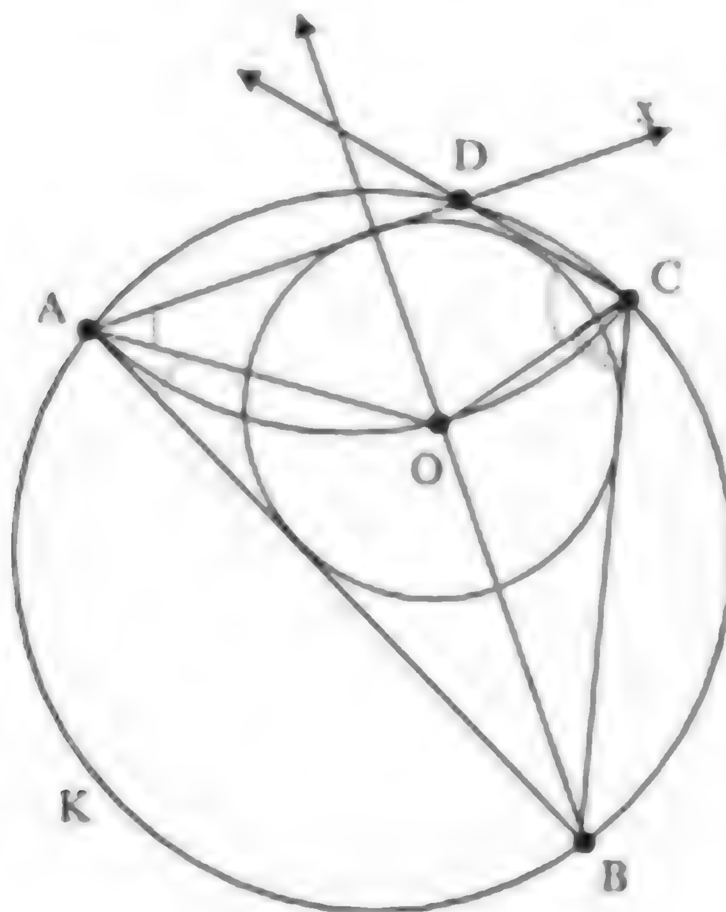
$\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ή $2x = \kappa_1\pi + \frac{\pi}{2}$ ή $3x = \kappa_2\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa, \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ή $x = \lambda\pi + \frac{\pi}{4}$ ή $x = \mu\pi + \frac{\pi}{6}$, $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Έστω A, B, C τρία διαφορετικά σημεία ενός κύκλου K. Να προσδιορίσετε ένα σημείο D του K τέτοιο ώστε ένας κύκλος να μπορεί να εγγραφεί στο εσωτερικό του ABCD.

Λύση



Σχήμα 16

Υποθέτουμε ότι έχουμε προσδιορίσει το σημείο D και έστω O είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου στο τετράπλευρο ABCD. Τότε το O είναι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{A}, \hat{B}$ και $\hat{C}$ και επιπλέον ισχύει ότι $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$. Έτσι έχουμε

$A\hat{O}C = A\hat{O}D + D\hat{O}C$

$$= O\hat{A}B + A\hat{B}O + O\hat{B}C + O\hat{C}B$$

$$= O\hat{A}B + O\hat{C}B + A\hat{B}C$$

$$= \frac{1}{2}D\hat{A}B + \frac{1}{2}D\hat{C}B + A\hat{B}C$$

$$= \frac{1}{2}\left(D\hat{A}B + D\hat{C}B\right) + A\hat{B}C$$

$$= 90^\circ + A\hat{B}C$$

Επομένως το σημείο O βρίσκεται σε τόξο $\overset{\frown}{AC}$ κύκλου χορδής AC, του οποίου τα σημεία βλέπουν τη χορδή AC υπό γωνία $90^\circ + A\hat{B}C$. Έτσι το O θα είναι το σημείο τομής του παραπάνω τόξου $\overset{\frown}{AC}$ και της διχοτόμου της γωνίας $A\hat{B}C$.

Όταν προσδιορίσουμε το O στη συνέχεια κατασκευάζουμε γωνία $B\hat{A}x = 2 \cdot O\hat{A}B$, της οποίας η πλευρά Ax τέμνει τον κύκλο K στο D.

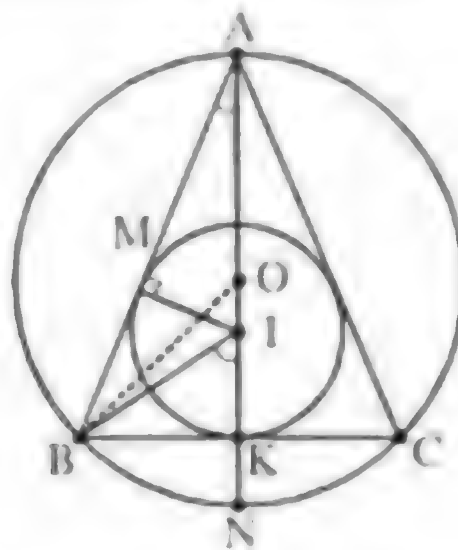
Για να αποδείξουμε ότι η κατασκευή είναι πάντα δυνατή, παρατηρούμε ότι, αν το ABCD είναι περιγράψιμο σε κύκλο, τότε $AB + CD = BC + AD$. Όμως καθώς το D πλησιάζει το C πάνω στον κύκλο έχουμε $AB + CD < BC + AD$, ενώ αν το D πλησιάζει το A, τότε $AB + CD > BC + AD$. Όμως το D μετακινείται με συνεχή τρόπο πάνω στον κύκλο, οπότε θα υπάρχει ένα σημείο τέτοιο ώστε $AB + CD = BC + AD$, οπότε το ABCD θα είναι περιγράψιμο σε κύκλο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι R ενώ του εγγεγραμμένου είναι r. Να αποδείξετε ότι η απόσταση μεταξύ των κέντρων των δύο κύκλων είναι $\sqrt{R(R-2r)}$.

Λύση (1ος τρόπος)

Αν είναι $\hat{A} < 60^\circ$, τότε το περίκεντρο O του ισοσκελούς τριγώνου ABC με $AB = AC$ βρίσκεται στο εσωτερικό του ευθυγράμμου τμήματος AI, όπου I είναι το έκκεντρο του τριγώνου (Σχήμα 17). Από τα τρίγωνα AMI και OBK (M, K σημεία επαφής) θα έχουμε



Σχήμα 17

$$r = IM = IA\eta\mu O\hat{A}M = (R+d)\eta\mu\frac{A}{2} \quad (1)$$

$$r + d = OK = OB\sigma\upsilon\nu B\hat{O}K = R\sigma\upsilon\nu A \quad (2)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\sigma\upsilon\nu A = 1 - 2\eta\mu^2\frac{A}{2}$, από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{r+d}{R} = 1 - \frac{2r^2}{(R+d)^2}$$

$$\Leftrightarrow (R+d)^2(r+d) = R(R+d)^2 - 2Rr^2$$

$$\Leftrightarrow (R^2 + 2Rd + d^2)(r + d - R) + 2Rr^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow R^2r + R^2d - R^3 + 2Rdr + 2Rd^2 - 2R^2d + d^2r + d^3 - d^2R + 2Rr^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (d + R + r)(d^2 - R^2 + 2Rr) = 0$$

$$\Leftrightarrow d^2 = R^2 - 2Rr, \ [\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ d + R + r > 0]$$

$$\Leftrightarrow d = \sqrt{R(R-2r)}.$$

Οι σχέσεις (1) και (2) αληθεύουν για όλες τις σχετικές θέσεις των σημείων O, I, A, B, C, οπότε η παραπάνω λύση μπορεί να εφαρμοστεί και για τις περιπτώσεις που είναι $60° \le \hat{A} \le 90°$ και $90° < \hat{A} \le 180°$

2^ος τρόπος

Υποθέτουμε πάλι ότι $\hat{A} < 60°$ και ότι η AI τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο N (Σχήμα 17).

Τότε θα έχουμε

$$B\hat{I}N = I\hat{A}B + I\hat{B}A = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2}.$$

[AI, BI διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$, $\hat{B}$, αντιστοίχως].

Επίσης έχουμε

$$I\hat{B}N = N\hat{B}C + I\hat{B}C = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2},$$

οπότε το τρίγωνο IBN είναι ισοσκελές με $NB = IN = R - d$.

Από τα όμοια τρίγωνα AMI και ABN έχουμε

$$\frac{IM}{NB} = \frac{AI}{AN} \Leftrightarrow \frac{r}{R-d} = \frac{R+d}{2R}$$
$$\Leftrightarrow R^2 - d^2 = 2Rr$$
$$\Leftrightarrow d^2 = R^2 - 2Rr$$
$$\Leftrightarrow d = \sqrt{R(R-2r)}.$$

Ομοίως εργαζόμαστε και στις περιπτώσεις με $\hat{A} > 60°$, $\hat{A} = 60°$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7

Το τετράεδρο SABC έχει την ακόλουθη ιδιότητα: υπάρχουν πέντε σφαίρες, που η καθεμία εφάπτεται στις ακμές SA, SB, SC, BC, CA, AB ή στις προεκτάσεις τους.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράεδρο SABC είναι κανονικό.

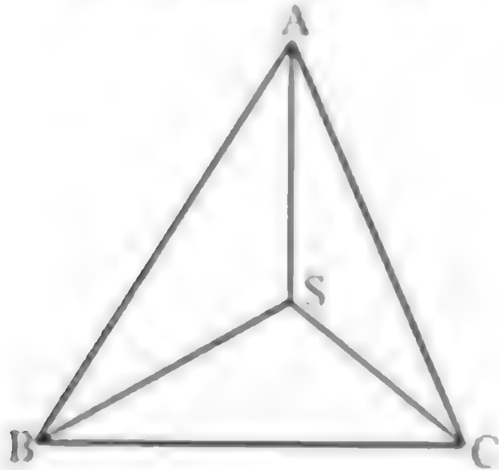
β) Να αποδείξετε αντίστροφα ότι σε κάθε κανονικό τετράεδρο υπάρχουν πέντε σφαίρες με την παραπάνω ιδιότητα.

Λύση

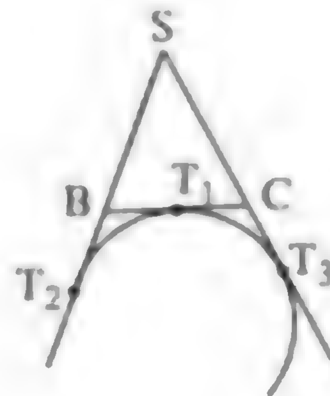
α) Μία από τις πέντε σφαίρες θα εφάπτεται εσωτερικά και με τις έξι ακμές, ενώ οι άλλες τέσσερις σφαίρες εφάπτονται στις ακμές μίας έδρας εσωτερικά και στις ακμές της απέναντι έδρας εξωτερικά.

Ας θεωρήσουμε αρχικά την «εσωτερική» σφαίρα Σ_0. Αφού οι εφαπτόμενες σε αυτή από κάθε έδρα του τετραέδρου είναι ίσες, προκύπτει ότι (βλ. σχήμα 18(i))

$$SA + BC = SB + CA = SC + AB = x + y + z + w .$$



Σχήμα 18(i)



Σχήμα 18(ii)

Ας θεωρήσουμε κατόπιν μία από τις «εξωτερικές» σφαίρες, έστω αυτή που εφάπτεται εσωτερικά στις ακμές BC, CA, AB και εξωτερικά στις SA, SB, SC. Έστω T_1, T_2, T_3 τα σημεία επαφής στις προεκτάσεις των SA, SB, SC και U_1, U_2, U_3 τα σημεία επαφής στις BC, CA, AB (βλ. σχήμα 18(ii)). Τότε

$$ST_1 = ST_2 = ST_3 .$$

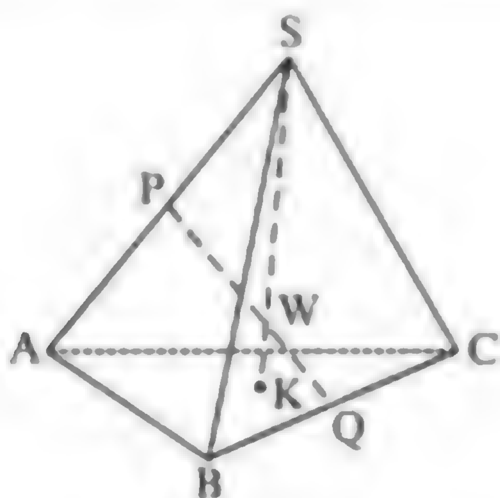
Αφού $BU_1 = BT_2$ και $CU_1 = CT_3$, η περίμετρος του τριγώνου SBC είναι:

$$SB + BU_1 + CU_1 + SC = ST_2 + ST_3 = 2ST_1 .$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι τα τρία τρίγωνα SBC, SCA, SAB έχουν την ίδια περίμετρο $2ST_1$.

Αφού τα τρίγωνα SBC και SCA έχουν την ίδια περίμετρο και κοινή πλευρά SC, ισχύει ότι $SB + BC = SA + CA$. Από τη σχέση (1) έχουμε επίσης ότι $SB - BC = SA - CA$. Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις αυτές, προκύπτει ότι $SB = SA$. Όμοια έχουμε ότι $SC = SA$. Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $AB = BC = CA$.

Έως τώρα χρησιμοποιήσαμε την Σ_0 και μία άλλη σφαίρα για να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο και ότι οι τρεις άλλες έδρες του SABC είναι ισοσκελή τρίγωνα. Χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε από τις άλλες τέσσερις σφαίρες, η ισότητα μεταφέρεται σε όλες τις έδρες του τετραέδρου.



Σχήμα 19

β) Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι το τετράεδρο T = SABC είναι κανονικό και W είναι το κέντρο μάζας του τετραέδρου.
Προφανώς, το W παραμένει αμετάβλητο ως προς κάθε στροφή που ταυτίζει το T με τον εαυτό του. Αφού υπάρχουν στροφές που μεταφέρουν κάθε ακμή του T σε μία άλλη ακμή του, συνεπάγεται ότι το W ισαπέχει από τις έξι ακμές. Επομένως, υπάρχει σφαίρα με κέντρο το W που εφάπτεται σε όλες τις ακμές.
Όμως το T παραμένει αναλλοίωτο ως προς στροφή 120° γύρω από το SW. Επομένως κάθε σφαίρα Σ με κέντρο που ανήκει στην προέκταση του SW και εφάπτεται στην ακμή SA, θα εφάπτεται και στις SB και SC. Όμοια, αν η σφαίρα Σ εφάπτεται στην AB, τότε θα εφάπτεται επίσης στις BC και CA. Επομένως, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία εξωτερική σφαίρα, βρίσκοντας ένα σημείο X στην προέκταση της SW, που να ισαπέχει από τις SA και AB. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τις SA και AB αποτελείται από δύο επίπεδα κάθετα στο τρίγωνο SAB που διέρχονται από τις διχοτόμους της γωνίας $S\hat{A}B$. Το επίπεδο που περιέχει την εσωτερική διχοτόμο της $S\hat{A}B$ διέρχεται από το W, ενώ το άλλο επίπεδο τέμνει την προέκταση της SW στο ζητούμενο σημείο X. Η κατασκευή των υπόλοιπων τριών σφαιρών είναι τελείως ανάλογη.

5η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1963.

Τόπος Διοργάνωσης:	Πολωνία (Βαρσοβία)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	St. Straszewicz (Παν. Βαρσοβίας)
Συμμετοχή:	8 χώρες με 8 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες συμμετοχές:	Γιουγκοσλαβία
Μέγιστη Βαθμολογία:	40 βαθμοί ανά μαθητή
Τελική Βαθμολογία:	Σοβ. Ένωση (271), Ουγγαρία (234), Ρουμανία (191), Γιουγκοσλαβία (161), Τσεχοσλοβακία (151), Βουλγαρία (145), Ανατ. Γερμανία (140), Πολωνία (134).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Βρείτε όλες τις πραγματικές ρίζες της εξίσωσης

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x, \qquad (1)$$

όπου p είναι μία πραγματική παράμετρος.

Λύση

Αν είναι $p < 0$, θα έχουμε

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} \ge \sqrt{x^2 - p} > x,$$

οπότε η (1) δεν αληθεύει. Άρα πρέπει να είναι $p \ge 0$.

Για $p \ge 0$ η (1) γράφεται στη μορφή

$$2\sqrt{x^2 - 1} = x - \sqrt{x^2 - p} \ge 0, \qquad (2)$$

οπότε υψώνοντας στο τετράγωνο και τα δύο μέλη λαμβάνουμε την εξίσωση

$$2x^2 + p - 4 = -2x\sqrt{x^2 - p}, \qquad (3)$$

της οποίας τετραγωνίζουμε τα δύο μέλη, οπότε λαμβάνουμε τελικά

$$8(2-p)x^2=(p-4)^2 \tag{4}$$

Για $0 \le p < 2$ η (4) έχει τη λύση

$$x=\frac{|p-4|}{\sqrt{8(2-p)}}=\frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}}.$$

Με αντικατάσταση του x στην αρχική εξίσωση, την οποία γράφουμε στη μορφή

$$\sqrt{8(2-p)}\cdot 2\sqrt{x^2-1}=x\sqrt{8(2-p)}-\sqrt{8(2-p)}\cdot\sqrt{x^2-p}$$

λαμβάνουμε τελικά

$$|3p-4|+2p=4-p$$

$$|3p-4|=-(3p-4),$$

η οποία αληθεύει όταν $3p-4\le 0$ ή $p\le\frac{4}{3}$.

Άρα η εξίσωση (1) έχει λύση, μόνο όταν είναι $0\le p\le\frac{4}{3}$ και η λύση αυτή είναι η $x=\frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται σημείο A και ευθύγραμμο τμήμα BC. Να προσδιορίσετε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του χώρου τα οποία είναι κορυφές ορθών γωνιών με μία πλευρά που περνάει από το A και η άλλη τους πλευρά τέμνει το τμήμα BC.

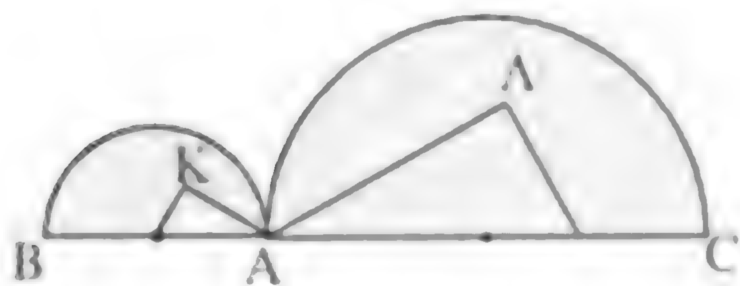
Λύση

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις σχετικά με την θέση του σημείου A ως προς το ευθύγραμμο τμήμα BC.

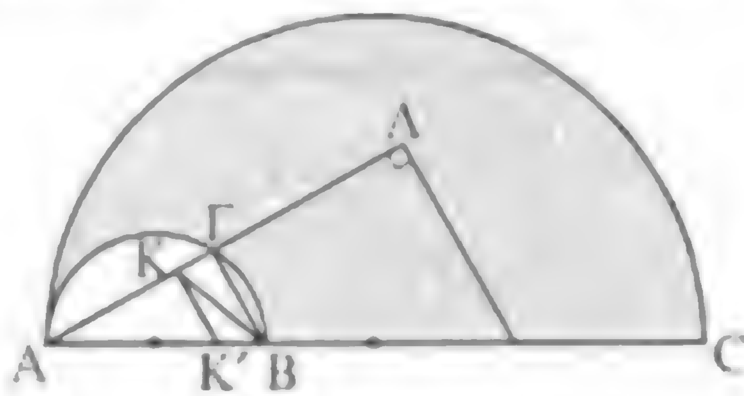
(i) Αν το $A\in BC$, τότε όλα τα σημεία που είναι εσωτερικά και πάνω στη σφαίρα S_1 διαμέτρου AB είναι σημεία του γεωμετρικού τόπου. Το ίδιο ισχύει και για τα σημεία της σφαίρας S_2 διαμέτρου AC. Αν $A\equiv B$ ή $A\equiv C$, τότε η μία από τις παραπάνω σφαίρες εκφυλίζεται σε σημείο.

(ii) Αν το A ανήκει στην ευθεία BC, εξωτερικά του ευθυγράμμου τμήματος BC, έστω προς το μέρος του B, τότε ο γεωμετρικός τόπος είναι όλα τα σημεία που είναι εσωτερικά και πάνω στη σφαίρα S_2 διαμέτρου AC, ε-

κτός εκείνων που ανήκουν στο εσωτερικό της σφαίρας S_1 διαμέτρου AB.



Σχήμα 18(i)



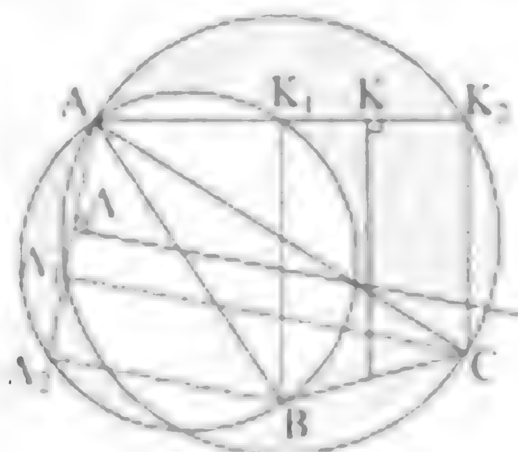
Σχήμα 18(ii)

Πράγματι, αν K ανήκει στο εσωτερικό της σφαίρας διαμέτρου AB, τότε το επίπεδο που περνάει από το K και είναι κάθετο στην AK τέμνει την ευθεία AC μεταξύ A και B, οπότε δεν τέμνει το τμήμα BC. Αυτό γιατί έχουμε

$\widehat{AKB} > \widehat{A\Gamma B} = 90^\circ = \widehat{AKK'}$.

(iii) Έστω ότι το A δεν ανήκει στην ευθεία BC.

Θεωρούμε πάλι της σφαίρα S_1 διαμέτρου AB και τη σφαίρα S_2 διαμέτρου AC.



Σχήμα 19

Κάθε σημείο $K \in S_1$ ή $K \in S_2$ είναι σημείο του τόπου, γιατί είναι

$\widehat{AKB} = 90^\circ$ ή $\widehat{AKC} = 90^\circ$.

Κάθε σημείο που είναι εσωτερικό της σφαίρας S_1 ή της σφαίρας S_2, χωρίς να είναι κοινό εσωτερικό σημείο τους, ανήκει επίσης στον γεωμετρικό τόπο. Πράγματι, αν K είναι ένα τέτοιο σημείο, τότε η AK τέμνει τις σφαίρες S_1, S_2 στα σημεία K_1, K_2 αντιστοίχως, και είναι

$\widehat{AK_1B} = 90^\circ = \widehat{AK_2C}$, οπότε το επίπεδο που περνάει από το K και είναι κάθετο στην AK θα τέμνει το τμήμα BC. Αντίθετα, κάθε σημείο Λ που είναι κοινό εσωτερικό σημείο των σφαιρών S_1 και S_2 δεν ανήκει στον γεωμετρι-

κό τόπο. Πράγματι, η $A\Lambda$ τέμνει τις σφαίρες S_1, S_2 στα σημεία Λ_1, Λ_2 αντιστοίχως, και ισχύει $A\hat{\Lambda}_1 B = 90° = A\hat{\Lambda}_2 C$. Τότε το επίπεδο που περνάει από το Λ και είναι κάθετο στην $A\Lambda$ θα τέμνει την προέκταση του ευθυγράμμου τμήματος BC.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Σε ένα ν-γωνο του οποίου όλες οι εσωτερικές γωνίες είναι ίσες, τα μήκη των διαδοχικών πλευρών του ικανοποιούν τις σχέσεις

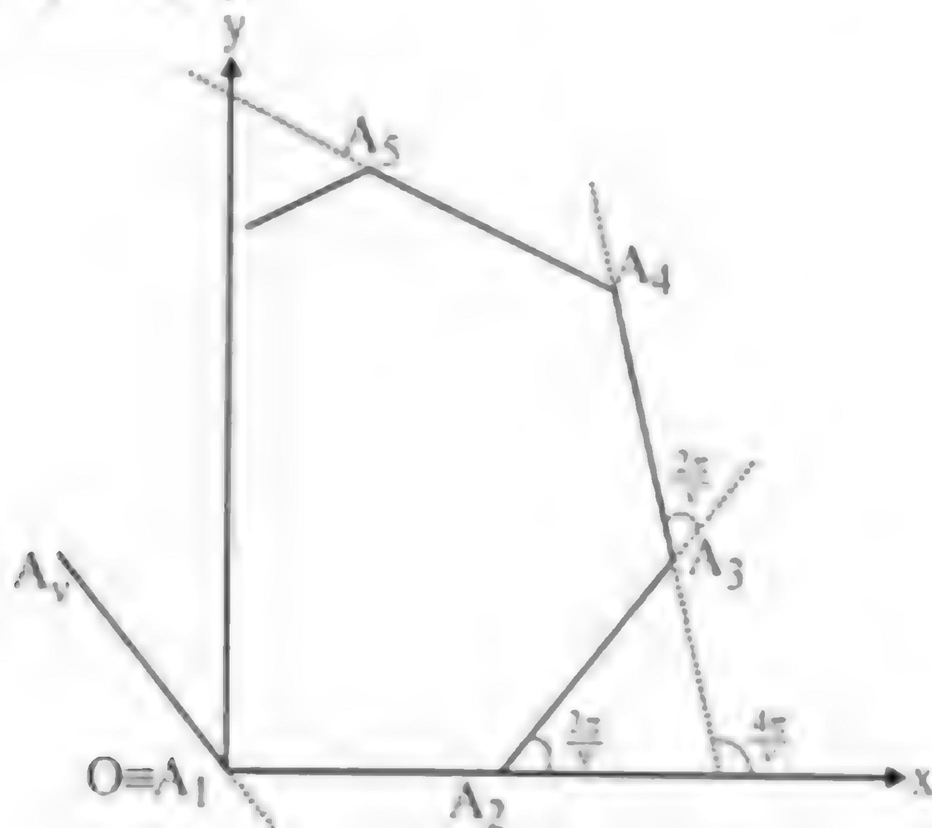
$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_\nu .$$

Να αποδείξετε ότι: $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\nu$.

Λύση

Επειδή το ν-γωνο έχει ίσες εσωτερικές γωνίες θα έχει και ίσες εξωτερικές γωνίες και κάθε μία από αυτές θα είναι $\frac{2\nu-(2\nu-4)}{\nu}$ ορθές ή $\frac{4}{\nu}$ ορθές ή $\frac{2\pi}{\nu}$ ακτίνια.

Θεωρούμε το ν-γωνο $A_1A_2 \ldots A_\nu$ στο μιγαδικό επίπεδο, έτσι ώστε η αρχή των αξόνων να συμπίπτει με την αρχή O και η πλευρά A_1A_2 να βρίσκεται πάνω στον πραγματικό άξονα. Έστω ότι είναι $\alpha_1 = A_1A_2$, $\alpha_2 = A_2A_3$, ..., $\alpha_\nu = A_\nu A_1$.



Σχήμα 20

Επειδή το ν-γωνο είναι κλειστό θα έχουμε ότι

$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\cdots+\overline{A_\nu A_1}=\vec{0},$$

ή χρησιμοποιώντας μιγαδικούς αριθμούς έχουμε

$$\alpha_1(\sigma\upsilon\nu 0+i\eta\mu 0)+\alpha_2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{\nu}+i\eta\mu\frac{2\pi}{\nu}\right)+\cdots$$
$$+\alpha_\nu\left[\sigma\upsilon\nu\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu}+i\eta\mu\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu}\right]=0, \qquad (1)$$

από την οποία προκύπτει η ισότητα

$$\alpha_2\eta\mu\frac{2\pi}{\nu}+\cdots+\alpha_\nu\eta\mu\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu}=0. \qquad (2)$$

Παρατηρούμε όμως ότι $\frac{2\pi}{\nu}+\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu}=2\pi$ και γενικότερα $\frac{2\kappa\pi}{\nu}+\frac{2(\nu-\kappa)\pi}{\nu}=2\pi$, $\kappa=1,2,\ldots$, οπότε $\eta\mu\frac{2(\nu-\kappa)\pi}{\nu}=-\eta\mu\frac{2\kappa\pi}{\nu}$, $\kappa=1,2,\ldots$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι οι όροι

$$\frac{2\cdot 1\pi}{\nu},\frac{2\cdot 2\pi}{\nu},\frac{2\cdot 3\pi}{\nu},\ldots,\frac{2\cdot(\nu-1)\pi}{\nu}, \qquad (3)$$

οπότε, για ν περιττό, το πλήθος τους είναι άρτιος αριθμός και οι όροι που απέχουν ίσες αποστάσεις από τα άκρα θα έχουν αντίθετα ημίτονα. Τότε η ισότητα (2) γίνεται

$$(\alpha_2-\alpha_\nu)\eta\mu\frac{2\pi}{\nu}+(\alpha_3-\alpha_{\nu-1})\eta\mu\frac{4\pi}{\nu}+\cdots+\left(\alpha_{\frac{\nu+1}{2}}-\alpha_{\frac{\nu+3}{2}}\right)\eta\mu\frac{(\nu-1)\pi}{\nu}=0. \quad (4)$$

Στην περίπτωση που ο ν είναι άρτιος, το πλήθος των όρων της (3) είναι περιττό, οπότε θα υπάρχουν $\frac{\nu-1}{2}$ ζεύγη και ο μεσαίος όρος

$$\alpha_{\frac{\nu+2}{2}}\eta\mu\frac{2\cdot\frac{\nu}{2}\cdot\pi}{\nu}=\alpha_{\frac{\nu+2}{2}}\eta\mu\pi=0.$$

Σε κάθε περίπτωση όλοι οι όροι της (4), λόγω των ανισοτήτων

$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_\nu$ και του ότι $\frac{2\kappa\pi}{\nu} \in (0,\pi)$ για $\kappa = 1,2,\ldots,\nu-1$, είναι μη αρνητικοί. Επειδή το άθροισμα των όρων της (4) είναι μηδέν έπεται ότι κάθε όρος της (4) θα είναι 0, δηλαδή $\alpha_2 = \alpha_\nu$, οπότε και λόγω της υπόθεσης $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_\nu$, έπεται ότι

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\nu$$

Έτσι η (1) γίνεται

$$\alpha_1 + \alpha_2\left[\left(\text{συν}\frac{2\pi}{\nu} + i\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}\right) + \cdots + \left(\text{συν}\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu} + i\text{ημ}\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu}\right)\right] = 0,$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2\left(\omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{\nu-1}\right) = 0, \qquad (5)$$

όπου $\omega = \text{συν}\frac{2\pi}{\nu} + i\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}$, $\omega^2,\ldots,\omega^{\nu-1}$ είναι $\nu-1$ από τις νιοστές της μονάδας, (μία ακόμα νιοστή ρίζα της μονάδας είναι το 1). Επειδή όπως είναι γνωστό $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{\nu-1} = 0$, από την (5) έπεται ότι $\alpha_1 + \alpha_2(-1) = 0$, δηλαδή $\alpha_1 = \alpha_2$, οπότε έχουμε τελικά $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\nu$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να βρεθούν όλες οι λύσεις $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ του συστήματος

$$\left.\begin{aligned} x_5 + x_2 &= yx_1 \quad (1)\\ x_1 + x_3 &= yx_2 \quad (2)\\ x_2 + x_4 &= yx_3 \quad (3)\\ x_3 + x_5 &= yx_4 \quad (4)\\ x_4 + x_1 &= yx_5 \quad (5)\end{aligned}\right\} \quad (\Sigma)$$

όπου y είναι παράμετρος.

Λύση

Το σύστημα είναι ομογενές γραμμικό και έχει κατ' αρχήν την μηδενική λύση $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (0,0,0,0,0)$.

Με πρόσθεση των πέντε εξισώσεων κατά μέλη λαμβάνουμε

$$(2-y)(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ y = 2 \ \text{ ή } \ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 0.$$

- Για $y = 2$, με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει ότι

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_5,$$

οπότε λόγω της (4) έχουμε

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_5 = 2x_4.$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5x_4.$$

Επειδή το σύστημα (Σ) είναι κυκλικά συμμετρικό, ομοίως μπορούν να προκύψουν και οι ισότητες

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5x_j, \quad j = 1,2,3,5,$$

οπότε τελικά έχουμε

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5,$$

και με μία απλή επαλήθευση διαπιστώνουμε ότι, για $y = 2$, λύση του (Σ) είναι κάθε πεντάδα της μορφής

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (c, c, c, c, c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

- Για $y \neq 2$, έχουμε ήδη βρει ότι $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$, και γράφουμε το σύστημα στη μορφή

$$\begin{aligned}
-yx_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 0 & (1)'\\
x_1 + -yx_2 + x_3 \qquad &= 0 & (2)'\\
x_2 - yx_3 + x_4 \qquad &= 0 & (3)'\\
x_3 - yx_4 + x_5 &= 0 & (4)'\\
x_1 \qquad\qquad + x_4 - yx_5 &= 0, & (5)'
\end{aligned}$$

από το οποίο με απαλοιφή του x_5 από τις (4)′ και (5)′ έχουμε το ισοδύναμο σύστημα (εναλλάσσουμε τις (2)′ και (3)′):

$$\begin{aligned}
-yx_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 0 & (1)''\\
x_2 - yx_3 + x_4 \qquad &= 0 & (2)''\\
x_1 - yx_2 + x_3 \qquad &= 0 & (3)''\\
yx_1 - x_2 + x_3 - yx_4 \qquad &= 0 & (4)''\\
\left(1 - y^2\right)x_1 + yx_2 \qquad + x_4 \qquad &= 0. & (5)''
\end{aligned}$$

Από το τελευταίο σύστημα με απαλοιφή του x_4 από τις (4)′′, (5)′′ λαμβάνουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$
\begin{aligned}
-yx_1 + \quad x_2 \qquad\qquad\qquad + x_5 &= 0 \qquad (1)''' \\
x_2 - \quad yx_3 + x_4 \qquad &= 0 \qquad (2)''' \\
x_1 - \quad yx_2 + \quad x_3 \qquad &= 0 \qquad (3)''' \\
yx_1 + (y-1)x_2 + \left(1-y^2\right)x_3 \qquad &= 0 \qquad (4)''' \\
\left(1-y^2\right)x_1 + (y-1)x_2 + \quad yx_3 \qquad &= 0. \qquad (5)'''
\end{aligned}
$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των δύο τελευταίων εξισώσεων βρίσκουμε την εξίσωση

$$\left(y^2+y-1\right)(x_1-x_3)=0$$

$$\Leftrightarrow\ y^2+y-1=0 \ \text{ ή } \ x_1=x_3.$$

Αν είναι $y^2+y-1=0$, τότε $y=1-y^2 \Leftrightarrow y-1=-y^2$ και οι δύο τελευταίες εξισώσεις ταυτίζονται, οπότε ως προς τις μεταβλητές x_1, x_2, x_3 έχουμε το σύστημα

$$
\begin{aligned}
x_1 - yx_2 + x_3 &= 0 \\
yx_1 - y^2x_2 + yx_3 &= 0,
\end{aligned}
$$

το οποίο επειδή είναι $y \neq 0$ είναι ισοδύναμο με την εξίσωση

$$x_1 - yx_2 + x_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_3 = yx_2 - x_1, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Από τις $(1)'''$ και $(2)''$ προκύπτει τότε ότι:

$$x_4 = yx_3 - x_2 = y(yx_2 - x_1) - x_2 = \left(y^2-1\right)x_2 - yx_1$$

$$x_5 = yx_1 - x_2,$$

οπότε τελικά έχουμε τις λύσεις

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\kappa, \lambda, y\lambda - \kappa, \left(y^2-1\right)\lambda - y\kappa, y\kappa - \lambda\right),$$

όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και y είναι οποιαδήποτε ρίζα της εξίσωσης $y^2+y-1=0$.

Αν είναι $y^2+y-1 \neq 0$, τότε $x_1 = x_3$ και οι εξισώσεις $(3)'''$, $(4)'''$, $(5)'''$ γίνονται

$$\begin{aligned} 2x_1 - \qquad yx_2 &= 0 \\ \left(1+y-y^2\right)x_1 + (y-1)x_2 &= 0, \end{aligned}$$

το οποίο έχει μόνο τη μηδενική λύση $x_1 = x_2 = 0$, λόγω του ότι είναι

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -y \\ 1+y-y^2 & y-1 \end{vmatrix} = -y^3 + y^2 + 3y - 2 = -(y-2)\left(y^2+y-1\right) \neq 0,$$

αφού $y \neq 2$. Έτσι τελικά στην περίπτωση αυτή προκύπτει η μηδενική λύση.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε τα εξής:

- Για $y \neq 2$ και $y^2 + y - 1 \neq 0$, τότε $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0,0,0,0,0)$.
- Για $y = 2$, είναι $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (c,c,c,c,c), c \in \mathbb{R}$.
- Για $y^2 + y - 1 = 0$, είναι

  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\kappa, \lambda, y\lambda - \kappa, \left(y^2-1\right)\lambda - y\kappa, y\kappa - \lambda\right)$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Να αποδείξετε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7} - \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7} + \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

Λύση (1ος τρόπος)

Επειδή είναι $\frac{2\pi}{7} + \frac{5\pi}{7} = \pi$, οπότε $\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{7} = -\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7} + \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{7} + \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

Από τη γνωστή ταυτότητα $2\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta = \eta\mu(\alpha+\beta) - \eta\mu(\alpha-\beta)$, όταν $\eta\mu\beta \neq 0$, προκύπτει ότι

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\eta\mu(\alpha+\beta) - \eta\mu(\alpha-\beta)}{2\eta\mu\beta} \qquad (1)$$

Εφαρμόζουμε την (1) διαδοχικά με $\alpha \in \left\{\frac{5}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}\right\}$ και $\beta = \frac{\pi}{7}$, οπότε λαμβάνουμε

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}=\frac{\eta\mu\frac{2\pi}{7}-\eta\mu 0}{2\eta\mu\frac{\pi}{7}},\ \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{7}=\frac{\eta\mu\frac{4\pi}{7}-\eta\mu\frac{2\pi}{7}}{2\eta\mu\frac{\pi}{7}},\ \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{7}=\frac{\eta\mu\frac{6\pi}{7}-\eta\mu\frac{4\pi}{7}}{2\eta\mu\frac{\pi}{7}},$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}+\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{7}+\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{7}=\frac{\eta\mu\frac{6\pi}{7}}{2\eta\mu\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{2}.$$

$2^{ος}$ τρόπος:

Θα χρησιμοποιήσουμε τις ρίζες της εξίσωσης $z^7-1=0$, που είναι οι

$$z_\kappa=\sigma\upsilon\nu\frac{2\kappa\pi}{7}+i\eta\mu\frac{2\kappa\pi}{7},\quad \kappa=0,1,2,3,4,5,6$$

και όπως είναι γνωστό έχουν άθροισμα 0. Επομένως το άθροισμα των πραγματικών μερών τους θα είναι 0, δηλαδή

$$1+\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7}+\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{7}+\sigma\upsilon\nu\frac{6\pi}{7}+\sigma\upsilon\nu\frac{8\pi}{7}+\sigma\upsilon\nu\frac{10\pi}{7}+\sigma\upsilon\nu\frac{12\pi}{7}=0$$

$$\Leftrightarrow 1=2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}-\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7}+\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{7}\right),\text{αφού}$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{12\pi}{7}=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7},\ \sigma\upsilon\nu\frac{6\pi}{7}=\sigma\upsilon\nu\frac{8\pi}{7}=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7},\ \sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{7}=\sigma\upsilon\nu\frac{10\pi}{7}=-\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{7}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Πέντε σπουδαστές A, B, C, D, E πήραν μέρος σε έναν διαγωνισμό. Μία πρόγνωση έλεγε ότι οι διαγωνιζόμενοι θα τελειώσουν με σειρά κατάταξης ABCDE. Η πρόγνωση αυτή ήταν πολύ φτωχή. Πράγματι, κανείς διαγωνιζόμενος δεν κατετάγη στην παραπάνω θέση και κανένα ζεύγος εκ των διαγωνιζομένων δεν τερμάτισε σε διαδοχικές θέσεις της πρόγνωσης ABCDE.

Μια δεύτερη πρόγνωση έλεγε ότι η κατάταξη θα ήταν της μορφής DAECB. Η πρόγνωση αυτή ήταν καλύτερη, γιατί ακριβώς δύο από τους διαγωνιζόμενους κατετάγησαν στις θέσεις της πρόγνωσης και δύο διαφορετικά ζεύγη διαγωνιζομένων κατετάγησαν σε διαδοχικές θέσεις, όπως έλεγε η πρόγνωση. Να βρείτε τη σειρά κατάταξης των σπουδαστών.

[Οι υποψήφιοι X, Y τελειώνουν σε διαδοχικές θέσεις, όταν στην τελική κατάταξη υπάρχει το XY, χωρίς κανέναν σπουδαστή ανάμεσά τους].

Λύση

Είναι πιο εύκολο να πάμε πρώτα στη δεύτερη πρόγνωση, όπου υπάρχουν τέσσερα διαδοχικά ζεύγη και είναι τα DA, AE, EC και CB. Επομένως οι διαφορετικές δυνατές κατατάξεις με δύο διαφορετικά διαδοχικά ζεύγη είναι οι εξής:

(i) (DA)(EC)B και ακόμα οι 6 κατατάξεις που προκύπτουν από τις μεταθέσεις των στοιχείων DA, EC, B.

(ii) (DA)(CB)E και οι 6 που προκύπτουν από τις μεταθέσεις των στοιχείων DA, CB, E.

(iii) (AE)(CB)D και οι 6 που προκύπτουν από τις μεταθέσεις των στοιχείων AE, CB.

Επειδή πρέπει μόνο δύο σπουδαστές να τελειώσουν στη θέση της πρόγνωσης, έχουμε δεκτές τις κατατάξεις:

(DA)B(CE), από την περίπτωση (i)

E(DA)(CB) και (DA)(CB)E, από την περίπτωση (ii)

(AE)D(CB), από την περίπτωση (iii).

Από τις παραπάνω κατατάξεις ικανοποιεί την πρώτη πρόγνωση μόνο η κατάταξη EDACB.



$6^η$ Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1964.

Τόπος Διοργάνωσης: Σοβιετική Ένωση (Μόσχα)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών: A.J. Markusevic (Παν/μίου Μόσχας)
Συμμετοχή: 9 χώρες με 8 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες συμμετοχές: Μογγολία
Μέγιστη Βαθμολογία: 40 βαθμοί ανά μαθητή
Τελική Βαθμολογία: Σοβ. Ένωση (269), Ουγγαρία (253), Ρουμανία (213), Πολωνία (209), Βουλγαρία (198), Αν. Γερμανία (196), Τσεχοσλοβακία (194), Μογγολία (169).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

(α) Βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους n για τους οποίους ο αριθμός $2^n - 1$ διαιρείται με το 7.

(β) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει θετικός ακέραιος n για τον οποίο ο αριθμός $2^n + 1$ να διαιρείται με το 7.

Λύση

(α) Παρατηρούμε ότι: $2^1 \equiv 2(\bmod 7)$, $2^2 \equiv 4(\bmod 7)$, $2^3 \equiv 1(\bmod 7)$. Επομένως έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν είναι $n = 3k, k \in \mathbb{N}^*$ τότε $2^n = 2^{3k} = \left(2^3\right)^k \equiv 1^k (\bmod 7) \equiv 1(\bmod 7)$, οπότε ο $2^n - 1$ διαιρείται με το 7.

- Αν είναι $n = 3k+1, k \in \mathbb{N}$ τότε $2^n = \left(2^3\right)^k \cdot 2 \equiv 2(\bmod 7)$.

- Αν είναι $n = 3k+2, k \in \mathbb{N}$ τότε $2^n = \left(2^3\right)^k \cdot 4 \equiv 4(\bmod 7)$.

Στις δύο τελευταίες περιπτώσεις ο $2^n - 1$ δεν διαιρείται με το 7.

(β) Σύμφωνα με τα παραπάνω θα έχουμε: $2^{3k} + 1 \equiv 2 \pmod 7$, $2^{3k+1} \equiv 3 \pmod 7$ και $2^{3k+2} + 1 \equiv 5 \pmod 7$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, οπότε, πράγματι, δεν υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος ώστε ο αριθμός $2^n + 1$ να διαιρείται με το 7.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Υποθέτουμε ότι a, b, c είναι πλευρές τριγώνου. Να αποδείξετε ότι

$$\mathbf{a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\le 3abc}$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Υποθέτουμε ότι είναι $0 \le a \le b \le c$, οπότε $c-a \ge b-a \ge 0$ και

$$c(c-b)(c-a) \ge b(c-b)(b-a) \ge 0$$

ή $c(c-b)(c-a) - b(c-b)(b-a) \ge 0$

ή $a(a-b)(a-c) + c(c-b)(c-a) - b(c-b)(b-a) \ge 0$

ή $a^3 + b^3 + c^2 - a^2b - a^2c - c^2b - c^2a - b^2c - b^2a + 3abc \ge 0$

ή $a^2(a-b-c) + b^2(b-c-a) + c^2(c-b-a) \ge -3abc$

ή $a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \le 3abc$.

Από την πορεία της λύσης είναι φανερό ότι η ισότητα ισχύει για $a = b = c$.

2^{ος} τρόπος

Αν θέσουμε $x = b + c - a$, $y = c + a - b$, $w = a + b - c$, τότε είναι $x > 0$, $y > 0$, $w > 0$, αφού οι a, b, c είναι πλευρές τριγώνου. Τότε θα έχουμε

$$a = \frac{y+w}{2},\ b = \frac{w+x}{2},\ c = \frac{x+y}{2}$$

και από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου προκύπτει ότι

$$\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy},\ \frac{y+w}{2} \ge \sqrt{yw},\ \frac{w+x}{2} \ge \sqrt{wx},$$

από τις οποίες με πολλαπλασιασμό κατά μέλη προκύπτει ότι

$$\frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+w}{2}\cdot\frac{w+x}{2}\geq xyw\,,$$

οπότε με αντικατάσταση των x, y, w λαμβάνουμε

$$abc\geq(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c),$$

ή ισοδύναμα μετά από πράξεις στο δεύτερο μέλος

$$abc\geq a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)-2abc$$

$$\Leftrightarrow a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq 3abc.$$

3ος τρόπος

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει

$$a^2b+a^2c-a^3+b^2c+b^2a-b^3+c^2a+c^2b-c^3\geq 3abc$$

$$\text{ή}\quad a\left(b^2+c^2-a^2\right)+b\left(c^2+a^2-b^2\right)+c\left(a^2+b^2-c^2\right)\leq 3abc\,,$$

ή χρησιμοποιώντας το νόμο των συνημιτόνων, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$2abc(\text{συν}A+\text{συν}B+\text{συν}C)\leq 3abc$$

$$\text{συν}A+\text{συν}B+\text{συν}C\leq\frac{3}{2},$$

όπου A, B, C είναι οι τρεις γωνίες του τριγώνου ABC και ισχύει $A+B+C=\pi$.

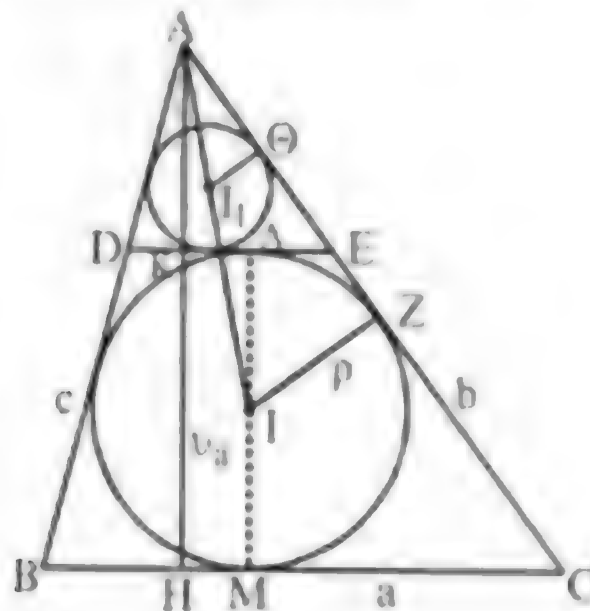
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Ένας κύκλος είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο ABC με πλευρές a, b, c. Φέρουμε εφαπτόμενες του κύκλου παράλληλες προς τις πλευρές του τριγώνου και κάθε μία από αυτές αποκόπτει ένα τρίγωνο από το τρίγωνο ABC. Σε καθένα από αυτά τα τρίγωνα θεωρούμε τον εγγεγραμμένο κύκλο του. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων εγγεγραμμένων κύκλων συναρτήσει των πλευρών a, b, c.

Λύση

Θεωρούμε ένα από τα αποκοπτόμενα τρίγωνα, έστω το τρίγωνο ADE που αποκόπτεται από την $DE\parallel BC$. Έστω $C_1(I_1,\rho_1)$ ο εγγεγραμμένος κύ-

κλος του τριγώνου ADE, $C(I,\rho)$ ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABC και $AH = \upsilon_a$ ύψος του τριγώνου ABC.



Σχήμα 23

Επειδή είναι $\overset{\Delta}{A\Delta E} \approx \overset{\Delta}{ABC}$ θα έχουμε την αναλογία

$$\frac{AK}{AH} = \frac{\rho_1}{\rho} \Leftrightarrow \frac{\upsilon_a - 2\rho}{\upsilon_a} = \frac{\rho_1}{\rho} \Leftrightarrow \frac{\rho_1}{\rho} = 1 - \frac{2\rho}{\upsilon_a} \qquad (1)$$

Από τις ισότητες $E_{(ABC)} = \frac{1}{2} a\upsilon_a$ και $E_{(ABC)} = \tau\rho$, όπου $\tau = \frac{a+b+c}{2}$ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου ABC, προκύπτει ότι

$$\upsilon_a = \frac{2\tau\rho}{a} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε

$$\frac{\rho_1}{\rho} = 1 - \frac{a}{\tau} = \frac{\tau - a}{\tau} \qquad (3)$$

Ομοίως βρίσκουμε και τις ισότητες

$$\frac{\rho_2}{\rho} = \frac{\tau - b}{\tau}, \; \frac{\rho_3}{\rho} = \frac{\tau - c}{\tau} \qquad (4)$$

όπου ρ_2, ρ_3 είναι οι ακτίνες των εγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων που αποκόπτονται από τις παράλληλες προς τις πλευρές AC, AB, αντιστοίχως.

Τετραγωνίζουμε και προσθέτουμε κατά μέλη τις ισότητες (3) και (4), ο-

πότε λαμβάνουμε

$$\frac{\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2}{\rho^2}=\frac{(\tau-a)^2+(\tau-b)^2+(\tau-c)^2}{\tau^2}$$

$$=\frac{3\tau^2-2\tau(a+b+c)+\left(a^2+b^2+c^2\right)}{\tau^2}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{\tau^2}-1$$

$$\Rightarrow \rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2+\rho^2=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)\rho^2}{\tau^2} \tag{5}$$

Από τις ισότητες $E_{(ABC)}=\sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-b)(\tau-c)}$ (τύπος του Ήρωνα) και $E_{(ABC)}=\tau\rho$ λαμβάνουμε

$$\rho^2=\frac{(\tau-a)(\tau-b)(\tau-c)}{\tau}, \tag{6}$$

οπότε από τις (5) και (6) έχουμε τελικά

$$\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2+\rho^2=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)(\tau-a)(\tau-b)(\tau-c)}{\tau^3}$$

$$\pi\left(\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2+\rho^2\right)=\frac{\pi\left(a^2+b^2+c^2\right)(\tau-a)(\tau-b)(\tau-c)}{\tau^3}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δεκαεπτά άτομα επικοινωνούν μεταξύ τους με αλληλογραφία – ο καθένας με όλους τους άλλους. Στα γράμματα συζητούνται μόνο τρία διαφορετικά θέματα. Κάθε ζεύγος ατόμων που αλληλογραφεί ασχολείται μόνο με ένα από τα τρία αυτά θέματα. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον τρία άτομα που αλληλογραφούν ανά δύο ασχολούμενοι με το ίδιο θέμα.

Λύση

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με διαδοχική εφαρμογή της αρχής της περιστεροφωλιάς. Ονομάζουμε $A_1, A_2, \ldots, A_{17}$ τα 17 άτομα και Θ_1, Θ_2, Θ_3 τα τρία θέματα της αλληλογραφίας. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο, έστω το A_1. Αυτό αλληλογραφεί με τα υπόλοιπα 16 άτομα σε τρία διαφο-

ρετικά πιθανά θέματα. Επομένως θα υπάρχουν τουλάχιστον 6 αλληλογραφίες του A_1 πάνω σε ένα θέμα, έστω το Θ_1, και μπορούμε τώρα να διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

I. Ένα τουλάχιστον άτομο από το σύνολο Σ_1 των ατόμων με τα οποία αλληλογραφεί ο A_1 στο θέμα Θ_1, αλληλογραφεί με ένα τουλάχιστον άτομο του συνόλου Σ_1 στο ίδιο θέμα Θ_1. Τότε προφανώς υπάρχουν 3 τουλάχιστον άτομα από τα 17 που αλληλογραφούν στο ίδιο θέμα.

II. Όλα τα άτομα του συνόλου Σ_1 αλληλογραφούν μεταξύ τους στα θέματα Θ_2 και Θ_3. Θεωρούμε ένα άτομο του συνόλου Σ_1, έστω το A_2. Σύμφωνα με την αρχή της περιστεροφωλιάς, το άτομο A_2 θα αλληλογραφεί με τρία τουλάχιστον από τα υπόλοιπα πέντε άτομα του συνόλου Σ_1 πάνω στο ίδιο θέμα, έστω το Θ_2. Ονομάζουμε Σ_2 το σύνολο των ατόμων με τα οποία αλληλογραφεί το άτομο A_2 στο θέμα Θ_2. Τώρα έχουμε τις εξής υποπεριπτώσεις:

(i) Αν δύο από τα άτομα του Σ_2 αλληλογραφούν μεταξύ τους πάνω στο θέμα Θ_2, τότε υπάρχουν 3 τουλάχιστον άτομα που αλληλογραφούν στο ίδιο θέμα.

(ii) Αν κανένα ζεύγος ατόμων από αυτά του Σ_2 δεν αλληλογραφεί στο θέμα Θ_2, τότε όλοι θα αλληλογραφούν μεταξύ τους στο θέμα Θ_3, οπότε πάλι θα υπάρχουν τουλάχιστον 3 άτομα που αλληλογραφούν στο ίδιο θέμα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

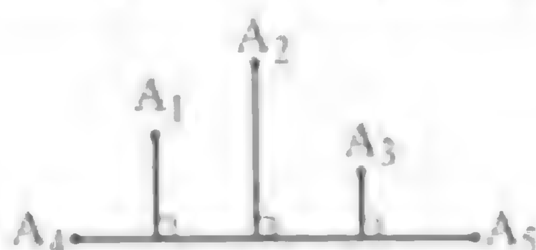
Θεωρούμε 5 σημεία στο επίπεδο τέτοια ώστε να μην υπάρχουν ευθείες οριζόμενες από τα σημεία αυτά ανά δύο, που να είναι παράλληλες, κάθετες ή συμπίπτουσες. Από κάθε σημείο φέρουμε κάθετες προς όλες τις ευθείες που ορίζονται από τα υπόλοιπα τέσσερα σημεία. Να προσδιορίσετε τον μέγιστο αριθμό τομών μεταξύ των παραπάνω κάθετων ευθειών.

Λύση

Ονομάζουμε A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 τα 5 δεδομένα σημεία του επιπέδου. Αν επιλέξουμε ένα από αυτά, έστω το A_1, τότε τα υπόλοιπα 4 ορίζουν

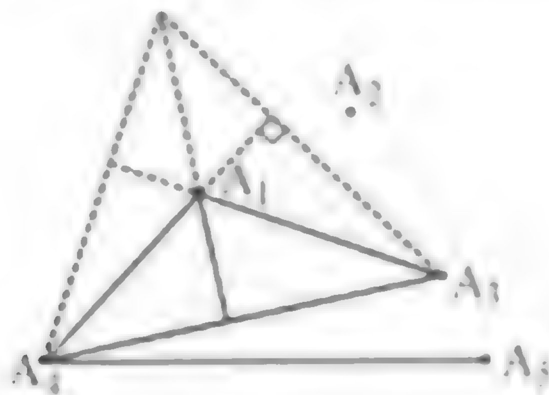
$\binom{4}{2} = 6$ διαφορετικές μη παράλληλες και μη κάθετες ανά δυο ευθείες. Έτσι από το A_1 μπορούμε να φέρουμε 6 κάθετες ευθείες προς αυτές, οπότε συνολικά από τα 5 διαφορετικά σημεία μπορούμε να φέρουμε 30 ευθείες, οι οποίες θα τέμνονται το πολύ σε $\binom{30}{2} = \frac{29 \cdot 30}{2} = 435$ σημεία.

Παρατηρούμε όμως, ότι κάποια από τα παραπάνω πιθανά σημεία τομής των καθέτων ευθειών δεν είναι διαφορετικά μεταξύ τους ή κάποιες από τις κάθετες δεν τέμνονται. Τέτοιες είναι οι παρακάτω περιπτώσεις:



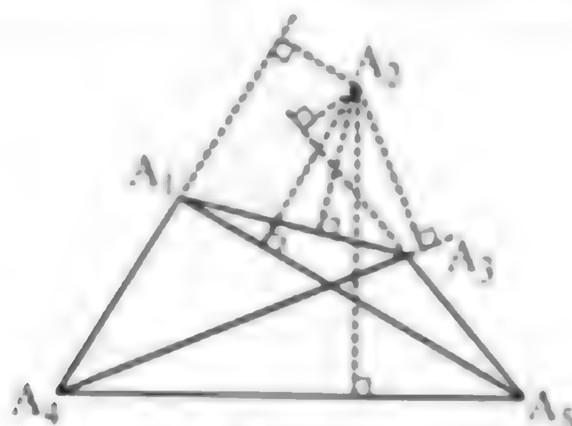
Σχήμα 24

(α) Αν θεωρήσουμε μία από τις 10 ευθείες που ορίζουν τα 5 σημεία, έστω την A_4A_5, τότε οι 3 κάθετες που άγονται προς αυτήν από τα υπόλοιπα 3 σημεία είναι παράλληλες μεταξύ τους, οπότε χάνονται 3 από τα πιθανά σημεία τομής. Επομένως, συνολικά για τις 10 ευθείες χάνονται συνολικά 30 σημεία.



Σχήμα 25

(β) Αν θεωρήσουμε ένα από τα $\binom{5}{3} = 10$ τρίγωνα που ορίζουν ανά τρία τα 5 σημεία, έστω το $A_1A_3A_4$, τότε οι κάθετες από τις κορυφές του προς την απέναντι πλευρά τους είναι ύψη του τριγώνου, οπότε συντρέχουν. Έτσι τέμνονται σε 1 μόνο σημείο, αντί για 3, οπότε σε κάθε τέτοια περίπτωση χάνονται 2 πιθανά σημεία τομής. Συνολικά χάνονται $10 \cdot 2 = 20$ σημεία.



Σχήμα 26

(γ) Αν θεωρήσουμε ένα από τα 5 σημεία, έστω το A_2, τότε υπάρχουν 6 διαφορετικές κάθετες από αυτό προς τις $\binom{4}{2}=6$ ευθείες που ορίζουν τα υπόλοιπα τέσσερα σημεία. Αυτές οι 6 κάθετες συντρέχουν στο A_2 και έτσι έχουν ένα μόνο σημείο τομής, αντί του μεγίστου αριθμού των $\binom{6}{2}=15$ πιθανών σημείων τομής. Έτσι, από κάθε τέτοια περίπτωση χάνονται 14 σημεία, οπότε συνολικά χάνονται $5\cdot 14=70$ σημεία.

Επειδή στις τρεις παραπάνω περιπτώσεις τα αναφερόμενα ως σημεία που χάνονται, είναι διαφορετικά σε καθεμία περίπτωση, συνολικά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι χάνονται τουλάχιστον $30+20+70=120$ σημεία.

Επομένως ο μέγιστος δυνατός αριθμός τομών μεταξύ των καθέτων ευθειών είναι ο $435-120=315$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Σε τετράεδρο ABCD συνδέουμε την κορυφή D με το κέντρο βάρους D_0 του τριγώνου ABC. Από τις κορυφές A, B, C φέρουμε ευθείες παράλληλες προς την DD_0, οι οποίες τέμνουν τα επίπεδα BCD, CAD και ABD στα σημεία A_1, B_1 και C_1, αντιστοίχως.

Να αποδείξετε ότι ο όγκος του τετραέδρου ισούται με το $\frac{1}{3}$ του όγκου του τετραέδρου $A_1B_1C_1D_0$.

Ισχύει το ίδιο συμπέρασμα, όταν το D_0 είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο του τριγώνου ABC;

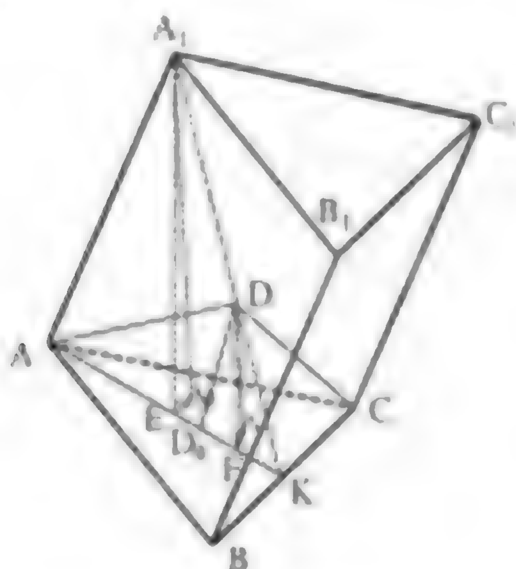
Λύση

Θεωρούμε τετράεδρο ABCD, το κέντρο βάρους D_0 του τριγώνου ABC

και τις ευθείες AA_1, BB_1, CC_1 που είναι παράλληλες προς τη DD_0, όπως ακριβώς ζητείται.

Το επίπεδο που ορίζεται από τις παράλληλες ευθείες AA_1 και DD_0 περιέχει τη διάμεσο AK του τριγώνου ABC και από τα όμοια τρίγωνα KAA_1 και KDD_0 προκύπτει η αναλογία

$$\frac{AA_1}{DD_0} = \frac{AK}{D_0K} = 3 \text{ ή } AA_1 = 3DD_0.$$



Σχήμα 27

Ομοίως αποδεικνύονται και οι ισότητες $BB_1 = 3DD_0 = CC_1$, οπότε τα τετράπλευρα ABB_1A_1, BCC_1B_1 και CAA_1C_1 είναι παραλληλόγραμμα και τα τρίγωνα $A_1B_1C_1$, ABC είναι ίσα.

Αν φέρουμε $A_1E \perp AK, DF \perp AK$ και τα ύψη $A_1M = \upsilon_1, D\Lambda = \upsilon$ των τετραέδρων A_1ABC και DABC, αντιστοίχως, τότε τα τρίγωνα A_1EM και $DF\Lambda$ θα είναι όμοια οπότε θα έχουμε

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon} = \frac{A_1E}{DF} = \frac{A_1A}{DD_0} = 3,$$

οπότε θα είναι $\upsilon_1 = 3\upsilon$.

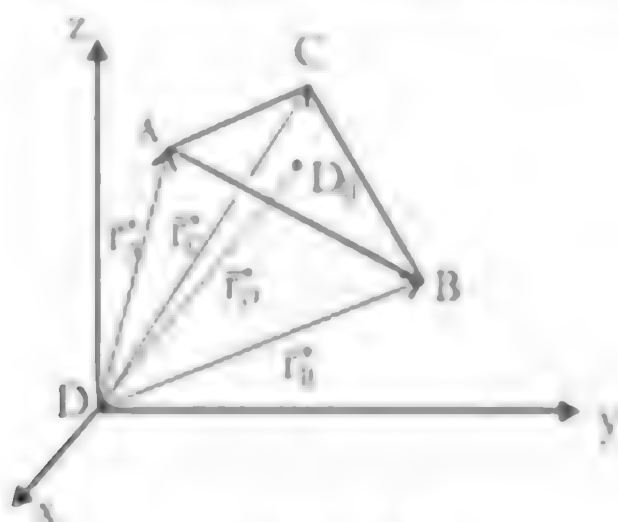
Έτσι έχουμε

$$V_{(ABCD)} = \frac{1}{3}(ABC)\upsilon$$

και

$$V_{(D_0A_1B_1C_1)} = \frac{1}{3}(A_1B_1C_1)\upsilon_1 = \frac{1}{3}(ABC)3\upsilon = 3V_{(ABCD)}.$$

Το δεύτερο ερώτημα του προβλήματος, όταν το D_0 δεν είναι κέντρο βάρους του τριγώνου ABC, αλλά κάποιο τυχαίο εσωτερικό σημείο του τριγώνου, αν και έχει καταφατική απάντηση, δεν μπορεί να αποδειχθεί με την παραπάνω διαδικασία. Υπάρχει μία μέθοδος με την οποία αποδεικνύεται ότι η απάντηση στο ερώτημα είναι καταφατική γενικά όταν το D είναι ένα σημείο του επιπέδου του τριγώνου ABC που δεν ανήκει στις πλευρές του τριγώνου. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας του χώρου και γι' αυτό θα δώσουμε μία σύντομη περιγραφή της, αφού αυτή ουσιαστικά εντάσσεται σε ύλη Πανεπιστημιακού επιπέδου.



Σχήμα 28

Θεωρούμε Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς Oxyz με $O \equiv D$, και έστω $\overline{DA}=\overline{r_A}$, $\overline{DB}=\overline{r_B}$, $\overline{DC}=\overline{r_C}$ και $\overline{DD_0}=\overline{r_{D_0}}=\kappa\overline{r_A}+\lambda\overline{r_B}+\mu\overline{r_C}$ με $\kappa+\lambda+\mu=1$ ($\kappa\lambda\mu\neq 0$, όταν το D_0 δεν ανήκει στις πλευρές του τριγώνου ABC). Η διανυσματική παραμετρική εξίσωση της ευθείας $AA_1 \parallel DD_0$ θα είναι: $\overline{r}=\overline{r_A}+t\overline{r_{D_0}}$, $t\in\mathbb{R}$, ή $\overline{r}=(1+\kappa t)\overline{r_A}+t\lambda\overline{r_B}+t\mu\overline{r_C}$, $t\in\mathbb{R}$.

Η ευθεία AA_1 τέμνει το επίπεδο BCD (ορίζεται από τα $\overline{r_B}, \overline{r_C}$), αν, και μόνο αν, $1+\kappa t=0$ ή $t=-\dfrac{1}{\kappa}$, οπότε το σημείο τομής A_1 έχει διάνυσμα θέσης $\overline{r_{A_1}}=-\dfrac{\lambda}{\kappa}\overline{r_B}-\dfrac{\mu}{\kappa}\overline{r_C}$.

Ομοίως βρίσκουμε για τα σημεία B_1 και C_1 τα διανύσματα θέσης

$$\overline{r_{B_1}}=-\frac{\kappa}{\lambda}\overline{r_A}-\frac{\mu}{\lambda}\overline{r_C}, \quad \overline{r_{C_1}}=-\frac{\kappa}{\mu}\overline{r_A}-\frac{\lambda}{\mu}\overline{r_B}.$$

Χρησιμοποιούμε από την Αναλυτική Γεωμετρία τον τύπο του όγκου του τετραέδρου DABC που είναι

$$V_{(DABC)}=\frac{1}{6}\left(\overline{DA},\overline{DB},\overline{DC}\right)=\frac{1}{6}\left(\overline{r_A},\overline{r_B},\overline{r_C}\right),$$

όπου με το σύμβολο $\left(\overline{r_A},\overline{r_B},\overline{r_C}\right):=\overline{r_A}\cdot\left(\overline{r_B}\times\overline{r_C}\right)$ γράφουμε το μικτό γινόμενο των τριών διανυσμάτων $\overline{r_A},\overline{r_B},\overline{r_C}$. Έτσι για το τετράεδρο $D_0A_1B_1C_1$ θα έχουμε

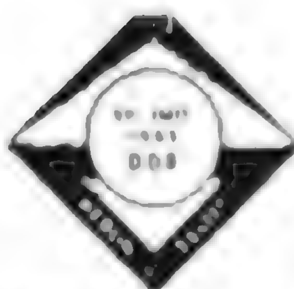
$$V_{(D_0A_1B_1C_1)}=\frac{1}{6}\left(\overline{D_0A_1},\overline{D_0B_1},\overline{D_0C_1}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\left(\overline{r_{A_1}}-\overline{r_{D_0}},\overline{r_{B_1}}-\overline{r_{D_0}},\overline{r_{C_1}}-\overline{r_{D_0}}\right),$$

όπου

$$\overline{r_{A_1}}-\overline{r_{D_0}}=-\kappa\overline{r_A}-\left(\frac{\lambda}{\kappa}+\lambda\right)\overline{r_B}-\left(\frac{\mu}{\kappa}+\mu\right)\overline{r_C}$$
$$\overline{r_{B_1}}-\overline{r_{D_0}}=-\left(\frac{\kappa}{\lambda}+\kappa\right)\overline{r_A}-\lambda\overline{r_B}-\left(\frac{\mu}{\lambda}+\mu\right)\overline{r_C}$$
$$\overline{r_{C_1}}-\overline{r_{D_0}}=-\left(\frac{\kappa}{\mu}+\kappa\right)\overline{r_A}-\left(\frac{\lambda}{\mu}+\lambda\right)\overline{r_B}-\mu\overline{r_C}.$$

Με τα παραπάνω δεδομένα θα έχουμε

$$V_{(D_0A_1B_1C_1)}=\frac{1}{6}\left(\overline{r_{A_1}}-\overline{r_{D_0}},\overline{r_{B_1}}-\overline{r_{D_0}},\overline{r_{C_1}}-\overline{r_{D_0}}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\left(\overline{r_A},\overline{r_B},\overline{r_C}\right)\cdot\det\begin{bmatrix}-\kappa & -\frac{\lambda}{\kappa}-\lambda & -\frac{\mu}{\kappa}-\mu\\ -\frac{\kappa}{\lambda}-\kappa & -\lambda & -\frac{\mu}{\lambda}-\mu\\ -\frac{\kappa}{\mu}-\kappa & -\frac{\lambda}{\mu}-\lambda & -\mu\end{bmatrix}$$
$$=V_{(DABC)}\cdot 3=3V_{(DABC)}$$



7^{η} ΔΙΕΘΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ, 1965.

Τόπος Διοργάνωσης:	Ανατ. Γερμανία (Βερολίνο)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	W. Engel (Παν/μιο Ροστόκ)
Συμμετοχή:	10 χώρες με 8 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες συμμετοχές:	Φινλανδία
Μέγιστη Βαθμολογία:	40 βαθμοί ανά μαθητή
Τελική Βαθμολογία:	Σοβ. Ένωση (281), Ουγγαρία (244), Ρουμανία (222), Πολωνία (178), Αν. Γερμανία (175), Τσεχοσλοβακία (159), Γιουγκοσλαβία (137), Βουλγαρία (93).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Υπολογίστε τις τιμές του $x \in [0, 2\pi]$ που ικανοποιούν την ανισότητα:

$$2\sigma\upsilon\nu x \leq \left|\sqrt{1+\eta\mu 2x}-\sqrt{1-\eta\mu 2x}\right| \leq \sqrt{2}.$$

Λύση

α) Η ανισότητα $\left|\sqrt{1+\eta\mu 2x}-\sqrt{1-\eta\mu 2x}\right| \leq \sqrt{2}$ ισχύει για όλα τα $x \in [0, 2\pi]$ αφού η απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο θετικών αριθμών είναι το πολύ ίση με τον μεγαλύτερο.

β) Η ανισότητα $2\sigma\upsilon\nu x \leq \left|\sqrt{1+\eta\mu 2x}-\sqrt{1-\eta\mu 2x}\right|$ προφανώς ισχύει για εκείνα τα $x \in [0, 2\pi]$ όπου $\sigma\upsilon\nu x \leq 0$ δηλαδή για $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ (1).

Για τις υπόλοιπες τιμές του x με $\sigma\upsilon\nu x \geq 0$, υψώνουμε στο τετράγωνο, οπότε έχουμε

$$2\sigma\upsilon\nu x \le \left|\sqrt{1+\eta\mu 2x} - \sqrt{1-\eta\mu 2x}\right| \Leftrightarrow$$

$$4\sigma\upsilon\nu^2 x \le 1+\eta\mu 2x - 2\sqrt{1-\eta\mu^2 2x} + 1 - \eta\mu 2x \Leftrightarrow$$

$$4\sigma\upsilon\nu^2 x \le 2 - 2|\sigma\upsilon\nu 2x|.$$

Αφού $\sigma\upsilon\nu^2 x = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$, η παραπάνω είναι ισοδύναμη με την

$$2+2\sigma\upsilon\nu 2x \le 2 - 2|\sigma\upsilon\nu 2x| \Leftrightarrow |\sigma\upsilon\nu 2x| \le -\sigma\upsilon\nu 2x,$$

η οποία ισχύει όταν $\sigma\upsilon\nu 2x \le 0$, δηλαδή όταν $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$. Όμως είναι $\sigma\upsilon\nu x \ge 0$, οπότε στην περίπτωση αυτή η ανισότητα αληθεύει όταν $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$ (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι η ανίσωση αληθεύει όταν $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Θεωρούμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

με αγνώστους x_1, x_2, x_3. Οι συντελεστές ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:

(α) Οι a_{11}, a_{22}, a_{33} είναι θετικοί αριθμοί.

(β) Οι υπόλοιποι συντελεστές είναι αρνητικοί αριθμοί.

(γ) Σε κάθε εξίσωση το άθροισμα των συντελεστών είναι θετικό.

Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μόνο τη λύση $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Λύση

Ένα ομογενές γραμμικό σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση όταν ισχύει

$$D=\begin{vmatrix} a_{33} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Όμως έχουμε

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & S_1 \\ a_{21} & a_{22} & S_2 \\ a_{31} & a_{32} & S_3 \end{vmatrix}$$

όπου $S_i = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}$, για $i = 1,2,3$.

(Εδώ χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα οριζουσών κατά την οποία η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται, αν προσθέσουμε σε οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη ένα γραμμικό συνδυασμό γραμμών ή στηλών, αντίστοιχως).

Υπολογίζοντας τη D ως προς τα στοιχεία της τρίτης στήλης έχουμε:

$D = S_1\left(a_{12}a_{32} - a_{31}a_{22}\right) - S_2\left(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}\right) + S\left(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\right)$ (1)

Προφανώς $S_i > 0$, για i = 1. 2. 3. Από την ιδιότητα (γ) της εκφώνησης.

Από τις ιδιότητες (α) και (β) της εκφώνησης οι δύο πρώτοι προσθετέοι της (1) είναι θετικοί. Επίσης από τις ιδιότητες (β) και (γ) έχουμε:

$a_{11} + a_{12} > a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0$, οπότε $a_{11} > -a_{12} = |a_{12}|$

$a_{22} + a_{21} > a_{22} + a_{21} + a_{23} > 0$, οπότε $a_{22} > -a_{21} = |a_{21}|$.

Άρα $a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21}$ και ο τρίτος προσθετέος της (1) είναι θετικός, οπότε θα είναι $D > 0$ και το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται τετράεδρο ABCD του οποίου οι ακμές AB και CD έχουν μήκη a και b, αντιστοίχως. Π απόσταση μεταξύ των ασυμβάτων ευθειών AB και CD είναι d και η γωνία τους είναι ω. Το τετράεδρο ABCD διαιρείται σε δύο στερεά από επίπεδο ε, παράλληλο προς τις ευθείες AB και CD. Ο λόγος των αποστάσεων του ε από τις AB και CD είναι κ.

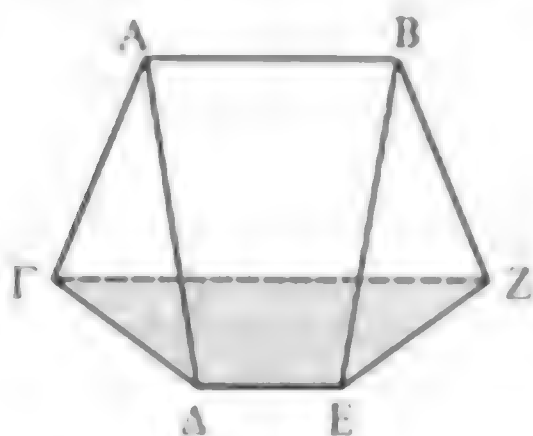
Να υπολογίσετε τον λόγο των όγκων των δύο λαμβανομένων στερεών.

Λύση

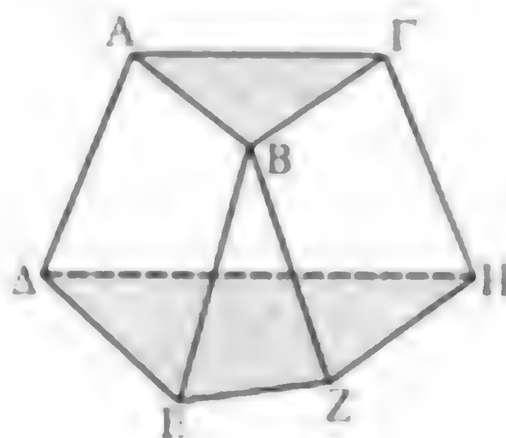
Κατ' αρχήν θα παραθέσουμε κάποια αναγκαία στοιχεία από τη Στερεομετρία.

Πρισματοειδές είναι ένα κυρτό πολύεδρο του οποίου δύο έδρες, που τις ονομάζουμε **βάσεις**, βρίσκονται σε παράλληλα επίπεδα και το οποίο δεν έχει άλλες κορυφές εκτός των κορυφών των βάσεών του. Οι υπόλοιπες έδρες του πρισματοειδούς (**παράπλευρες έδρες**) είναι τρίγωνα ή τραπέζια.

Ύψος του πρισματοειδούς είναι η απόσταση των δύο παραλλήλων επιπέδων που περιέχουν τις βάσεις του και **μεσαία τομή** του είναι το πολύγωνο που προκύπτει, όταν το τμήσουμε με επίπεδο παράλληλο προς τις δύο βάσεις και το οποίο απέχει ίσες αποστάσεις από αυτές.



Σχήμα 29(i)



Σχήμα 29(ii)

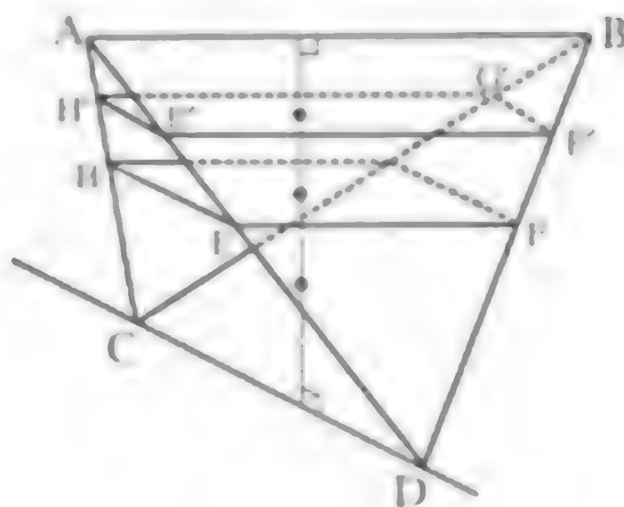
Είναι δυνατόν μία από τις βάσεις του πρισματοειδούς να εκφυλίζεται σε ευθύγραμμο τμήμα και αυτή ακριβώς είναι η περίπτωση για τα δύο στερεά που διαιρείται το τετράεδρο ABCD του προβλήματος από το επίπεδο ε. Στην περίπτωση που η μία βάση εκφυλίζεται σε σημείο, τότε το πρισματοειδές γίνεται πυραμίδα.

Ο όγκος του πρισματοειδούς δίνεται από τον τύπο

$$V = \frac{1}{6}\upsilon \cdot (B_1 + B_2 + 4B_0), \qquad (1)$$

όπου υ είναι το ύψος, B_1, B_2 και B_0 είναι τα εμβαδά των δύο βάσεων του και της μεσαίας τομής, αντιστοίχως.

Η απόδειξη του παραπάνω τύπου γίνεται με τη θεώρηση ενός τυχαίου σημείου O στο εσωτερικό της μεσαίας τομής και με άθροιση των όγκων όλων των πυραμίδων που έχουν κορυφή το O και βάσεις τις δύο βάσεις του πρισματοειδούς καθώς και όλες τις παράπλευρες έδρες του.



Σχήμα 30

Θεωρούμε τώρα το τετράεδρο ABCD και τομή του επί το επίπεδο ε, η οποία είναι το παραλληλόγραμμο EFGH, αφού λόγω της παραλληλίας του ε με τις AB και CD θα έχουμε $EF \parallel HG \parallel AB$ και $EH \parallel FG \parallel CD$ (Σχήμα 30).

Ονομάζουμε Π_1 το πρισματοειδές ABFGHE και Π_2 το πρισματοειδές CDFGHE. Αυτά έχουν κοινή τη μία βάση του EFGH, ενώ η άλλη βάση τους είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB, CD, αντιστοίχως. Έστω υ_1, υ_2 είναι τα ύψη των Π_1, Π_2, αντιστοίχως. Τότε θα έχουμε

$$\upsilon_1 + \upsilon_2 = d \text{ και } \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \kappa .$$

Επειδή η γωνία των AB, CD είναι ω, θα είναι και $\widehat{HEF} = \omega$, οπότε $(EFGH) = EH \cdot EF \cdot ημω$. Επιπλέον θα έχουμε

$$\frac{\upsilon_1}{d} = \frac{EH}{CD} \text{ και } \frac{\upsilon_2}{d} = \frac{EF}{AB},$$

οπότε

$$EH = \frac{b\upsilon_1}{d},\ EF = \frac{a\upsilon_2}{d}, \text{ και} \tag{2}$$

$$(EFGH) = \frac{\upsilon_1 \cdot CD}{d} \cdot \frac{\upsilon_2 \cdot AB}{d} ημω = \frac{ab\upsilon_1\upsilon_2}{d^2} ημω \tag{3}$$

Θεωρούμε τώρα τη μεσαία τομή του πρισματοειδούς Π_1 που είναι το παραλληλόγραμμο E΄F΄G΄H΄ με πλευρές $E'H' = \frac{1}{2}EH$ και $E'F' = \frac{1}{2}(EF + AB)$, οπότε το εμβαδόν της είναι:

$$B_{01} = (E'F'G'H') = \frac{1}{4}EH \cdot (EF + a) \cdot ημω$$

$$\Leftrightarrow 4B_{01} = \frac{b\upsilon_1}{d}\left(\frac{a\upsilon_2}{d} + a\right)\eta\mu\omega = \frac{ab\upsilon_1}{d^2}(\upsilon_2 + d)\eta\mu\omega \qquad (4)$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε για τη μεσαία τιμή του πρισματοειδούς Π_2, ότι έχει εμβαδόν B_{02} που δίνεται από

$$4B_{02} = \frac{a\upsilon_2}{d}\left(\frac{b\upsilon_1}{d} + b\right)\eta\mu\omega = \frac{ab\upsilon_2}{d^2}(\upsilon_1 + d)\eta\mu\omega \qquad (5)$$

Έτσι χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3), (4) και (5) στη σχέση (1) λαμβάνουμε για τους όγκους V_1, V_2 των πρισματοειδών Π_1, Π_2, αντιστοίχως,

$$V_1 = \frac{1}{6}\upsilon_1\left[(EFGH) + 4B_{01}\right] = \frac{ab\upsilon_1^2}{6d^2}(2\upsilon_2 + d)\eta\mu\omega$$

$$V_2 = \frac{1}{6}\upsilon_2\left[(EFGH) + 4B_{02}\right] = \frac{ab\upsilon_2^2}{6d^2}(2\upsilon_1 + d)\eta\mu\omega$$

και ο λόγος τους θα είναι

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\upsilon_1^2(2\upsilon_2 + d)}{\upsilon_2^2(2\upsilon_1 + d)} \qquad (6)$$

Από τις σχέσεις $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \kappa$ και $\upsilon_1 + \upsilon_2 = d$, προκύπτει ότι

$$\frac{\upsilon_1}{d} = \frac{\kappa}{\kappa+1}, \quad \frac{\upsilon_2}{d} = \frac{1}{\kappa+1}.$$

Έτσι τελικά έχουμε

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\right)^2 \cdot \frac{\frac{2\upsilon_2}{d} + 1}{\frac{2\upsilon_1}{d} + 1} = \kappa^2 \cdot \left(\frac{\frac{2}{\kappa+1} + 1}{\frac{2\kappa}{\kappa+1} + 1}\right)$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\kappa^2(\kappa+3)}{3\kappa+1}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Βρείτε όλες τις τετράδες πραγματικών αριθμών x_1, x_2, x_3, x_4 που είναι τέτοιες ώστε το άθροισμα οποιωνδήποτε εκ των τεσσάρων συν το γινόμενο των άλλων τριών είναι ίσο με 2.

Λύση

Αναζητούμε λύσεις του συστήματος

$$x_1 + x_2x_3x_4 = 2$$
$$x_2 + x_1x_3x_4 = 2$$
$$x_3 + x_1x_2x_4 = 2$$
$$x_4 + x_1x_2x_3 = 2$$

που είναι συμμετρικό ως προς τους τέσσερις αγνώστους x_1, x_2, x_3, x_4.

Θέτουμε $x_1x_2x_3x_4 = \rho$. Κανένας από τους αριθμούς δεν είναι 0, γιατί, αν υποθέσουμε ότι κάποιος είναι 0, έστω $x_1 = 0$, τότε από την πρώτη εξίσωση έχουμε $x_2x_3x_4 = 2$, ενώ από τις άλλες έχουμε $x_2 = x_3 = x_4 = 2$, που είναι άτοπο.

Έτσι μπορούμε να γράψουμε κάθε εξίσωση στη μοφή:

$$x_i + \frac{\rho}{x_i} = 2, \text{ για } i = 1,2,3,4 \text{ ή } x_i^2 - 2x_i + \rho = 0, \rho \neq 0 \qquad (1)$$

Αυτή η δευτεροβάθμια εξίσωση έχει το πολύ δύο λύσεις στο $\mathbb{R}$

$$x_i = 1 \pm \sqrt{1-\rho}, \qquad (2)$$

όταν $\rho \leq 1$. Αυτό οδηγεί στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) Οι ρίζες της (1) είναι ίσες, το οποίο συμβαίνει όταν $\rho = 1$. Τότε από την (2) έχουμε $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

(β1) Οι ρίζες της (1) είναι διαφορετικές, και δύο από τους τέσσερις αριθμούς x_i είναι $1 + \sqrt{1-\rho}$, ενώ οι άλλοι δύο είναι $1 - \sqrt{1-\rho}$. Τότε $\rho = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \left(1+\sqrt{1-\rho}\right)^2 \cdot \left(1-\sqrt{1-\rho}\right)^2 = \left[1-(1-\rho)\right]^2 = \rho^2$, απ' όπου έχουμε $\rho = 1$, που αποδεικνύει ότι οι ρίζες (2) είναι ίσες, που είναι άτοπο.

(β2) Οι δύο ρίζες της (1) είναι διαφορετικές, και μια απ' αυτές είναι η τιμή των τριών αριθμών από τους x_i, ενώ η άλλη ρίζα είναι η τιμή του τέταρτου αριθμού.

Τότε $\rho = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \left(1+\sqrt{1-\rho}\right)^3 \cdot \left(1-\sqrt{1-\rho}\right) = \rho\left(1+\sqrt{1-\rho}\right)^2$

ή $\rho = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \left(1+\sqrt{1-\rho}\right) \cdot \left(1-\sqrt{1-\rho}\right)^3 = \rho\left(1-\sqrt{1-\rho}\right)^2$.

Στην πρώτη περίπτωση ξαναπαίρνουμε $\rho = 1$ το οποίο αντίκειται στο ότι η (1) έχει διαφορετικές ρίζες.

Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε: $\left(1-\sqrt{1-\rho}\right)^2 = 1$ από την οποία προκύπτει $\rho = -3$. Έτσι από την (2), ένας από τους αριθμούς x_i ισούται με 3 και οι άλλοι τρεις με -1. Επομένως όλες οι τετράδες των ζητούμενων πραγματικών αριθμών είναι:

$(1,1,1,1)$, $(3,-1,-1,-1)$, $(-1,3,-1,-1)$, $(-1,-1,3,-1)$ και $(-1,-1,-1,3)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Θεωρούμε τρίγωνο ΟΑΒ με οξεία γωνία την $\hat{AOB}$. Από ένα σημείο $M \neq 0$ φέρνουμε κάθετες προς τις πλευρές ΟΑ και ΟΒ τις ΜΡ και ΜΚ αντίστοιχα. Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΟΡΚ. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος του Η

α) αν το Μ κινείται στην πλευρά ΑΒ;

β) αν το Μ κινείται στο εσωτερικό του τριγώνου ΟΑΒ.

Λύση

α) Θεωρούμε το Ο ως σημείο αναφοράς και σημειώνουμε $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\eta}$, $\vec{\mu}$, $\vec{\rho}$, $\vec{\kappa}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OK}$ αντίστοιχα.

Στο σχήμα 31(i) είναι $MP \parallel KH$ και $MK \parallel PH$, οπότε το ΜΡΗΚ είναι παραλληλόγραμμο.

Επομένως $\vec{\eta}-\vec{\rho}=\vec{\kappa}-\vec{\mu} \Leftrightarrow \vec{\eta}=\vec{\rho}+\vec{\kappa}-\vec{\mu}$, (1).

Αν $\overrightarrow{AM}=\lambda\cdot\overrightarrow{AB}$, τότε $\vec{\mu}=\vec{\alpha}+\lambda\left(\vec{\beta}-\vec{\alpha}\right)=(1-\lambda)\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$, (2).

Έστω Γ το ίχνος της κάθετης από το Β στην ΟΑ και Δ το ίχνος της κάθετης από το Α στην ΟΒ. Ισχυριζόμαστε ότι

$$\vec{\rho}=(1-\lambda)\vec{\alpha}+\lambda\vec{\gamma}, \quad (3)$$

$$\vec{\kappa}=\lambda\vec{\beta}+(1-\lambda)\vec{\delta}, \quad (4)$$

όπου $\vec{\gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}$, $\vec{\delta}=\overrightarrow{O\Delta}$.

Για ν' αποδείξουμε την (3) ας πάρουμε υποθετικά ένα διάνυσμα $\vec{\rho}_1=(1-\lambda)\vec{\alpha}+\lambda\vec{\gamma}$ όπου $\vec{\rho}_1$ είναι το $\overrightarrow{OP_1}$.

Προφανώς το σημείο P_1 βρίσκεται πάνω στην ΟΑ.

Από την (2) έχουμε $\vec{\mu}-\vec{\rho}_1=\lambda\left(\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right) \Leftrightarrow \overline{P_1M}=\lambda\overline{\Gamma B} \Leftrightarrow \overline{P_1M} \parallel \overline{\Gamma B}$, οπότε $P_1M \perp OA$. Επομένως το σημείο P_1 ταυτίζεται με το P και άρα ισχύει η (3).

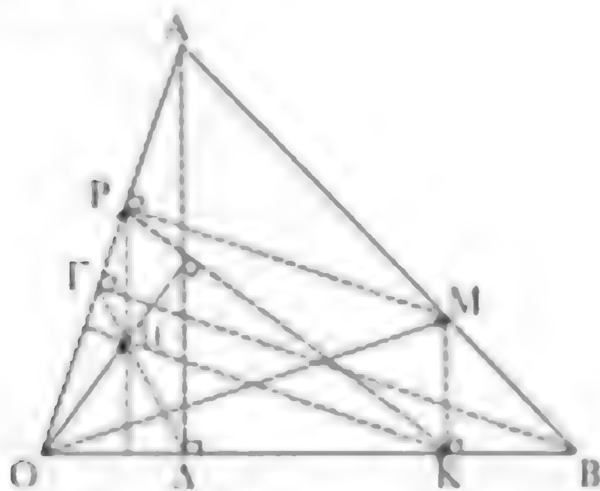
Ομοίως αποδεικνύεται και η (4).

Αν τώρα θέσουμε τις (2), (3), (4) στη σχέση (1) έχουμε:

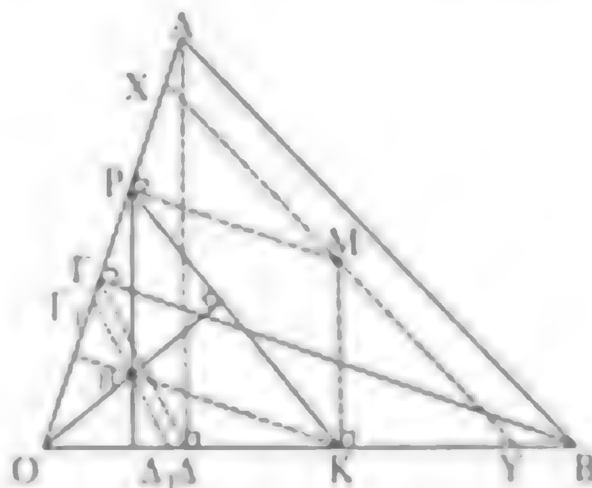
$$\vec{\eta}=(1-\lambda)\vec{\alpha}+\lambda\vec{\gamma}+\lambda\vec{\beta}+(1-\lambda)\vec{\delta}-(1-\lambda)\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\eta}=\lambda\vec{\gamma}+(1-\lambda)\vec{\delta} \quad (5)$$

Καθώς το λ παίρνει τιμές από 0 έως 1, το Μ κινείται από το Α έως Β και από την (5) το Η κινείται από το Δ έως Γ.

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος του Η είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΔΓ, δες σχήμα 31(i).



Σχήμα 31 (i)



Σχήμα 31 (ii)

β) Ας φανταστούμε πως καθώς το Μ κινείται στο εσωτερικό του τριγώνου ΟΑΒ διατρέχει παράλληλα τμήματα προς το τμήμα ΑΒ.

Τότε το Η θα κινείται σε παράλληλα τμήματα προς το ΔΓ αντίστοιχα. Μια τέτοια περίπτωση φαίνεται στο σχήμα 31(ii).

Επομένως καθώς το Μ κινείται στο εσωτερικό του τριγώνου ΟΑΒ, το Η θα κινείται στο εσωτερικό του τριγώνου ΟΔΓ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Δίνεται ένα σύνολο ν σημείων στο επίπεδο, $(\nu \geq 3)$. Κάθε ζεύγος σημείων συνδέεται με ένα ευθύγραμμο τμήμα. Ας ονομάσουμε d το μήκος του μεγαλύτερου απ' αυτά τα τμήματα. Καλούμε «διάμετρο» του συνόλου αυτών των σημείων το οποιοδήποτε τμήμα με μήκος d. Αποδείξτε ότι το πλήθος των διαμέτρων αυτών είναι το πολύ ν.

Λύση

Θ' αποδείξουμε το πρόβλημα με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής αφού πρώτα αναφέρουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα: Αν περισσότερες από δύο διάμετροι άγονται από ένα εκ των δεδομένων σημείων, τότε υπάρχει ένα άλλο σημείο από το οποίο μόνο μια διάμετρος άγεται.

Απόδειξη λήμματος

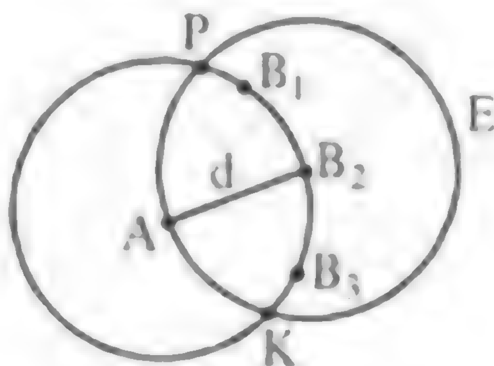
Έστω A το ένα άκρο τριών ή περισσοτέρων διαμέτρων. Τα άλλα άκρα θα βρίσκονται σε κύκλο (A,d) και ας είναι B_1, B_2, B_3 με το B_2 να βρίσκεται μεταξύ των B_1, B_3.

Με κέντρο το B_2 κατασκευάζουμε τον κύκλο (B_2,d) που τέμνει τον κύκλο (A,d) στα σημεία P, K.

Προφανώς τα σημεία B_1, B_2, B_3 θα βρίσκονται εντός του τόξου PB_2K γιατί διαφορετικά ένα από τα τμήματα B_2B_3 ή B_2B_1 θα είχαν μήκος μεγαλύτερο του d.

- Θα αποδείξουμε ότι μόνο μία διάμετρος άγεται από ένα εκ των σημείων B_1, B_2, B_3.
- Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει σημείο στο τόξο $\overset{\frown}{PEK}$ που η απόστασή του από κάποιο των B_1, B_2, B_3 να είναι d, τότε η απόστασή του από το A θα ήταν μεγαλύτερη από d, που είναι αδύνατο.
- Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει σημείο στο τόξο $\overset{\frown}{AP}$ που η απόστασή του από κάποιο των B_1, B_2, B_3 να είναι d τότε η απόστασή του από το B_1 θα ήταν μεγαλύτερη από d, άρα αδύνατο.
- Όμοια αν υποθέσουμε ότι υπάρχει σημείο στο τόξο $\overset{\frown}{PAK}$, διάφορο του A, που η απόστασή του από κάποιο των B_1, B_2, B_3 να είναι d, τότε η απόστασή του από το B_3 θα ήταν μεγαλύτερη από d, που είναι αδύνατο.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι, αν $\kappa > 2$ διάμετροι άγονται από το A, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο από το οποίο μόνο μία διάμετρος διέρχεται, δηλαδή το σημείο B_2.



Σχήμα 32

Με τη βοήθεια του λήμματος και τη μέθοδο της επαγωγής έχουμε:

α) Για ένα σύνολο τριών σημείων προφανώς τρεις το πολύ διάμετροι υπάρχουν. Άρα η πρόταση ισχύει για $\nu = 3$ σημεία.

β) Αν υποθέσουμε ότι η πρόταση ισχύει για $\mu > 3$ σημεία, θα δείξουμε ότι ισχύει και για $\mu + 1$ σημεία.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Το πολύ δύο διάμετροι άγονται από καθένα των $\mu + 1$ σημείων. Αφού κάθε διάμετρος έχει δύο άκρα, υπάρχουν το πολύ $\dfrac{2(\mu+1)}{2} = \mu + 1$ διάμετροι, άρα η πρόταση ισχύει για $\mu + 1$.

(ii) Υπάρχει ένα σημείο Α του συνόλου S των $\mu + 1$ από το οποίο άγονται περισσότερες των δύο διάμετροι. Τότε, από το λήμμα, υπάρχει ένα σημείο Β του S από το οποίο μόνο μια διάμετρος διέρχεται. Από το σύνολο των μ σημείων του S εκτός του Β έχουμε μ διαμέτρους (από την υπόθεση της επαγωγής).

Αν προστεθεί και το Β τότε έχουμε μία ακόμη διάμετρο, άρα από το σύνολο S των $\mu + 1$ σημείων έχουμε $\mu + 1$ διαμέτρους.



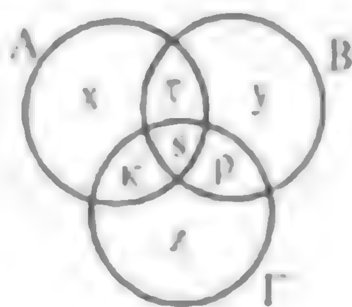
8η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1966

Τόπος Διοργάνωσης:	Βουλγαρία (Σόφια)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	A.N. Mateev (Παν/μιο Σόφιας)
Συμμετοχή:	9 χώρες με 8 το πολύ μαθητές η καθεμία.
Νέες συμμετοχές:	--
Μέγιστη Βαθμολογία:	40 βαθμοί ανά μαθητή
Τελική Βαθμολογία:	Σοβ. Ένωση (293), Ουγγαρία (281), Αν. Γερμανία (280), Πολωνία (269), Ρουμανία (257), Βουλγαρία (238), Γιουγκοσλαβία (224), Τσεχοσλοβακία (215).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Σ' ένα μαθηματικό διαγωνισμό δόθηκαν τρία προβλήματα Α, Β, Γ. Από τους συμμετέχοντες υπήρξαν 25 μαθητές που έλυσαν τουλάχιστον ένα πρόβλημα ο καθένας. Απ' όλους τους διαγωνιζομένους που δεν έλυσαν το πρόβλημα Α, ο αριθμός εκείνων που έλυσαν το Β ήταν διπλάσιος εκείνων που έλυσαν το Γ. Ο αριθμός των μαθητών που έλυσαν μόνο το Α ήταν ένας παραπάνω από τον αριθμό των μαθητών που έλυσαν το Α και τουλάχιστον ένα ακόμη πρόβλημα. Απ' όλους τους μαθητές που έλυσαν ένα ακριβώς πρόβλημα, μισοί δεν έλυσαν το πρόβλημα Α. Πόσοι μαθητές έλυσαν μόνο το πρόβλημα Β;

Λύση



Σχήμα 33

Το διπλανό σχήμα των τριών κυκλικών δίσκων Α, Β, Γ παριστάνει το σύνολο των διαγωνιζομένων που έλυσαν αντίστοιχα τα προβλήματα Α, Β, Γ. Έτσι π.χ. τ είναι ο αριθμός των μαθητών που έλυσαν τα προβλήματα Α, Β, s είναι ο αριθμός των μαθητών που έλυσαν και τα τρία προβλήματα, y είναι ο αριθμός αυτών που έλυσαν μόνο το πρόβλημα Β, κλπ. Αφού 25 μαθητές έλυσαν τουλάχιστον ένα πρόβλημα, έχουμε

$$x+y+z+\kappa+\tau+\rho+s=25 \qquad (1)$$

Απ' αυτούς που δεν έλυσαν το Α, ο αριθμός εκείνων που έλυσαν το Β ήταν διπλάσιος εκείνων που έλυσαν το Γ, οπότε

$$y+\rho=2(\rho+z)\Leftrightarrow y-\rho-2z=0 \qquad (2)$$

Οι μαθητές που έλυσαν μόνο το Α ήταν ένας παραπάνω απ' αυτούς που έλυσαν το Α και τουλάχιστον ένα ακόμη πρόβλημα, οπότε

$$x=\kappa+s+\tau+1 \qquad (3)$$

Απ' όλους τους μαθητές που έλυσαν ένα ακριβώς πρόβλημα, μισοί δεν έλυσαν το πρόβλημα Α, οπότε

$$\frac{1}{2}(x+y+z)=y+z\Leftrightarrow x=y+z \qquad (4)$$

Έχουμε τέσσερις εξισώσεις με 7 αγνώστους και αν θέσουμε $\kappa+\tau+s=\omega$ θα έχουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{aligned} x+y+z+\rho+\omega &= 25 \quad (\alpha)\\ y-2z-\rho &= 0 \quad (\beta)\\ x-\omega &= 1 \quad (\gamma)\\ -x+y+z &= 0 \quad (\delta) \end{aligned}$$

όπου οι 5 άγνωστοι είναι μη αρνητικοί ακέραιοι.

Με πρόσθεση και των τεσσάρων εξισώσεων παίρνουμε:

$$x+3y=26 \qquad (5)$$

Από τη (β) έχουμε $y=2z+\rho\geq 2z$ και από την (δ) παίρνουμε: $x=y+z\leq y+\frac{1}{2}y=\frac{3}{2}y$. Επομένως θα έχουμε:

$$y\leq x\leq\frac{3}{2}y \qquad (6)$$

Από την (5) παίρνουμε $x = 26 - 3y$ και αντικαθιστώντας στην (6) τελικά:

$$y + 3y \le 26 \le 3y + \frac{3}{2}y.$$

Από την πρώτη ανισότητα παίρνουμε: $y \le \frac{26}{4} = \frac{13}{2} < 7$, ενώ από τη δεύτερη ανισότητα έχουμε: $26 \le \frac{9}{2}y \Leftrightarrow y \ge \frac{52}{9} > 5$.

Άρα $y = 6$ είναι οι μαθητές που έλυσαν μόνο το πρόβλημα Β.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Έστω α, β, γ τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ και $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ οι αντίστοιχες απέναντι γωνίες τους. Να αποδείξετε ότι, αν ισχύει:

$$\alpha + \beta = \varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}(\alpha\varepsilon\varphi A + \beta\varepsilon\varphi B),$$

τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Λύση

Η δοθείσα σχέση γράφεται:

$$\alpha + \beta = \frac{\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}\left(\alpha\frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu A} + \beta\frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B}\right) \Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B = \alpha\eta\mu A\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu B + \beta\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\eta\mu B\sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow$$

$$\alpha\sigma\upsilon\nu B\left(\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} - \eta\mu A\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\right) + \beta\sigma\upsilon\nu A\left(\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} - \eta\mu B\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\alpha\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\left(A + \frac{\Gamma}{2}\right) + \beta\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu\left(B + \frac{\Gamma}{2}\right) = 0 \qquad (1)$$

Όμως $A + B + \Gamma = \pi \Leftrightarrow A + \frac{\Gamma}{2} + B + \frac{\Gamma}{2} = \pi$, δηλαδή $\left(A + \frac{\Gamma}{2}\right)$ και $\left(B + \frac{\Gamma}{2}\right)$ είναι παραπληρωματικές γωνίες, οπότε

$\sigma\upsilon\nu\left(B+\frac{\Gamma}{2}\right)=-\sigma\upsilon\nu\left(A+\frac{\Gamma}{2}\right)$ και από την (1) παίρνουμε:

$$(\alpha\sigma\upsilon\nu B-\beta\sigma\upsilon\nu A)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(A+\frac{\Gamma}{2}\right)=0.$$

- Αν $\sigma\upsilon\nu\left(A+\frac{\Gamma}{2}\right)=0$, τότε $A+\frac{\Gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$, άρα και $B+\frac{\Gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$, από την οποία συμπεραίνουμε ότι $A=B$.
- Αν $\alpha\sigma\upsilon\nu B-\beta\sigma\upsilon\nu A=0$, αφού από το νόμο των ημιτόνων έχουμε $\alpha=2R\eta\mu A$ και $\beta=2R\eta\mu B$, η σχέση αυτή γράφεται:

$$2R(\eta\mu A\sigma\upsilon\nu B-\sigma\upsilon\nu A\eta\mu B)=0\Leftrightarrow\eta\mu(A-B)=0$$

$$\Leftrightarrow A-B=0 \text{ ή } A-B=\pi$$

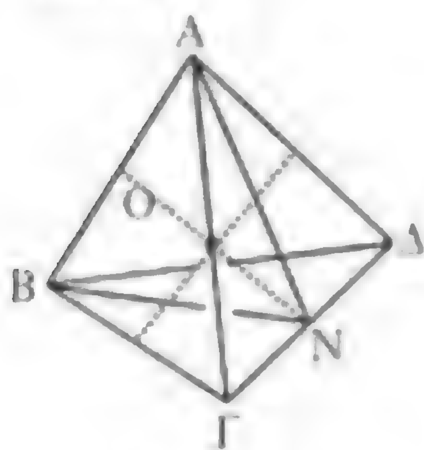
$$\Leftrightarrow A=B \text{ ή } A=\pi+B \text{ (αδύνατο).}$$

Άρα σ' όλες τις περιπτώσεις αποδείξαμε, ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $\hat{A}=\hat{B}$.

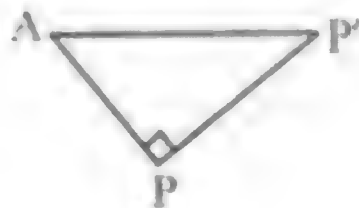
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των αποστάσεων των κορυφών ενός κανονικού τετραέδρου από το κέντρο της περιγεγραμμένης σφαίρας είναι μικρότερο από το άθροισμα των αποστάσεων αυτών των κορυφών από οποιοδήποτε άλλο σημείο του χώρου.

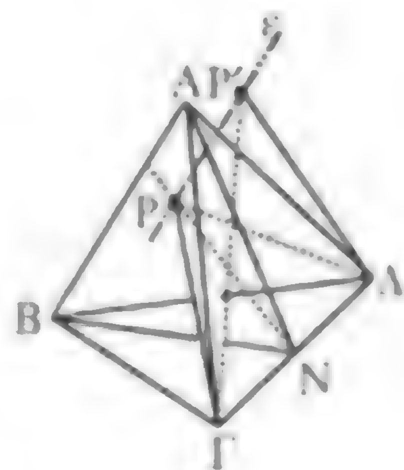
Λύση



Σχήμα 34(i)



Σχήμα 34(ii)



Σχήμα 34(iii)

Το κέντρο O της περιγεγραμμένης σφαίρας του τετραέδρου ΑΒΓΔ βρίσκεται σ' όλα τα μεσοκάθετα επίπεδα των 6 ακμών του τετραέδρου, ώστε

να απέχει εξίσου από τις κορυφές Α, Β, Γ, Δ.

Θα αποδείξουμε ότι αν ένα σημείο δε βρίσκεται πάνω σε όλα αυτά τα επίπεδα (δηλαδή δεν είναι το Ο), τότε το άθροισμα των αποστάσεών του από τις κορυφές δεν είναι το ελάχιστο.

Ας υποθέσουμε ότι ένα σημείο Ρ δε βρίσκεται στο επίπεδο ΑΒΝ που είναι μεσοκάθετο στην ακμή ΓΔ. Έστω (ε) μια ευθεία που διέρχεται από το Ρ και είναι παράλληλη στην ΓΔ άρα κάθετη στο επίπεδο ΑΒΝ και έστω Ρ΄ το σημείο που η (ε) συναντά το επίπεδο ΑΒΝ. Τότε [Παρατήρηση (i)]

$$P\Gamma + P\Delta > P'\Gamma + P'\Delta \qquad (1)$$

Επίσης, αφού στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΡΡ΄, ΒΡΡ΄ οι ΡΑ, ΡΒ, αντιστοίχως, είναι υποτείνουσες, θα έχουμε

$$PA > P'A \qquad (2)$$

$$PB > P'B \qquad (3)$$

Με πρόσθεση των (1), (2), (3) κατά μέλη παίρνουμε

$$PA + PB + P\Gamma + P\Delta > P'A + P'B + P'\Gamma + P'\Delta$$

που δείχνει ότι, αν κάποιο σημείο Ρ δεν ανήκει και στα 6 μεσοκάθετα επίπεδα, το άθροισμα των αποστάσεών του από τις κορυφές δεν είναι το ελάχιστο.

Παρατήρηση (i): Αν δύο τρίγωνα έχουν ίδια βάση και ίδιο ύψος, δηλαδή ίδιο εμβαδόν, τότε αυτό που έχει τη μικρότερη περίμετρο είναι το ισοσκελές τρίγωνο.

Απόδειξη: Το συμμετρικό του Δ ως προς την (ε) είναι το Ε επομένως $P\Delta = PE$ και $P'\Delta = P'E$. Αρκεί $P'\Gamma + P'\Delta < P\Gamma + P\Delta \Leftrightarrow P'\Gamma + P'E < P\Gamma + PE \Leftrightarrow \Gamma E < P\Gamma + PE$ που ισχύει από τριγωνική ανισότητα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν, και για κάθε πραγματικό αριθμό $x \neq \frac{\kappa\pi}{2^{\mu}}$ όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$ και $\mu = 0, 1, \ldots, \nu$ ισχύει:

$$\frac{1}{\eta\mu 2x} + \frac{1}{\eta\mu 4x} + \cdots + \frac{1}{\eta\mu 2^{\nu} x} = \sigma\varphi x - \sigma\varphi 2^{\nu} x.$$

Λύση

Η διαφορά $\sigma\varphi x - \sigma\varphi 2^{\nu} x$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned}\sigma\varphi x - \sigma\varphi 2^{\nu} x &= \sigma\varphi x - \sigma\varphi 2x - \cdots + \sigma\varphi 2^{\nu-1} x - \sigma\varphi 2^{\nu} x \\ &= \sum_{i=0}^{\nu-1}\left(\sigma\varphi 2^{i} x - \sigma\varphi 2^{i-1} x\right) \qquad (1)\end{aligned}$$

Όμως ισχύει:

$$\begin{aligned}\sigma\varphi 2^{i} x - \sigma\varphi 2^{i+1} x &= \frac{\sigma\upsilon\nu 2^{i} x}{\eta\mu 2^{i} x} - \frac{\sigma\upsilon\nu 2^{i+1} x}{\eta\mu 2^{i+1} x} \\ &= \frac{\eta\mu\left(2^{i+1} x - 2^{i} x\right)}{\eta\mu 2^{i} x \cdot \eta\mu 2^{i+1} x} \\ &= \frac{1}{\eta\mu 2^{i+1} x}.\end{aligned}$$

Επομένως θα έχουμε

$$\sum_{i=0}^{\nu-1}\left(\sigma\varphi 2^{i} x - \sigma\varphi 2^{i+1} x\right) = \frac{1}{\eta\mu 2x} + \frac{1}{\eta\mu 4x} + \cdots + \frac{1}{\eta\mu 2^{\nu} x} \qquad (2)$$

οπότε από τις (1) και (2) προκύπτει η ζητούμενη ισότητα.

Σημείωση: Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί και με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Να λύσετε το σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{aligned}
&\phantom{|a_2-a_1|x_1+{}} |a_1-a_2|x_2+|a_1-a_3|x_3+|a_1-a_4|x_4=1\\
&|a_2-a_1|x_1 \phantom{{}+|a_2-a_2|x_2} +|a_2-a_3|x_3+|a_2-a_4|x_4=1\\
&|a_3-a_1|x_1+|a_3-a_2|x_2 \phantom{{}+|a_3-a_3|x_3} +|a_3-a_4|x_4=1\\
&|a_4-a_1|x_1+|a_4-a_2|x_2+|a_4-a_3|x_3 \phantom{{}+|a_4-a_4|x_4} =1
\end{aligned}$$

όπου a_1, a_2, a_3, a_4 είναι οι τέσσερις διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί.

Λύση

Είναι γραμμικό σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους και δεν μεταβάλλεται, αν κάνουμε οποιαδήποτε μετάθεση στους δείκτες 1, 2, 3, 4 των συντελεστών a_i με ταυτόχρονη μετάθεση και των δεικτών των

αγνώστων x_1, x_2, x_3, x_4.

Αν υποθέσουμε ότι $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ το σύστημα γράφεται:

$$0x_1 + (a_1 - a_2)x_2 + (a_1 - a_3)x_3 + (a_1 - a_4)x_4 = 1 \quad (1)$$

$$(a_2 - a_1)x_1 + 0x_2 + (a_2 - a_3)x_3 + (a_2 - a_4)x_4 = 1 \quad (2)$$

$$(a_3 - a_1)x_1 + (a_3 - a_2)x_2 + 0x_3 + (a_3 - a_4)x_4 = 1 \quad (3)$$

$$(a_4 - a_1)x_1 + (a_4 - a_2)x_2 + (a_4 - a_3)x_3 + 0x_4 = 1 \quad (4)$$

Με διαδοχικές αφαιρέσεις (2)-(1), (3)-(2), (4)-(3), προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$(a_1 - a_2)(x_1 - x_2 - x_3 - x_4) = 0$$

$$(a_2 - a_3)(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) = 0$$

$$(a_3 - a_4)(x_1 + x_2 + x_3 - x_4) = 0,$$

και αφού a_1, a_2, a_3, a_4 είναι διαφορετικοί μεταξύ τους πραγματικοί αριθμοί, έχουμε:

$$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \quad (5)$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \quad (6)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \quad (7)$$

Με αφαίρεση των (5) και (6) κατά μέλη βρίσκουμε $x_2 = 0$, ενώ με αφαίρεση των (6) και (7) κατά μέλη βρίσκουμε ότι $x_3 = 0$.

Επομένως από την (1) παίρνουμε $x_4 = \dfrac{1}{a_1 - a_4}$, ενώ από την (4) παίρνουμε $x_1 = \dfrac{1}{a_1 - a_4}$. Άρα έχουμε τη λύση

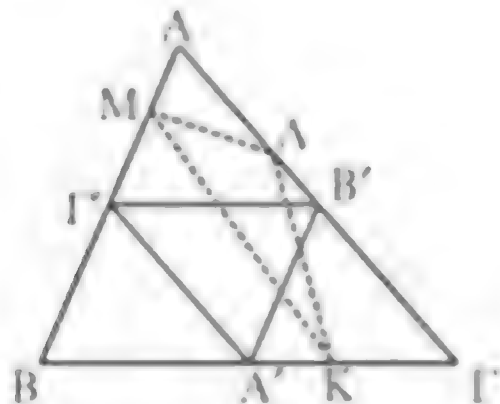
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{a_1 - a_4}, 0, 0, \frac{1}{a_1 - a_4} \right).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

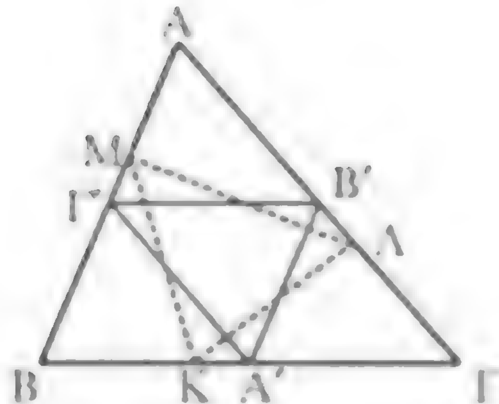
Σε τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε τα σημεία Κ, Λ, Μ τυχαία επάνω στις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα, ώστε κανένα από αυτά να μην συμπίπτει με τις κορυφές του τριγώνου. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν ενός τουλάχιστον των τριγώνων ΑΜΛ, ΒΚΜ, ΓΛΚ είναι μικρότερο ή ίσο με το

$\frac{1}{4}$ **του εμβαδού του ΑΒΓ.**

Λύση



Σχήμα 35(i)



Σχήμα 35(ii)

Αν Α΄, Β΄, Γ΄ είναι μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, είναι γνωστό ότι

$$(\text{Α}'\text{Β}'\text{Γ}') = (\text{ΑΓ}'\text{Β}') = (\text{ΒΑ}'\text{Γ}') = (\text{ΓΑ}'\text{Β}') = \frac{1}{4}(\text{ΑΒΓ}).$$

1η περίπτωση: Τα σημεία Κ, Λ, Μ είναι έτσι επιλεγμένα ώστε τα σημεία Μ, Λ να είναι εσωτερικά των τμημάτων ΑΓ΄, ΑΒ΄ αντιστοίχως, όπως φαίνεται στο σχήμα 35(i). Τότε $(\text{ΑΜΛ}) < (\text{ΑΓ}'\text{Β}') = \frac{1}{4}(\text{ΑΒΓ})$. Το ίδιο μπορεί να συμβεί για το τρίγωνο ΒΜΚ ή για το ΓΚΛ.

2η περίπτωση: Τα σημεία Κ, Λ, Μ είναι τέτοια ώστε όλες οι πλευρές του ΚΛΜ τέμνουν τις πλευρές του Α΄Β΄Γ΄, όπως φαίνεται στο σχήμα 35(ii). Τότε $(\text{Γ}'\text{Α}'\text{Β}') = (\text{ΜΑ}'\text{Β}') < (\text{ΜΑ}'\text{Λ}) < (\text{ΜΚΛ})$.

Η ισότητα ισχύει γιατί από τα Γ΄ και Μ έχουμε το ίδιο ύψος προς την Α΄Β΄.

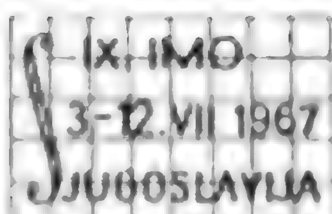
Η πρώτη ανισότητα ισχύει γιατί από τα Β΄ και Λ έχουμε άνισα ύψη προς την ΜΑ΄ με μικρότερο αυτό που έχει κορυφή το Β΄.

Η δεύτερη ανισότητα ισχύει γιατί από τα Α΄ και Κ έχουμε άνισα ύψη προς τη ΜΛ με μικρότερο αυτό που έχει κορυφή το Α΄.

Επομένως $\frac{1}{4}(\text{ΑΒΓ}) < (\text{ΜΚΛ})$.

Γνωρίζουμε επίσης ότι $(\text{ΑΜΛ}) + (\text{ΒΜΚ}) + (\text{ΓΛΚ}) + (\text{ΜΚΛ}) = (\text{ΑΒΓ})$.

Άρα τουλάχιστον ένα από τα ΑΜΛ, ΒΜΚ, ΓΛΚ θα έχει εμβαδόν μικρότερο ή ίσο του $\frac{1}{4}(\text{ΑΒΓ})$.



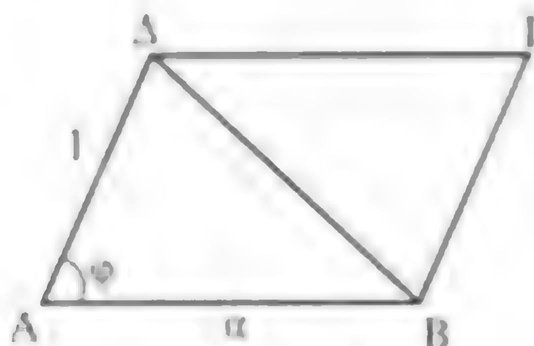
9^{η} Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1967

Τόπος Διοργάνωσης:	Γιουγκοσλαβία (Τσέτινιε)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	V. Dajovic (Παν/μιο Βελιγραδίου)
Συμμετοχή:	12 χώρες με 8 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες συμμετοχές:	Γαλλία, Ηνωμένο Βασίλειο, Ιταλία, Σουηδία
Μέγιστη Βαθμολογία:	42 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες:	Σοβ. Ένωση (275), Αν. Γερμανία (257), Ουγγαρία (251), Ην. Βασίλειο (231), Ρουμανία (214), Βουλγαρία και Τσεχοσλοβακία (159), Γιουγκοσλαβία (136).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω ΑΒΓΔ ένα παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών $AB = \alpha$, $A\Delta = 1$ και με γωνία $B\hat{A}\Delta = \varphi$. Αν το τρίγωνο ΑΒΔ είναι οξυγώνιο, να αποδείξετε ότι οι τέσσερις κύκλοι με κέντρα Α, Β, Γ, Δ και ακτίνα 1 καλύπτουν το παραλληλόγραμμο, αν, και μόνο αν, $\alpha \leq \sigma\upsilon\nu\varphi + \sqrt{3}\eta\mu\varphi$.

Λύση



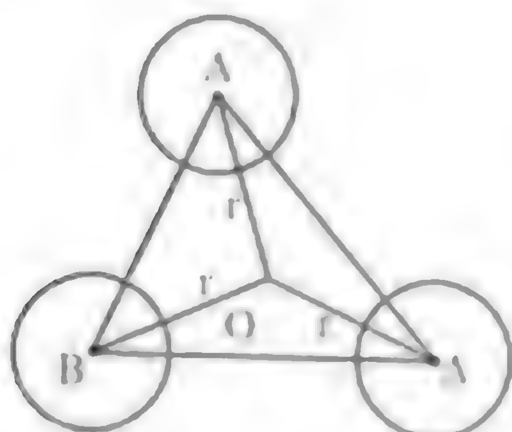
Σχήμα 36

Αν οι κύκλοι με κέντρα Α, Β, Δ και ακτίνα 1 καλύπτουν το τρίγωνο ΑΒΔ τότε προφανώς οι μοναδιαίοι αυτοί κύκλοι με κέντρα Α, Β, Γ, Δ κα-

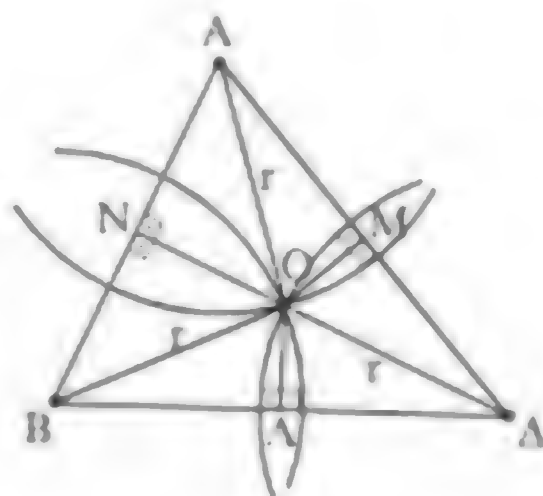
λύπτουν το παραλληλόγραμμο. Για να δούμε πότε αυτό συμβαίνει, αποδεικνύουμε πρώτα ένα λήμμα.

Λήμμα: Έστω ΑΒΔ ένα οξυγώνιο τρίγωνο και r η ακτίνα του περιγεγραμμένου του κύκλου. Τότε οι τρεις κύκλοι ακτίνας s με κέντρα Α, Β, Δ καλύπτουν το ΑΒΔ αν και μόνο αν $s \geq r$.

Απόδειξη



Σχήμα 37(i)



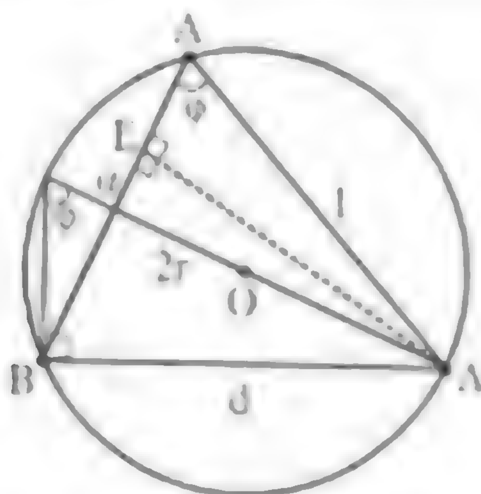
Σχήμα 37(ii)

Αφού το ΑΒΔ είναι οξυγώνιο τρίγωνο, το κέντρο του περιγεγραμένου κύκλου Ο βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο. Οι αποστάσεις του Ο από τις κορυφές Α, Β, Δ είναι όλες προφανώς r, έτσι αν $s < r$ το Ο δεν βρίσκεται μέσα σε κανέναν από τους τρεις ίσους κύκλους ακτίνας s με κέντρα Α, Β, Δ (δες σχήμα 37(i)).

Μένει να αποδείξουμε ότι κύκλοι με κέντρα Α, Β, Δ και ακτίνα r καλύπτουν το τρίγωνο. (Προφανώς το ίδιο θα συμβαίνει και με κύκλους ακτίνας $s > r$).

Οι κύκλοι με κέντρα Α, Β, Δ και ακτίνα r (σχ. 37(ii)) περνούν από το σημείο Ο. Έστω Λ, Μ, Ν οι προβολές του Ο στις πλευρές ΒΔ, ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα. Τότε $AN < AO$ και αντίστοιχα $AM < AO$ από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΝΟ και ΑΜΟ. Άρα το τετράπλευρο ΑΝΟΜ βρίσκεται μέσα στον κύκλο με ακτίνα r και κέντρο Α. Όμοια για τα τετράπλευρα ΒΛΟΝ και ΔΜΟΛ. Άρα οι τρεις κύκλοι με κέντρα Α, Β, Δ και ακτίνα r καλύπτουν το τρίγωνο ΑΒΔ.

Άμεσο συμπέρασμα από το παραπάνω λήμμα είναι ότι οι μοναδιαίοι κύκλοι με κέντρα Α, Β, Δ καλύπτουν το τρίγωνο ΑΒΔ αν, και μόνον τότε αν, $1 \geq r$. Θα δείξουμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με τη σχέση $\alpha \leq \text{συν}\varphi + \sqrt{3}\text{ημ}\varphi$.



Σχήμα 38

Ας σημειώσουμε d το μήκος της πλευράς ΒΔ (σχ. 38). Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$d^2 = 1 + α^2 - 2ασυνφ. \qquad (1)$$

Επίσης από το σχήμα 38, έχουμε ότι $ημφ = \frac{d}{2r}$ άρα $d^2 = 4r^2ημ^2φ$ και από την (1) παίρνουμε:

$$4r^2ημ^2φ = 1 + α^2 - 2ασυνφ. \qquad (2)$$

Επομένως $r \le 1$, αν, και μόνο αν,

$$4ημ^2φ \ge 1 + α^2 - 2ασυνφ \Leftrightarrow$$

$$4ημ^2φ \ge ημ^2φ + συν^2φ + α^2 - 2ασυνφ \Leftrightarrow$$

$$3ημ^2φ \ge α^2 - 2ασυνφ + συν^2φ = (α - συνφ)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}ημφ \ge |α - συνφ|. \qquad (3)$$

Το ύψος ΔΕ βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο ΑΒΔ, αφού αυτό είναι οξυγώνιο. Επομένως $AE < AB \Leftrightarrow συνφ < α$, οπότε η σχέση (3) γράφεται:

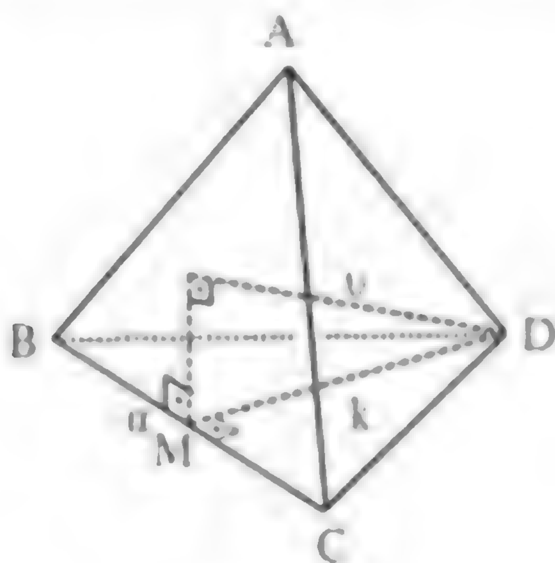
$$\sqrt{3}ημφ \ge α - συνφ \Leftrightarrow α \le \sqrt{3}ημφ + συνφ.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να αποδείξετε ότι, αν μία πλευρά (ακμή) ενός τετραέδρου είναι μεγαλύτερη του 1, τότε ο όγκος του είναι μικρότερος ή ίσος του $\frac{1}{8}$ και αντιστρόφως.

Λύση

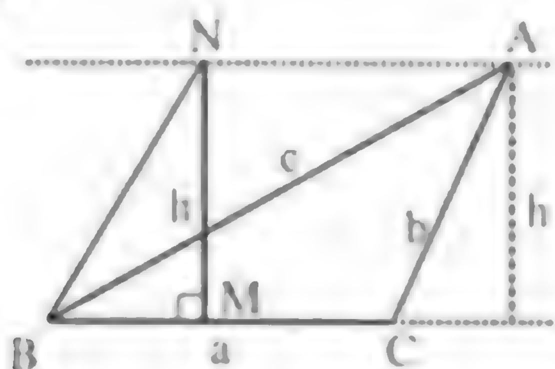
Έστω ότι οι κορυφές του τετραέδρου είναι A, B, C, D με όλες τις ακμές ≤ 1 εκτός της AD.



Σχήμα 39

Ας ονομάσουμε τις πλευρές του $\overset{\Delta}{ABC}$ με a, b, c και το μήκος του ύψους από το A προς την BC με h. Από το μέσο M της BC υψώνουμε μία κάθετη μήκους $MN = h$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι το A και το C βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της MN. Τότε $BN \leq BA$ και υψώνοντας στο τετράγωνο και τα δύο μέρη παίρνουμε $h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \leq c^2$. Επειδή $AB = c \leq 1$ έχουμε $h^2 \leq 1 - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow h \leq \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$.



Σχήμα 40

Αν k είναι το μήκος του ύψους από το D προς την BC στο τρίγωνο DBC του οποίου οι πλευρές έχουν μήκη επίσης μικρότερα ή ίσα του 1, τότε με την ίδια διαδικασία έχουμε $k \leq \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$.

Το ύψος του τετραέδρου από το D στην βάση ABC είναι το πολύ k, ε-

πομένως ο όγκος V του ABCD είναι:

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a\upsilon\right)k\le\frac{1}{6}a\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}\cdot\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}=\frac{1}{6}a\left(1+\frac{a}{2}\right)\left(1-\frac{a}{2}\right).$$

Αλλά είναι $a\le 1$, οπότε θα έχουμε:

$$V\le\frac{1}{6}a\frac{3}{2}\left(1-\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{8}\left(2a-a^2\right)=\frac{1}{8}\left[1-(a-1)^2\right]\le\frac{1}{8}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν k, m, n είναι φυσικοί αριθμοί έτσι ώστε $m+k+1$ είναι ένας πρώτος αριθμός μεγαλύτερος από το $n+1$ και συμβολίσουμε $c_s=s(s+1)$, να αποδείξετε ότι το γινόμενο $(c_{m+1}-c_k)\cdot(c_{m+2}-c_k)\cdots(c_{m+n}-c_k)$ διαιρείται από το γινόμενο $c_1c_2\ldots c_n$.

Λύση

Από τον ορισμό του c_s έχουμε:

$$c_\alpha-c_\beta=\alpha(\alpha+1)-\beta(\beta+1)=\alpha^2-\beta^2+\alpha-\beta=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+1).$$

Άρα οι παράγοντες του πρώτου γινομένου είναι:

$$c_{m+1}-c_k=(m+1-k)(m+k+2)$$

$$c_{m+2}-c_k=(m+2-k)(m+k+3)$$

....

$$c_{m+n}-c_k=(m+n-k)(m+k+n+1)$$

Το γινόμενό τους είναι:

$$\left[(m-k+1)(m-k+2)\cdots(m-k+n)\right]\cdot\left[(m+k+2)(m+k+3)\cdots(m+k+n+1)\right]$$

το οποίο γράφουμε ως $A\cdot B$, A η πρώτη και B η δεύτερη αγκύλη.

Τώρα οι παράγοντες του γινομένου $c_1c_2\ldots c_n$ είναι $c_1=1\cdot 2$, $c_2=2\cdot 3$, ..., $c_n=n(n+1)$ και το γινόμενό τους είναι $n!(n+1)!$

Θα αποδείξουμε ότι το A διαιρείται από το $n!$ και το B διαιρείται από το $(n+1)!$.

Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα: Το γινόμενο οποιωνδήποτε ν διαδοχικών ακεραίων διαιρείται από το $\nu!$

Απόδειξη: Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις. Οι ν διαδοχικοί ακέραιοι (i) είναι όλοι θετικοί, (ii) είναι όλοι αρνητικοί, (iii) περιέχουν το μηδέν.

Η τρίτη περίπτωση είναι εύκολη διότι το γινόμενο τότε είναι μηδέν και το 0 διαιρείται με $\nu!$

Στην πρώτη περίπτωση ας θεωρήσουμε τους ν θετικούς διαδοχικούς ακεραίους $j+1, j+2, \ldots, j+\nu$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\dfrac{(j+1)(j+2)\cdots(j+\nu)}{\nu!} = \dfrac{(j+\nu)!}{j!}\cdot\dfrac{1}{\nu!} = \dbinom{j+\nu}{\nu}$

είναι ακέραιος. Αυτό ισχύει, αφού $\dbinom{j+\nu}{\nu}$ είναι οι συνδυασμοί $j+\nu$ στοιχείων ανά ν και είναι ακέραιος.

Η δεύτερη περίπτωση μπορεί να προκύψει από την πρώτη, αντικαθιστώντας τους αρνητικούς ακεραίους του γινομένου από τις απόλυτες τιμές τους, που δεν επηρεάζουν τις ιδιότητες διαιρετότητας του γινομένου.

Με την βοήθεια του λήμματος τώρα είναι φανερό ότι το A διαιρείται με $n!$. Επίσης το γινόμενο $(m+k+1)B$ των $n+1$ διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με $(n+1)!$.

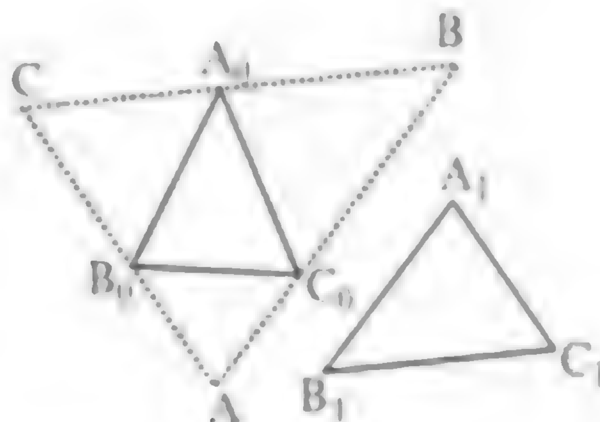
Αλλά έχουμε από την υπόθεση ότι ο $m+k+1$ είναι ένας πρώτος αριθμός μεγαλύτερος από $n+1$, οπότε είναι σχετικά πρώτος με τον $(n+1)!$. Επομένως ο $(n+1)!$ διαιρεί τον B.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Έστω $A_0B_0C_0$ και $A_1B_1C_1$ δύο οξυγώνια τρίγωνα. Να θεωρήσετε όλα τα τρίγωνα ABC τα οποία είναι όμοια προς το $A_1B_1C_1$ (A, B, C και A_1, B_1, C_1 είναι οι κορυφές που αντιστοιχούν στις ομόλογες πλευρές) και περιγράφονται γύρω από το τρίγωνο $A_0B_0C_0$ (όπου A_0 βρίσκεται πάνω στην BC, B_0 πάνω στην CA και C_0 πάνω στην AB). Απ' όλα αυ-

τά τα τρίγωνα, να προσδιορίσετε αυτό με το μεγαλύτερο εμβαδό και να το κατασκευάσετε.

Λύση

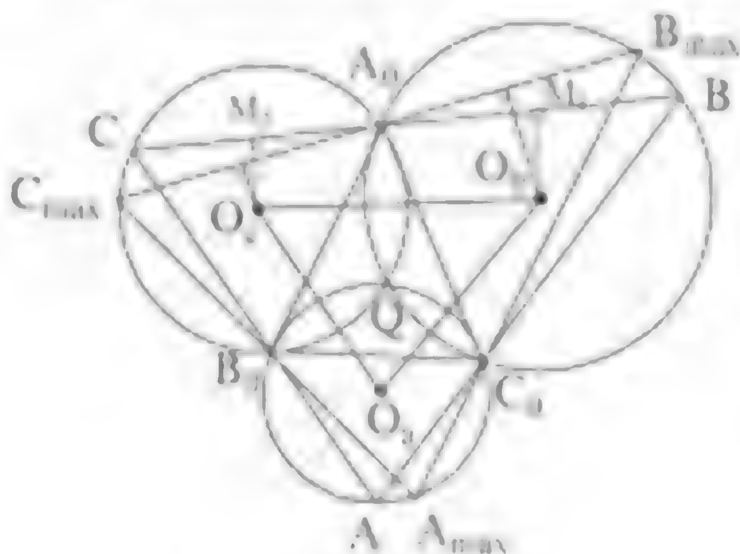


Σχήμα 41

Από τα A_0, B_0, C_0 φέρνουμε αντίστοιχα παράλληλες προς τις B_1C_1, A_1C_1 και A_1B_1. Έτσι δημιουργείται ένα τρίγωνο ABC όμοιο προς το $A_1B_1C_1$. Υποθέστε τώρα, ότι κάθε μία απ' αυτές τις γραμμές περιστρέφεται γύρω από τις κορυφές A_0, B_0, C_0 αντίστοιχα έτσι ώστε οι γωνίες $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ να διατηρούνται σταθερές. Τότε κάθε ένα απ' αυτά τα τρίγωνα ABC θα είναι όμοιο με το $A_1B_1C_1$. Το τρίγωνο με την μεγαλύτερη επιφάνεια είναι εκείνο από τα παραπάνω που έχει πλευρές μέγιστου μήκους.

Για να το βρούμε ακολουθούμε την εξής πορεία:

α) Αφού $\hat{A} = \hat{A}_1$, $\hat{B} = \hat{B}_1$ και $\hat{C} = \hat{C}_1$ φτιάχνουμε τους κύκλους με κέντρα O_a, O_b και O_c και χορδές B_0C_0, A_0C_0 και A_0B_0 αντίστοιχα, των οποίων τα τόξα $\overset{\frown}{B_0AC_0}$, $\overset{\frown}{A_0BC_0}$ και $\overset{\frown}{A_0CB_0}$ βλέπουν τις παραπάνω χορδές με γωνίες $\hat{A}_1$, $\hat{B}_1$ και $\hat{C}_1$, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Σχήμα 42

β) Θα αποδείξουμε τώρα ότι $\overset{\Delta}{O_aO_bO_c} \sim \overset{\Delta}{ABC}$:

Έχουμε $\hat{C} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{A_0QB_0}$ και $O_a\hat{O}_bO_c = \frac{1}{2}\overset{\frown}{A_0Q} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{QB_0}$ γιατί οι O_cO_a και O_cO_b διχοτομούν τα τόξα $\overset{\frown}{B_0Q}$ και $\overset{\frown}{A_0Q}$ αντίστοιχα. Έτσι $\hat{C} = O_a\hat{O}_cO_b$.

Όμοια $\hat{A} = O_c\hat{O}_aO_b$ και $\hat{B} = O_a\hat{O}_bO_c$.

Επομένως $\overset{\Delta}{O_aO_bO_c} \sim \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A_1B_1C_1}$.

γ) Τελικά θα αποδείξουμε ότι το μεγίστου εμβαδού τρίγωνο ABC δια των σημείων A_0, B_0, C_0, είναι εκείνο του οποίου οι πλευρές είναι παράλληλες στις πλευρές του $\overset{\Delta}{O_aO_bO_c}$.

Φέρνουμε τις κάθετες από τα O_b και O_c στην BC και έστω M_1, M_2 τα σημεία τομής. Τότε $M_1M_2 = \frac{1}{2}CB$, αφού η O_bM_1 διχοτομεί την A_0B και η O_cM_2 διχοτομεί την CA_0.

Η M_1M_2 είναι η προβολή του O_bO_c πάνω στην BC και γίνεται μεγαλύτερη όταν $BC \parallel O_bO_c$.

Αφού $\overset{\Delta}{O_aO_bO_c} \sim \overset{\Delta}{ABC}$ τότε και οι τρεις πλευρές του τριγώνου παίρνουν την μεγαλύτερη τιμή τους όταν είναι παράλληλες προς τις πλευρές του $\overset{\Delta}{O_aO_bO_c}$.

Τελικά για να κατασκευάσουμε το τρίγωνο με το μεγαλύτερο εμβαδό που είναι όμοιο προς το $\overset{\Delta}{A_1B_1C_1}$ και οι πλευρές του διέρχονται από τα A_0, B_0, C_0, πρώτα κατασκευάζουμε τους κύκλους με κέντρα O_a, O_b, O_c, μετά το τρίγωνο $\overset{\Delta}{O_aO_bO_c}$ και τέλος τις παράλληλες από τα A_0, B_0, C_0 προς τις O_cO_b, O_aO_c, O_bO_a αντίστοιχα. Έτσι κατασκευάζονται οι πλευρές BC, AC και AB του ζητούμενου τριγώνου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Να θεωρήσετε την ακολουθία (c_n), με γενικό όρο

$$c_n = a_1^n + a_2^n + \cdots + a_8^n, \ n = 1,2,3,\ldots,$$

όπου $a_1, a_2, \ldots, a_8$ είναι πραγματικοί αριθμοί, όχι όλοι μηδέν. Να υποθέσετε ότι ένας άπειρος αριθμός όρων της ακολουθίας (c_n) είναι ίσος με το μηδέν. Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς n για τους οποίους $c_n = 0$.

Λύση

Υποθέτουμε ότι για τους αριθμούς $a_1, a_2, \ldots, a_8$ ισχύει ότι $|a_1| \geq |a_2| \geq \cdots \geq |a_8|$. Επειδή είναι $a_1 \neq 0$, οι παραστάσεις

$$c_n = a_1^n + a_2^n + \cdots + a_8^n \text{ και } \frac{c_n}{a_1^n} = 1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n + \cdots + \left(\frac{a_8}{a_1}\right)^n$$

μηδενίζονται για τις ίδιες ακριβώς τιμές του n, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $a_1 = 1 \geq |a_2| \geq \cdots \geq |a_8|$ και

$$c_n = 1 + a_2^n + \cdots + a_8^n.$$

Για άρτιες τιμές του n έχουμε ότι $c_n > 0$, αφού όλοι οι όροι του αθροίσματος που ορίζει το γενικό όρο c_n είναι μη αρνητικοί στην περίπτωση αυτή.

Έστω ότι ο n είναι περιττός, $n = 2m+1, m \in \mathbb{N}$.

Ας υποθέσουμε ότι k όροι από τους a_i είναι ίσοι με 1 και ότι ℓ όροι από τους a_i είναι ίσοι με -1. Τότε θα είναι

$$c_{2m+1} = k - \ell + \sum_{i=k+\ell+1}^{8} a_i^{2m+1} \quad (1)$$

Αφού οι αριθμοί a_i στο άθροισμα της σχέσης (1) έχουν απόλυτη τιμή μικρότερη του 1, θα έχουμε ότι

$$\lim_{m\to+\infty} a_i^{2m+1} = 0, \ i = k+\ell+1, \ldots, 8 \text{ και } \lim_{m\to+\infty} \sum_{i=k+\ell+1}^{8} a_i^{2m+1} = 0.$$

Άρα θα έχουμε ότι $\lim_{m\to+\infty} c_{2m+1} = k-\ell$ και αφού άπειρο πλήθος όρων της ακολουθίας c_{2m+1} ισούται με 0, έπεται ότι $k=\ell$. Πράγματι, αν ίσχυε ότι $k-\ell \neq 0$, τότε από την ισότητα $\lim_{m\to+\infty} c_{2m+1} = k-\ell \neq 0$ προκύπτει ότι για $\varepsilon = \frac{|k-\ell|}{2}$ υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $m > m_0$ να ισχύει:

$$k-\ell-\frac{|k-\ell|}{2} < c_{2m+1} < k-\ell+\frac{|k-\ell|}{2},$$

δηλαδή οι όροι της ακολουθίας c_{2m+1} μπορούν να μηδενίζονται μόνον για κάποιες τιμές του m από 1 μέχρι m_0, που είναι άτοπο.

Έτσι έχουμε καταλήξει στο συμπέρασμα ότι οι όροι με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή από τους a_i έχουν ανά ζεύγη αντίθετα πρόσημα.

Η σχέση (1) γίνεται: $c_{2m+1} = a_{2k+1}^{2m+1} + \cdots + a_8^{2m+1}$ και προχωρώντας όπως παραπάνω, βρίσκουμε ότι οι όροι από αυτούς που απέμειναν με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή θα έχουν ανά ζεύγη αντίθετα πρόσημα κ.ο.κ..

Επομένως η ισότητα $c_n = 0$ ισχύει για όλες τις περιττές τιμές του n.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Σε μια αθλητική συνάντηση επρόκειτο να δοθούν m μετάλλια σε n ημέρες $(n>1)$. Την πρώτη μέρα των αγώνων δόθηκαν ένα μετάλλιο και το $1/7$ των υπολοίπων $m-1$ μεταλλίων. Την δεύτερη μέρα των αγώνων δόθηκαν δύο μετάλλια και το $1/7$ των μεταλλίων που απέμειναν, και κατ' αυτό τον τρόπο συνεχίστηκε η απονομή μεταλλίων. Την τελευταία μέρα δόθηκαν τα υπόλοιπα n μετάλλια που απέμειναν.

Πόσες μέρες διήρκεσε η αθλητική συνάντηση και πόσα μετάλλια δόθηκαν συνολικά;

Λύση

Έστω u_k ο αριθμός των μεταλλίων που έχουν απομείνει στην αρχή της k-ημέρας των αγώνων. Τότε τα μετάλλια που θα δοθούν αυτήν την ημέρα είναι $k+\frac{1}{7}(u_k-k)$ και θα απομείνουν $u_k-\left[k+\frac{1}{7}(u_k-k)\right]=\frac{6}{7}(u_k-k)$.

Έτσι στην αρχή της επόμενης $k+1$ ημέρας υπάρχουν $u_{k+1}=\frac{6}{7}(u_k-k)$ μετάλλια. Από την σχέση αυτή έχουμε

$$u_k=\frac{7}{6}u_{k+1}+k \quad \text{ή} \quad u_k-\frac{7}{6}u_{k+1}=k. \qquad (1)$$

Γνωρίζουμε ακόμα ότι $u_n=n$ και $u_1=m$. Από την (1) έχουμε το παρακάτω σύστημα:

$$m-\left(\frac{7}{6}\right)u_2=1$$

$$u_2-\left(\frac{7}{6}\right)u_3=2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{n-2}-\left(\frac{7}{6}\right)u_{n-1}=n-2$$

$$u_{n-1}-\left(\frac{7}{6}\right)u_n=n-1.$$

Πολλαπλασιάζουμε τις σχέσεις αυτές με 1, $7/6$, ..., $(7/6)^{n-3}$, $(7/6)^{n-2}$, αντιστοίχως και στην συνέχεια τις προσθέτουμε κατά μέλη, οπότε λαμβάνουμε

$$m-\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}n=1+2\left(\frac{7}{6}\right)+3\left(\frac{7}{6}\right)^2+\cdots+(n-1)\left(\frac{7}{6}\right)^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow m=1+2\left(\frac{7}{6}\right)+3\left(\frac{7}{6}\right)^2+\cdots+(n-1)\left(\frac{7}{6}\right)^{n-2}+n\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}. \qquad (2)$$

Το πρόβλημα τώρα είναι να βρούμε όλους τους φυσικούς αριθμούς $n\geq 2$ για τους οποίους το δεύτερο μέλος είναι ακέραιος αριθμός.

Πολλαπλασιάζοντας την (2) με $7/6$ παίρνουμε:

$$\frac{7}{6}m=\frac{7}{6}+2\left(\frac{7}{6}\right)^2+3\left(\frac{7}{6}\right)^3+\cdots+(n-1)\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}+n\left(\frac{7}{6}\right)^n$$

και αφαιρώντας αυτήν από την (2) έχουμε:

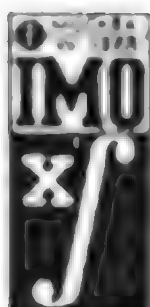
$$-\frac{1}{6}m=\left[1+\frac{7}{6}+\left(\frac{7}{6}\right)^2+\cdots+\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}\right]-n\left(\frac{7}{6}\right)^n. \qquad (3)$$

Το άθροισμα μέσα στις αγκύλες είναι γεωμετρική πρόοδος και η τιμή του είναι $\dfrac{\left(\frac{7}{6}\right)^n-1}{\frac{7}{6}-1}=6\left[\left(\frac{7}{6}\right)^n-1\right]$. Αντικαθιστώντας αυτό στην (3) και ταυτόχρονα πολλαπλασιάζοντας επί (-6) παίρνουμε:

$$m=-36\left[\left(\frac{7}{6}\right)^n-1\right]+6n\left(\frac{7}{6}\right)^n=36-\frac{(n-6)\cdot 7^n}{6^{n-1}}.$$

Αυτό είναι ακέραιος, αν ο 6^{n-1} διαιρεί τον $(n-6)\cdot 7^n$ και αφού $(6,7)=1$ αυτό συμβαίνει όταν ο 6^{n-1} να διαιρεί τον $n-6$. Αλλά για $n>1$ έχουμε $6^{n-1}>|n-6|$ και έτσι η μόνη δυνατότητα για να διαιρεί ο 6^{n-1} τον $n-6$ είναι να έχουμε $n-6=0$. Αυτό δίνει $n=6$ και $m=36$.

Άρα η αθλητική συνάντηση διήρκεσε 6 ημέρες και τα μετάλλια που δόθηκαν ήταν 36.



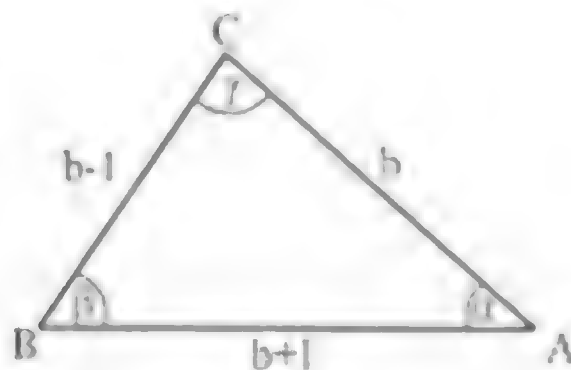
10η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1968

Τόπος Διοργάνωσης:	Σοβιετική Ένωση (Μόσχα)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	A. Markusevic (Παν/μιο Μόσχας)
Συμμετοχή:	12 χώρες με 8 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες συμμετοχές:	--
Μέγιστη Βαθμολογία:	40 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες:	Αν. Γερμανία (304), Σοβ. Ένωση (298), Ουγγαρία (291), Ηνωμένο Βασίλειο (263), Πολωνία (262), Σουηδία (256), Τσεχοσλοβακία (248), Ρουμανία (208).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, και μόνο ένα, τρίγωνο του οποίου τα μήκη των πλευρών είναι διαδοχικοί ακέραιοι και μία εκ των γωνιών του είναι διπλάσια της άλλης.

Λύση



Σχήμα 43

Σημειώνουμε με $b-1, b, b+1$ τα μήκη των πλευρών του τριγώνου και με α, β, γ τις απέναντι γωνίες.

Προφανώς $b>1$ και $\alpha<\beta<\gamma$.

Χρησιμοποιώντας τον νόμο των συνημιτόνων, παίρνουμε

$$\text{συν}\alpha = \frac{b^2 + (b+1)^2 - (b-1)^2}{2b(b+1)} = \frac{b+4}{2(b+1)} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2(b+1)} \quad (1)$$

και ομοίως

$$\text{συν}\beta = \frac{b^2+2}{2(b^2-1)}, \ \text{συν}\gamma = \frac{b-4}{2(b-1)}. \quad (2)$$

Σημειώνουμε εδώ ότι για οποιονδήποτε ακέραιο b τα παραπάνω είναι ρητοί αριθμοί. Καθώς ο b αυξάνει το συνα μειώνεται (ο παρανομαστής της σχέσης (1) μεγαλώνει διπλασιαζόμενος σε σχέση με τον αριθμητή) και έτσι η γωνία α αυξάνεται. Για $b \geq 7$ έχουμε $\text{συν}\alpha \leq \frac{11}{16} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ έτσι $\alpha > 45°$. Αλλά τότε $\beta > 45°$ και έτσι $\gamma < 90°$, οπότε καμία γωνία δεν είναι διπλάσια της άλλης.

Έτσι εμείς χρειάζεται να κοιτάξουμε μόνο για τις τιμές $b = 2, 3, 4, 5, 6$.

Αν $\gamma = 2\alpha$ ή $\gamma = 2\beta$ ή $\beta = 2\alpha$ έχουμε αντίστοιχα $\text{συν}\gamma = 2\text{συν}^2\alpha - 1$, ή $\text{συν}\gamma = 2\text{συν}^2\beta - 1$ ή $\text{συν}\beta = 2\text{συν}^2\alpha - 1$ και έτσι

$$\text{συν}\alpha = \sqrt{\frac{1+\text{συν}\gamma}{2}} \ \text{ή} \ \text{συν}\beta = \sqrt{\frac{1+\text{συν}\gamma}{2}} \ \text{ή} \ \text{συν}\alpha = \sqrt{\frac{1+\text{συν}\beta}{2}}.$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι για b ακέραιο οι αριθμοί συνα, συνβ, συνγ είναι ρητοί.

Άρα πρέπει $\frac{1+\text{συν}\gamma}{2}$ ή $\frac{1+\text{συν}\beta}{2}$ να είναι τετράγωνα κλασματικών αριθμών.

Αλλά για $b = 3, 4, 5, 6$ οι τιμές του $\frac{1+\text{συν}\beta}{2}$ υπολογιζόμενες από τη σχέση (2) είναι $\frac{27}{32}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{25}{32}$, $\frac{27}{35}$ και εκείνες του $\frac{1+\text{συν}\gamma}{2}$ είναι $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{3}{5}$, ενώ για b=2 έχουμε συνγ=-1, που είναι άτοπο.

Η μόνη που είναι τετράγωνο είναι η τιμή $\frac{9}{16}$ για $b = 5$ και $\text{συν}\alpha = \frac{3}{4}$.

Άρα το μόνο τρίγωνο που υπάρχει, έχει πλευρές 4, 5, 6 και $\gamma = 2\alpha$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς x, που είναι τέτοιοι ώστε το γινόμενο των ψηφίων τους (στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης) να είναι ίσο με $x^2-10x-22$.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός x έχει n ψηφία τότε γράφεται

$$x=a_0+a_1 10+a_2 10^2+\cdots+a_{n-1}10^{n-1}.$$

Το γινόμενο των ψηφίων του το συμβολίζουμε $P(x)$, οπότε

$$P(x)=a_0a_1a_2\ldots a_{n-1}=x^2-10x-22.$$

Επειδή ισχύει $P(x)=(a_0a_1a_2\ldots a_{n-2})a_{n-1}\leq 9^{n-1}a_{n-1}<10^{n-1}a_{n-1}\leq x$, θα έχουμε την ανίσωση

$$x^2-10x-22<x,\ x\in\mathbb{N},$$

$$\Leftrightarrow x^2-11x-22<0,\ x\in\mathbb{N},$$

$$\Leftrightarrow \frac{11-\sqrt{209}}{2}<x<\frac{11+\sqrt{209}}{2},\ x\in\mathbb{N},$$

$$\Leftrightarrow x\in\{0,1,2,\ldots,11,12\},\text{ αφού } 14<\sqrt{209}<15.$$

(i) Αν ο x είναι μονοψήφιος, τότε $x=a_0$ οπότε θα έχουμε

$$P(x)=a_0=x=x^2-10x-22\Leftrightarrow x^2-11x-22=0.$$

Η εξίσωση όμως αυτή δεν έχει ακέραιες λύσεις. Άρα ο x δεν είναι μονοψήφιος.

(ii) Αν ο $x=10$, τότε $P(x)=1\cdot 0=0$ και η ισότητα (1) γίνεται:

$$P(x)=x^2-10x-22\Leftrightarrow 0=x^2-10x-22,$$

η οποία δεν αληθεύει για $x=10$.

(iii) Αν ο $x=11$ τότε $P(x)=1\cdot 1=1$ και η ισότητα (1) γίνεται:

$$P(x)=x^2-10x-22\Leftrightarrow 1=x^2-10x-22,$$

η οποία δεν αληθεύει για $x = 11$.

(iv) Αν ο $x = 12$ τότε $P(x) = 1 \cdot 2 = 2$ και η ισότητα (1) γίνεται:

$$P(x) = x^2 - 10x - 22 \Leftrightarrow 2 = x^2 - 10x - 22,$$

η οποία και αληθεύει για $x = 12$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Θεωρούμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$\alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = x_2$$
$$\alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma = x_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha x_{n-1}^2 + \beta x_{n-1} + \gamma = x_n$$
$$\alpha x_n^2 + \beta x_n + \gamma = x_1$$

με αγνώστους $x_1, x_2, \ldots, x_n$ και $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$. Έστω $\Delta = (\beta - 1)^2 - 4\alpha\gamma$. Να αποδείξετε ότι γι' αυτό το σύστημα:

(i) Αν $\Delta < 0$, δεν υπάρχει καμία λύση.

(ii) Αν $\Delta = 0$, υπάρχει ακριβώς μία λύση.

(iii) Αν $\Delta > 0$, υπάρχουν περισσότερες από μία λύσεις.

Λύση

Προσθέτουμε όλες τις εξισώσεις κατά μέλη και παίρνουμε:

$$\alpha \sum_1^n x_i^2 + \beta \sum_1^n x_i + n\gamma = \sum_1^n x_i \Leftrightarrow \alpha \sum_1^n x_i^2 + (\beta - 1) \sum_1^n x_i + n\gamma = 0. \quad (1)$$

Θεωρούμε τώρα την παραβολή

$$Q(y) = \alpha y^2 + (\beta - 1) y + \gamma \quad (2)$$

και παρατηρούμε ότι η (1) είναι ισοδύναμη με την

$$Q(x_1) + Q(x_2) + \cdots + Q(x_n) = 0. \quad (3)$$

$\Delta=(\beta-1)^2-4\alpha\gamma$ είναι η διακρίνουσα του τριωνύμου (2).

(i) Αν $\Delta<0$ η (2) δεν μηδενίζεται για καμία πραγματική τιμή και το πρόσημό της εξαρτάται από το πρόσημο του α, $Q(y)>0$ αν $\alpha>0$ ή $Q(y)<0$, αν $\alpha<0$.

Επομένως όλοι οι προσθετέοι της εξίσωσης (3) είναι θετικοί ή αρνητικοί, οπότε αυτή και η ισοδύναμή της (1) δεν έχει λύση. Άρα το σύστημα δεν έχει λύση.

(ii) Αν $\Delta=0$ η (2) μηδενίζεται για μία μόνο τιμή $y=-\frac{\beta-1}{2\alpha}$ και το ίδιο συμβαίνει για κάθε προσθετέο της (3).

Άρα το σύστημα έχει μία μόνο λύση την $x_1=x_2=\cdots=x_n=-\frac{\beta-1}{2\alpha}$.

(iii) Αν $\Delta>0$ η (2) μηδενίζεται για δύο διαφορετικές τιμές y_1, y_2 και το ίδιο συμβαίνει για κάθε προσθετέο της (3).

Άρα το σύστημα έχει δύο διαφορετικές λύσεις τις $x_1=x_2=\cdots=x_n=y_1$ και $x_1=x_2=\cdots=x_n=y_2$.

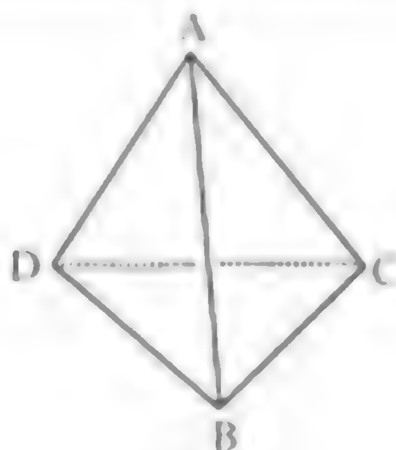
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να αποδείξετε ότι σε κάθε τετράεδρο υπάρχει μία κορυφή, ώστε οι ακμές που συναντώνται σε αυτήν έχουν μήκη, όσο οι πλευρές ενός τριγώνου.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι τρία τμήματα με μήκη α, β, γ αποτελούν πλευρές τριγώνου, αν, και μόνο αν, το άθροισμα οποιωνδήποτε δύο απ' αυτά είναι μεγαλύτερο του τρίτου.

Επομένως τρία τμήματα δεν αποτελούν πλευρές τριγώνου, αν το ένα από αυτά (ας υποθέσουμε το μεγαλύτερο) είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το άθροισμα των δύο άλλων.



Σχήμα 44

Θεωρούμε το τετράεδρο του σχήματος και υποθέτουμε ότι AB είναι η μεγαλύτερη ακμή.

Αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει κορυφή τέτοια που να ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος τότε για την κορυφή A θα έχουμε $AB \geq AD + AC$ και για την κορυφή B θα έχουμε $AB \geq BC + BD$ και με πρόσθεση κατά μέλη

$$2AB \geq AD + AC + BC + BD. \quad (1)$$

Από το τρίγωνο ABC όμως έχουμε ότι: $AB < AC + BC$ και από το τρίγωνο ABD έχουμε ότι: $AB < AD + BD$ οπότε με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$2AB < AD + AC + BC + BD. \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) καταλαβαίνουμε ότι έχουμε μία αντίφαση. Επομένως υπάρχει μία τουλάχιστον κορυφή που οι ακμές της να αποτελούν πλευρές τριγώνου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Θεωρούμε μία πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε η εξίσωση:

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}$$

με a σταθερό θετικό πραγματικό αριθμό, να επαληθεύεται για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

(i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική.

(ii) Για $a = 1$, να δώσετε ένα παράδειγμα μιας συνάρτησης f με τις απαιτούμενες ιδιότητες.

Λύση

(i) Από την δοθείσα εξίσωση προκύπτει ότι $f(x+a)\geq\frac{1}{2}$, οπότε θα ισχύει και $f(x)\geq\frac{1}{2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έτσι, αν θέσουμε

$$g(x)=f(x)-\frac{1}{2} \qquad (1)$$

έχουμε $g(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Η δοθείσα συναρτησιακή εξίσωση τώρα γράφεται:

$$g(x+a)=\sqrt{g(x)+\frac{1}{2}-[g(x)]^2-g(x)-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}-[g(x)]^2}.$$

Τετραγωνίζοντας παίρνουμε:

$$[g(x+a)]^2=\frac{1}{4}-[g(x)]^2 \qquad (2)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, και αν θέσουμε όπου x το $x+a$ έχουμε $[g(x+2a)]^2=\frac{1}{4}-[g(x+a)]^2$, οπότε $[g(x+2a)]^2=[g(x)]^2$. Επειδή $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, παίρνουμε $g(x+2a)=g(x)$ και με την βοήθεια της (1) παίρνουμε $f(x+2a)-\frac{1}{2}=f(x)-\frac{1}{2}\Leftrightarrow f(x+2a)=f(x)$. Αυτό δείχνει ότι η f είναι περιοδική με περίοδο $T=2a>0$.

(ii) Για να βρούμε όλες τις λύσεις, θέτουμε $h(x)=4[g(x)]^2-\frac{1}{2}$ και γράφουμε την (2) στην μορφή:

$$h(x+a)=-h(x) \qquad (3)$$

Προφανώς, αν $h(x)\geq\frac{1}{2}$ και ικανοποιεί την σχέση (3), τότε η $g(x)$ ικανοποιεί την σχέση (2).

Ένα παράδειγμα για $a=1$ δίνεται από την συνάρτηση $h(x)=\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{1}{2}$ που ικανοποιεί την (3) με $a=1$. Για αυτήν την h είναι

$g(x)=\frac{1}{2}\left|\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right|$ και η $f(x)=\frac{1}{2}\left|\eta\mu\frac{\pi x}{2}\right|+\frac{1}{2}$, ικανοποιεί τις απαιτούμενες συνθήκες.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Για κάθε φυσικό αριθμό n, να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\cdots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]+\cdots$$

Σημείωση: Το σύμβολο $[x]$ ονομάζεται ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού x και είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που δεν υπερβαίνει τον x. Ισχύει $x-1<[x]\leq x$.

Λύση

Για κάθε φυσικό αριθμό n θα δείξουμε ότι το δοθέν άθροισμα δεν απειρίζεται, δηλαδή είναι πεπερασμένος αριθμός και η τιμή του είναι $[n]=n$.

Ο πρώτος ισχυρισμός είναι αληθής, γιατί αν πάρουμε κατάλληλο φυσικό αριθμό k τέτοιο ώστε $n<2^k$ έχουμε $n+2^k<2^k+2^k=2^{k+1}$, οπότε $\frac{n+2^k}{2^{k+1}}<1$ και επομένως $\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=0$. Άρα και οι επόμενοι προσθετέοι είναι 0.

Θα δείξουμε τον δεύτερο ισχυρισμό με την βοήθεια του επόμενου λήμματος:

Λήμμα: $\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x+1}{2}\right]=[x]$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Απόδειξη: Αν ο αριθμός x αυξάνεται κατά 2, και τα δύο μέλη της ισότητας αυξάνουν κατά 2. Θα αποδείξουμε λοιπόν την ισότητα στο διάστημα $0\leq x<2$. Σ' αυτό το διάστημα έχουμε $\left[\frac{x}{2}\right]=0$, οπότε πρέπει να αποδείξουμε ότι $\left[\frac{x+1}{2}\right]=[x]$.

α) $0 \le x < 1$, έχουμε $\left[\frac{x+1}{2}\right] = [x] = 0$.

β) Αν $1 \le x < 2$, έχουμε $\left[\frac{x+1}{2}\right] = [x] = 1$.

Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα με την μορφή $[x] - \left[\frac{x}{2}\right] = \left[\frac{x+1}{2}\right]$.

Αν στη θέση του x διαδοχικά θέσουμε n, $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2^2}$ ..., έχουμε

$$[n] - \left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{n+1}{2}\right]$$

$$\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{2^2}\right] = \left[\frac{\frac{n}{2}+1}{2}\right] = \left[\frac{n+2}{2^2}\right]$$

$$\left[\frac{n}{2^2}\right] - \left[\frac{n}{2^3}\right] = \left[\frac{\left(\frac{n}{2^2}\right)+1}{2}\right] = \left[\frac{n+2^2}{2^3}\right]$$

....

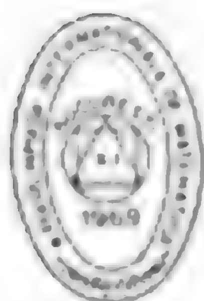
$$\left[\frac{n}{2^k}\right] - \left[\frac{n}{2^{k+1}}\right] = \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right].$$

Ο ακέραιος k στην τελευταία γραμμή είναι τέτοιος ώστε $2^k \le n < 2^{k+1}$, οπότε $\left[\frac{n}{2^k}\right] \ne 0$, αλλά $\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right] = 0$.

Με πρόσθεση των παραπάνω ισοτήτων παίρνουμε

$$[n] - \left[\frac{n}{2^{k+1}}\right] = \left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{2^2}\right] + \cdots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right],$$

που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $\sum_{0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] = [n] = n$, αφού ο n είναι φυσικός αριθμός.



11η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1969

Τόπος Διοργάνωσης:	Ρουμανία (Βουκουρέστι)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	G. Moisil (Ακαδημία Επιστημών Βουκουρεστίου)
Συμμετοχή:	14 χώρες με 8 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες συμμετοχές:	Βέλγιο, Ολλανδία
Μέγιστη Βαθμολογία:	40 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες:	Ουγγαρία (247), Αν. Γερμανία (240), Σοβ. Ένωση (231), Ρουμανία (219), Ηνωμένο Βασίλειο (193), Γιουγκοσλαβία (181), Τσεχοσλοβακία (170).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειροι φυσικοί αριθμοί a με την ιδιότητα: «Ο αριθμός $z = n^4 + a$ δεν είναι πρώτος για κανένα φυσικό αριθμό n».

Λύση

Θα ψάξουμε για φυσικούς αριθμούς a τέτοιους που θα μας επιτρέψουν να παραγοντοποιήσουμε το άθροισμα $n^4 + a$.

Θεωρούμε τους φυσικούς $a = 4k^4$, $k = 2,3,\ldots$

Τότε $z = n^4 + 4k^4 = n^4 + 4n^2k^2 + 4k^4 - 4n^2k^2 = \left(n^2 + 2k^2\right)^2 - \left(2nk\right)^2$.

Άρα $z = \left(n^2 + 2k^2 + 2nk\right)\left(n^2 + 2k^2 - 2nk\right)$.

Αρκεί να δείξουμε ότι και οι δύο παράγοντες υπερβαίνουν το 1 για κάθε

φυσικό $n \geq 1$, όταν $k = 2,3,\ldots$

Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$n^2 + 2k^2 + 2nk \geq n^2 + 2k^2 - 2nk = (n-k)^2 + k^2 \geq k^2 \geq 4,$$

οπότε κάθε παράγοντας του z είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 4 για άπειρες τιμές $k = 2,3,\ldots$. Άρα για τις τιμές $a = 4k^4$, $k = 2,3,\ldots$ ο $z = n^4 + a$ δεν είναι πρώτος.

Σημείωση: Αν επιλέξουμε την τιμή $k = 1$ ο z γράφεται $z = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$ και παρατηρούμε ότι για $n = 1$ έχουμε $z = 5 \cdot 1 = 5$, που είναι πρώτος. Για $n \geq 2$ πάλι ο $z = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$ είναι σύνθετος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu(a_1 + x) + \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(a_2 + x) + \frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu(a_3 + x) + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\sigma\upsilon\nu(a_n + x),$$

όπου $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί και $x \in \mathbb{R}$.

Αν $f(x_1) = f(x_2) = 0$, να αποδείξετε ότι $x_2 - x_1 = m\pi$, για κάποιον ακέραιο m.

Λύση

Με την βοήθεια της σχέσης $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta$ η $f(x)$ μπορεί να γραφτεί:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \sigma\upsilon\nu(a_k + x) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} (\sigma\upsilon\nu a_k \,\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu a_k \,\eta\mu x) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \sigma\upsilon\nu a_k \right) \sigma\upsilon\nu x - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \eta\mu a_k \right) \eta\mu x = \\ &= A\sigma\upsilon\nu x - B\eta\mu x, \end{aligned}$$

όπου

$$A=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma\upsilon\nu a_k}{2^{k-1}} \quad \text{και} \quad B=\sum_{k=1}^{n}\frac{\eta\mu a_k}{2^{k-1}}.$$

Οι αριθμοί Α και Β δεν μπορούν να είναι ταυτόχρονα 0 γιατί τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αυτό είναι αδύνατο, αφού για $x=-a_1$ έχουμε:

$$f(-a_1)=1+\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(a_2-a_1)+\frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu(a_3-a_1)+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\sigma\upsilon\nu(a_n-a_1)$$

οπότε $f(-a_1)\geq 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}>0$.

Έτσι για την $f(x)=A\sigma\upsilon\nu x-B\eta\mu x$ δίνεται ότι $f(x_1)=A\sigma\upsilon\nu x_1-B\eta\mu x_1=0$ και $f(x_2)=A\sigma\upsilon\nu x_2-B\eta\mu x_2=0$, οπότε αν $A\neq 0$ έχουμε $\sigma\varphi x_1=\sigma\varphi x_2=\frac{B}{A}$, από την οποία έχουμε ότι $x_2-x_1=m\pi$ με $m\in\mathbb{Z}$. Αν $A=0$ τότε $B\neq 0$, οπότε θα έχουμε $\eta\mu x_1=\eta\mu x_2=0$, από την οποία έπεται ότι $x_2-x_1=m\pi$, $m\in\mathbb{Z}$.

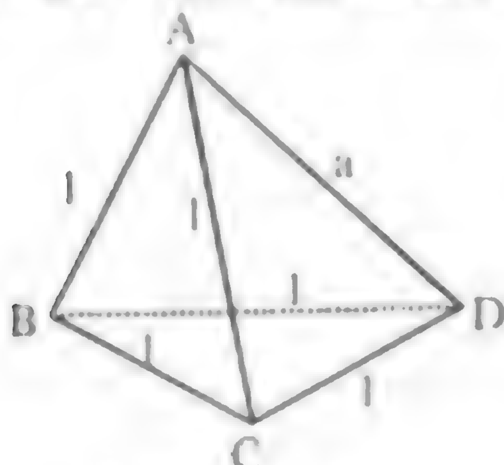
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Για κάθε τιμή του $k=1,2,3,4,5$ βρείτε αναγκαίες και ικανές συνθήκες για τον αριθμό $a>0$ έτσι ώστε να υπάρχει ένα τετράεδρο με k ακμές μήκους a, και με τις υπόλοιπες $6-k$ ακμές μήκους 1.

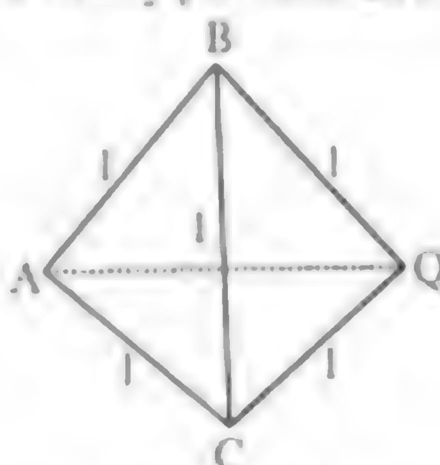
Λύση

Σημειώνουμε το τετράεδρο με Τ και εξετάζουμε κάθε τιμή του k ξεχωριστά.

α) $k=1$. Ας θεωρήσουμε ότι το Τ έχει κορυφές A, B, C, D με $AB=BC=AC=BD=CD=1$ και $AD=a$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

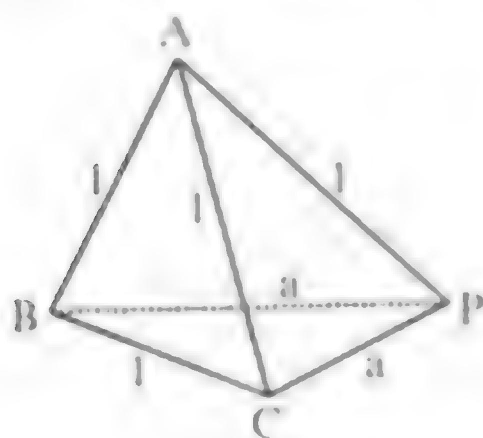


Σχήμα 45(i)

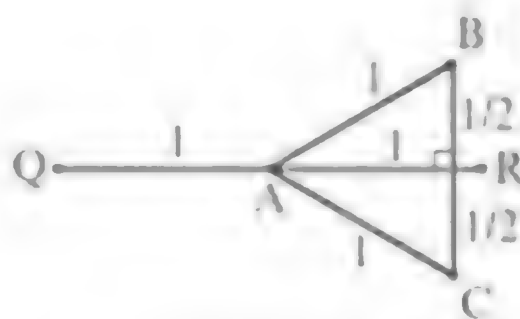


Σχήμα 45(ii)

Θεωρούμε τον επίπεδο ρόμβο ABQC όπως φαίνεται στο σχήμα (2). Τότε $AQ=\sqrt{3}$. Το D βρίσκεται στην τομή των σφαιρών ακτίνας 1, με κέντρα B και C. Αφού η τομή των σφαιρών είναι κύκλος, το D βρίσκεται στον κύκλο με διάμετρο AQ (εκτός των σημείων A ή Q) με το επίπεδο του κύκλου να είναι κάθετο στο επίπεδο του ρόμβου. Επομένως $0<AD<\sqrt{3}$, δηλαδή $0<a<\sqrt{3}$.



Σχήμα 46(i)



Σχήμα 46(ii)

β) $k=2$. Εδώ θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1η: Οι δύο ακμές μήκους a έχουν μια κοινή κορυφή, έστω P, και οι άλλες κορυφές του T ας είναι A, B, C. Υποθέτουμε ότι $AP=1$, ενώ $PB=PC=a$. Οι υπόλοιπες ακμές έχουν μήκος 1 (σχήμα 3).

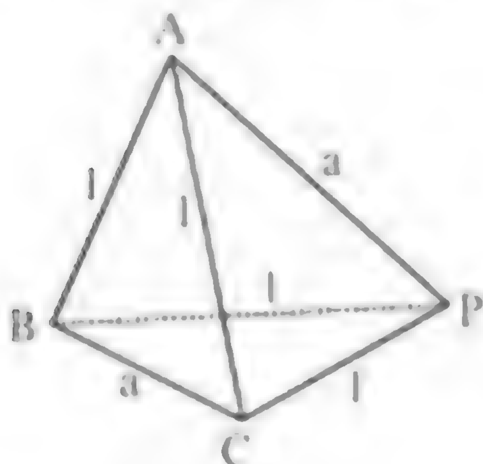
Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ABC με πλευρές μήκους 1 και δια του A φέρνουμε την QAP κάθετη στην BC ώστε $AQ=AR=1$ (όπως φαίνεται στο σχήμα). Τότε $QB=QC=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{2+\sqrt{3}}$, και

$RB=RC=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Το P, ευρισκόμενο σε ίση απόσταση από τα B και C, και απέχοντας από το A απόσταση ίση με 1, βρίσκεται στην τομή του επιπέδου που διέρχεται από την QR και είναι κάθετο στο επίπεδο του τριγώνου ABC, και της σφαίρας με κέντρο A και ακτίνα 1. Άρα το P μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε πάνω στον κύκλο με διάμετρο QR και του οποίου το επίπεδο είναι κάθετο σ' αυτό του τριγώνου ABC (εκτός των σημείων Q ή R).

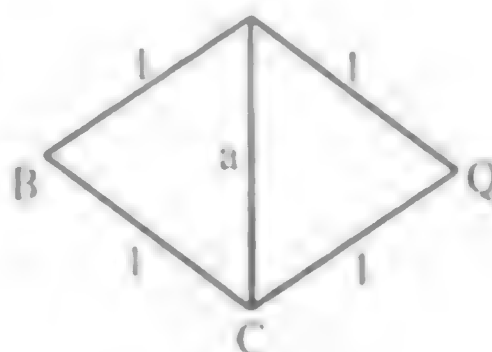
Άρα PB και PC είναι μεγαλύτερες από RB και μικρότερες από QB. Επομένως σ' αυτήν την περίπτωση έχουμε:

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} < a < \sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Περίπτωση 2η: Οι δύο ακμές μήκους a είναι απέναντι, έστω $BC = AP = a$, και $AB = AC = PB = PC = 1$ (σχήμα 5).



Σχήμα 47(i)



Σχήμα 47(ii)

Θεωρούμε τώρα τον ρόμβο ABQC με μήκη πλευρών 1 και διαγώνιο $BC = a$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Αφού $PB = PC = 1$, το P βρίσκεται στην τομή των μοναδιαίων σφαιρών με κέντρα B, C δηλαδή πάνω στον κύκλο με διάμετρο AQ που το επίπεδό του είναι κάθετο στον ρόμβο. Αλλά $PA = a$ και άρα το a πρέπει να είναι μικρότερο της διαμέτρου AQ του κύκλου.

Αφού $AQ = 2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$ θα έχουμε $a < 2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}} \Leftrightarrow a^2 < 4-a^2 \Leftrightarrow$ $a < \sqrt{2}$.

Από τις περιπτώσεις 1 και 2, συμπεραίνουμε ότι, για $k = 2$, τετράεδρα υπάρχουν αν και μόνο αν $a \in \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}, \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$ ή $a \in \left(0, \sqrt{2}\right)$, δηλαδή όταν

$$a \in \left(0, \sqrt{2+\sqrt{3}}\right).$$

γ) $k = 3$. Ένα τετράεδρο, με τις ιδιότητες του προβλήματος, πάντα υπάρχει σ' αυτήν την περίπτωση.

Αν $a \geq 1$ παίρνουμε τρίγωνο ABC με μήκη πλευρών 1 και περίκεντρο Q. Φέρνουμε κάθετη στο επίπεδο του τριγώνου που να διέρχεται από το Q και παίρνουμε ένα σημείο P πάνω σ' αυτή την κάθετη ώστε $PA = PB = PC = a$. Αυτό είναι ένα τετράεδρο με τις απαιτούμενες ιδιότητες το προβλήματος.

Αν $0 < a \leq 1$ παίρνουμε τρίγωνο ABC που να διέρχεται από το Q όπως

προηγούμενα. Πάνω σ' αυτήν επιλέγουμε σημείο P έτσι ώστε $PA = PB = PC = 1$. Είναι ένα τετράεδρο του προβλήματος.

δ) $k = 4$. Αν τέσσερις ακμές του T έχουν μήκος a και οι υπόλοιπες δύο έχουν μήκος 1, θεωρούμε ένα όμοιο τετράεδρο T' με τέσσερις ακμές μήκους 1 και δύο με μήκος $b = \frac{1}{a}$. Το T' ανήκει στην περίπτωση $k = 2$.

Επομένως υπάρχει αν και μόνο αν $0 < b < \sqrt{2+\sqrt{3}}$. Άρα $a = \frac{1}{b} > \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$.

ε) $k = 5$. Όμοια ανάγουμε αυτήν την περίπτωση σε αυτήν με $k = 1$ και βρίσκουμε ότι το T υπάρχει αν $a > \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Συνοψίζοντας όλες τις περιπτώσεις, έχουμε τον πίνακα:

k	1	2	3	4	5
a	$0 < a < \sqrt{3}$	$0 < a < \sqrt{2+\sqrt{3}}$	$a > 0$	$a > \sqrt{2-\sqrt{3}}$	$a > \frac{\sqrt{3}}{3}$

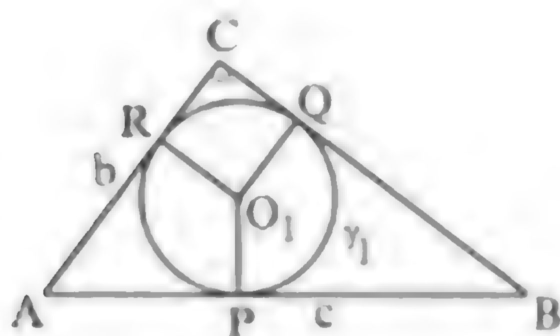
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Θεωρούμε ημικύκλιο γ, διαμέτρου AB. Αν C είναι σημείο του ημικυκλίου γ, φέρνουμε $CD \perp AB$. Κατασκευάζουμε τρεις κύκλους γ_1, γ_2, γ_3 όλους εφαπτόμενους στην AB. Από αυτούς ο γ_1 είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο ABC, ο γ_2 εφάπτεται επίσης της CD και του τόξου $\overset{\frown}{AC}$, και ο γ_3 εφάπτεται της CD και του τόξου $\overset{\frown}{CB}$.

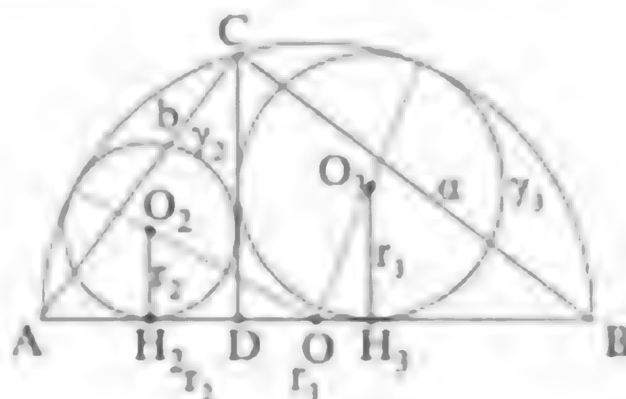
Να αποδείξετε ότι οι τρεις κύκλοι γ_1, γ_2, γ_3 έχουν μια δεύτερη κοινή εφαπτομένη, εκτός της AB.

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι τα κέντρα O_1, O_2, O_3 των κύκλων γ_1, γ_2, γ_3 αντίστοιχα, είναι συνευθειακά σημεία. Αυτό θα έχει ως συνέπεια, ότι υπάρχει και δεύτερη κοινή εφαπτομένη των τριών κύκλων, συμμετρική της AB ως προς άξονα συμμετρίας την $O_1O_2O_3$.



Σχήμα 48 (i)



Σχήμα 48 (ii)

Στο σχήμα 48 (i) έχουμε τον εγγεγραμμένο κύκλο γ_1 στο $\overset{\Delta}{ABC}$ και P, Q, R είναι τα σημεία επαφής.

Αν σημειώσουμε με a, b, c τα μήκη των πλευρών του τριγώνου και την ημιπερίμετρο με $\tau = \dfrac{a+b+c}{2}$ τότε γνωρίζουμε ότι

$$AP = AR = \tau - a\,,\ BP = BQ = \tau - b\,,\ CR = CQ = \tau - c\,. \tag{1}$$

Αφού $O_1R \perp AC$, $O_1Q \perp CB$ και $\hat{C} = 90^\circ$ καταλαβαίνουμε ότι το CQO_1R είναι τετράγωνο άρα η ακτίνα δίνεται από

$$r_1 = \tau - c\,. \tag{2}$$

Το σχήμα 48 (ii) δείχνει τους κύκλους γ_2, γ_3 με τα κέντρα τους O_2, O_3 και τις ακτίνες τους r_2 και r_3 αντίστοιχα. Έστω H_2 και H_3 τα ίχνη των καθέτων από τα κέντρα O_2, O_3 προς την AB και O το κέντρο του ημικυκλίου γ.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABC γνωρίζουμε ότι $AC^2 = AD \cdot AB$ και $BC^2 = BD \cdot AB$ άρα

$$AD = \frac{b^2}{c} \text{ και } BD = \frac{a^2}{c} \tag{3}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο O_2H_2O έχουμε από Πυθαγόρειο θεώρημα: $r_2^2 + (r_2 + DO)^2 = OO_2^2$, όπου $OO_2 = r - r_2$ (r η ακτίνα του ημικυκλίου γ). Άρα $r_2^2 + (r_2 + DO)^2 = (r - r_2)^2 \Leftrightarrow r_2^2 + 2r_2(r + DO) = r^2 - DO^2 = (r + DO)(r - DO) \Leftrightarrow r_2^2 + 2r_2BO = BD \cdot AD$ και με την βοήθεια των

σχέσεων (3) έχουμε $r_2^2 + 2r_2 \frac{a^2}{c} = \frac{a^2}{c} \cdot \frac{b^2}{c}$.

Προσθέτοντας $\frac{a^4}{c^2}$ και στα δύο μέρη παίρνουμε $\left(r_2 + \frac{a^2}{c}\right)^2 = \frac{a^2\left(a^2+b^2\right)}{c^2} = a^2$ απ' όπου έχουμε

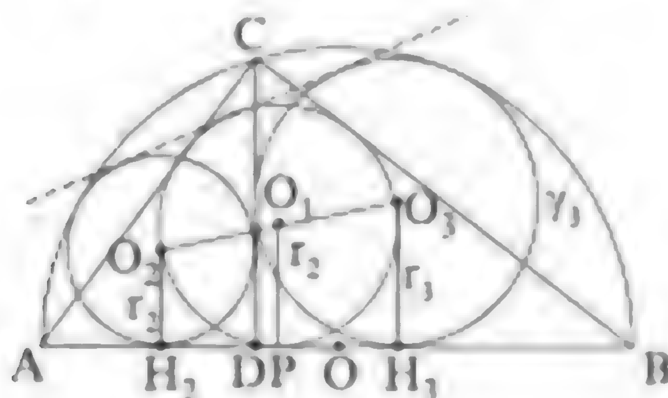
$$r_2 + \frac{a^2}{c} = a \quad H_2B = a. \tag{4}$$

Όμοια από το ορθογώνιο OH_3O_3 έχουμε: $r_3^2 + \left(r_3 - DO\right)^2 = \left(r - r_3\right)^2 \Leftrightarrow$ $r_3^2 + 2r_3\left(r - DO\right) = \left(r + DO\right)\left(r - DO\right) \Leftrightarrow r_3^2 + 2r_3 \cdot AD = BD \cdot AD$ απ' όπου με χρήση των σχέσεων (3) βρίσκουμε ότι

$$r_3 + \frac{b^2}{c} = AH_3 = b. \tag{5}$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (4) και (5) βρίσκουμε $r_2 + r_3 + \frac{a^2+b^2}{c} = a + b$ απ' όπου

$$r_2 + r_3 = a + b - c = 2\left(\tau - c\right). \tag{6}$$



Σχήμα 49

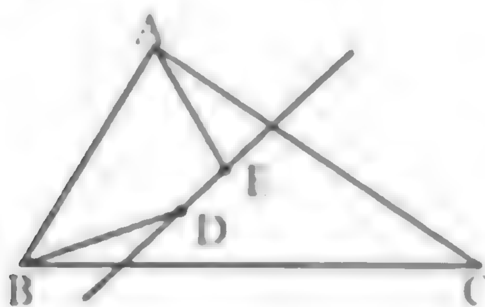
Στο σχήμα 49 έχουμε κατασκευάσει και τον κύκλο γ_1. Βρίσκουμε ότι $H_2P = H_2B - PB$ που, με την βοήθεια των σχέσεων (1) και (4) δίνει $H_2P = a - \left(\tau - b\right) = a + b - \tau = \tau - c$ και $H_3P = H_3A - AP = b - \left(\tau - a\right) =$ $a + b - \tau = \tau - c$. Άρα $H_2P = H_3P = \tau - c = r_1 = \frac{1}{2}\left(r_2 + r_3\right)$ που σημαίνει ότι η O_1P είναι η διάμεσος του τραπεζίου $H_2H_3O_3O_2$, και έτσι το O_1 βρίσκεται

στο μέσο του τμήματος O_2O_3, αφού λόγω της (2) είναι $O_1P = r_1 = \tau - c$. Άρα τα σημεία O_1, O_2, O_3 είναι συνευθειακά.

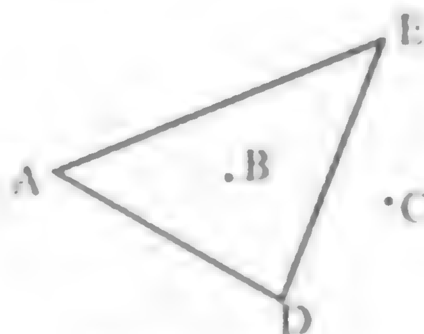
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Δίνονται $n > 4$ σημεία στο επίπεδο τέτοια ώστε ανά τρία να μην είναι συνευθειακά. Αποδείξτε ότι υπάρχουν τουλάχιστον $\binom{n-3}{2}$ κυρτά τετράπλευρα των οποίων οι κορυφές είναι 4 από τα δεδομένα σημεία.

Λύση



Σχήμα 50 (i)



Σχήμα 50 (ii)

(α) Θα πάρουμε πρώτα την περίπτωση $n = 5$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον $\binom{5-3}{2} = \binom{2}{2} = 1$ κυρτό τετράπλευρο. Αν υποθέσουμε ότι τα σημεία A, B, C ορίζουν το ελάχιστο κυρτό σύνολο που περιέχει και τα 5 σημεία, τότε από τα δύο εσωτερικά σημεία D, E του τριγώνου διέρχεται μία ευθεία που αφήνει στο ίδιο ημιεπίπεδο τουλάχιστον δύο σημεία. Έστω ότι αυτά είναι τα A, B. Ορίζεται τότε ένα κυρτό τετράπλευρο ABDE, όπως φαίνεται στο σχήμα, γιατί διαφορετικά το ελάχιστο κυρτό σύνολο που περιέχει τα σημεία A, B, D, E θα ήταν ένα τρίγωνο (Σχήμα 50 (ii)), με ένα από τα σημεία A ή B στο εσωτερικό του. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι τα σημεία A, B, C ανήκουν στο ελάχιστο κυρτό σύνολο που περιέχει όλα τα σημεία.

(β) Ας θεωρήσουμε τώρα ότι $n \geq 5$. Από κάθε μία πεντάδα του συνόλου των n σημείων, δημιουργείται ένα τουλάχιστον κυρτό τετράπλευρο, όπως είδαμε στην (α) περίπτωση, οπότε έχουμε τουλάχιστον $\binom{n}{5}$ κυρτά τετράπλευρα. Κάθε τετράπλευρο σχετίζεται με $n-4$ πεντάδες σημείων το πολύ, αφού υπάρχουν $n-4$ πιθανότητες για το πέμπτο σημείο.

Επομένως υπάρχουν τουλάχιστον $\dfrac{\binom{n}{5}}{n-4}$ διαφορετικά κυρτά τετράπλευρα στο δεδομένο σύνολο των n σημείων. Δηλαδή

$$\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\frac{1}{n-4}=$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{60\cdot(n-4)\cdot1\cdot2}=$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)}{60(n-4)}\binom{n-3}{2} \qquad (1)$$

Όμως $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{n-4}=\dfrac{n^3-3n^2+2n}{n-4}=n^2+n+6+\dfrac{24}{n-4}$ (με διαίρεση). Όταν $n\geq5$ τότε $n^2+n+6+\dfrac{24}{n-4}\geq60$ άρα

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{60(n-4)}\geq1 \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι:

$$\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}\geq\binom{n-3}{2}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Να αποδείξετε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 με $x_1>0$, $x_2>0$, $x_1y_1-z_1^2>0$, $x_2y_2-z_2^2>0$ αληθεύει η ανισότητα:

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\leq\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}.$$

Να δώσετε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να ισχύει η ισότητα.

Λύση

Θέτουμε για συντομία:

$$D_1 = x_1y_1 - z_1^2,\ D_2 = x_2y_2 - z_2^2,\ D = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2 \quad (1)$$

και παρατηρούμε ότι οι δεδομένες σχέσεις $D_i > 0, x_i > 0$ για $i = 1,2$ δίνουν $y_i > 0$.

Επίσης από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε: $x_i = \dfrac{D_i + z_i^2}{y_i}$, $i = 1,2$.

Η δεδομένη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \geq \frac{8}{D} \text{ ή } (D_1 + D_2)D \geq 8D_1D_2, \quad (2)$$

αφού όπως αποδεικνύουμε παρακάτω είναι $D > 0$.

$$\begin{aligned} D &= (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2 \\ &= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 - z_1^2 - 2z_1z_2 - z_2^2 \\ &= D_1 + D_2 + x_1y_2 + x_2y_1 - 2z_1z_2 \\ &= D_1 + D_2 + \frac{D_1 + z_1^2}{y_1}y_2 + \frac{D_2 + z_2^2}{y_2}y_1 - 2z_1z_2 \\ &= D_1 + D_2 + \frac{D_1y_2}{y_1} + \frac{D_2y_1}{y_2} + \left(\frac{z_1}{y_1} - \frac{z_2}{y_2}\right)^2 y_1y_2 > 0 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την D στην σχέση (2), παίρνουμε

$$(D_1 + D_2)^2 + (D_1 + D_2)\left(\frac{D_1y_2}{y_1} + \frac{D_2y_1}{y_2}\right) + (D_1 + D_2)\left(\frac{z_1}{y_1} - \frac{z_2}{y_2}\right)^2 y_1y_2 \geq 8D_1D_2$$

και αφαιρώντας $4D_1D_2$ και από τα δύο μέλη έχουμε:

$$(D_1 - D_2)^2 + (D_1 + D_2)\left(\frac{D_1y_2}{y_1} + \frac{D_2y_1}{y_2}\right) + (D_1 + D_2)\left(\frac{z_1}{y_1} - \frac{z_2}{y_2}\right)^2 y_1y_2 \geq 4D_1D_2 \quad (3)$$

Η σχέση (3) ισχύει γιατί, ο πρώτος και ο τρίτος όρος είναι μη αρνητικές ποσότητες, και ο μεσαίος όρος, με την βοήθεια της ανισότητας αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου $D_1 + D_2 \geq 2\sqrt{D_1D_2}$, γράφεται

$$\frac{D_1y_2}{y_1} + \frac{D_2y_1}{y_2} \geq 2\sqrt{\frac{D_1D_2y_1y_2}{y_1y_2}} = 2\sqrt{D_1D_2}.$$

δηλαδή $(D_1+D_2)\left(\frac{D_1y_2}{y_1}+\frac{D_2y_1}{y_2}\right)\geq 4D_1D_2$.

Η ισότητα στη σχέση (3) ισχύει, τότε και μόνο τότε αν, $D_1=D_2$, $\frac{z_1}{y_1}=\frac{z_2}{y_2}$ και $\frac{D_1y_2}{y_1}=\frac{D_2y_1}{y_2}$.

Η τρίτη ισότητα με την βοήθεια της πρώτης μας δίνει $y_1=y_2$ και η δεύτερη δίνει $z_1=z_2$. Έτσι με την βοήθεια της $D_1=D_2$ έχουμε $x_1=x_2$.

Επομένως η ισότητα ισχύει, αν, και μόνο αν, $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=z_2$.



12η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1970

Τόπος Διοργάνωσης:	Ουγγαρία (Keszthely – Βουδαπέστη)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	G. Hajos (Παν/μιο Βουδαπέστης)
Συμμετοχή:	14 χώρες με 8 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες συμμετοχές:	Αυστρία
Μέγιστη Βαθμολογία:	40 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες:	Ουγγαρία (233), Αν. Γερμανία και Σοβ. Ένωση (221), Γιουγκοσλαβία (209), Ρουμανία (208), Ηνωμένο Βασίλειο (180), Βουλγαρία και Τσεχοσλοβακία (145).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω Μ ένα σημείο της πλευράς ΑΒ, τριγώνου ΑΒΓ. Έστω r_1, r_2 και r οι ακτίνες των εγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων AMC, BMC και ABC. Έστω q_1, q_2 και q οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων κύκλων των ίδιων τριγώνων που βρίσκονται μέσα στη γωνία $\hat{ACB}$.

Αποδείξτε ότι $\frac{r_1}{q_1}\cdot\frac{r_2}{q_2}=\frac{r}{q}$.

Λύση

Στο σχήμα με τον εγγεγραμμένο κύκλο με κέντρο I και ακτίνα r και τον παρεγγεγραμμένο κύκλο με κέντρο E και ακτίνα q έχουμε:

$$AU + BU = c \text{ και } AV + VB = c$$

(όπου c το μήκος της πλευράς AB). Τώρα $AU = r\sigma\varphi\frac{A}{2}$, $BU = r\sigma\varphi\frac{B}{2}$, οπότε $c = r\left(\sigma\varphi\frac{A}{2}+\sigma\varphi\frac{B}{2}\right)$. Επίσης από τα τρίγωνα AEV και BEV έχουμε

Σχήμα 51

$$AV = q\varepsilon\varphi\frac{A}{2},\ BV = q\varepsilon\varphi\frac{B}{2},\ \text{οπότε } c = q\left(\varepsilon\varphi\frac{A}{2} + \varepsilon\varphi\frac{B}{2}\right).$$

Άρα $r\left(\sigma\varphi\frac{A}{2} + \sigma\varphi\frac{B}{2}\right) = q\left(\varepsilon\varphi\frac{A}{2} + \varepsilon\varphi\frac{B}{2}\right) = c$ και

$$\frac{r}{q} = \frac{\varepsilon\varphi\frac{A}{2} + \varepsilon\varphi\frac{B}{2}}{\sigma\varphi\frac{A}{2} + \sigma\varphi\frac{B}{2}} = \frac{\varepsilon\varphi\frac{A}{2} + \varepsilon\varphi\frac{B}{2}}{\frac{1}{\varepsilon\varphi\frac{A}{2}} + \frac{1}{\varepsilon\varphi\frac{B}{2}}} = \varepsilon\varphi\frac{A}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{B}{2} \qquad (1).$$

Εφαρμόζουμε τα προηγούμενο αποτέλεσμα στους κύκλους των τριγώνων AMC και MCB του σχήματος 52.

Σχήμα 52

Έχουμε
$$\frac{r_1}{q_1}=\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\varepsilon\varphi\frac{\hat{AMC}}{2}, \quad (2)$$

$$\frac{r_2}{q_2}=\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\varepsilon\varphi\frac{\hat{BMC}}{2}. \quad (3)$$

Όμως $\frac{1}{2}\hat{BMC}=90^\circ-\frac{1}{2}\hat{AMC}$, οπότε $\varepsilon\varphi\frac{\hat{BMC}}{2}=\sigma\varphi\frac{\hat{AMC}}{2}$.

Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω σχέσεις (2) και (3) κατά μέλη λόγω και τις (1) προκύπτει:

$$\frac{r_1}{q_1}\cdot\frac{r_2}{q_2}=\left(\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{\hat{AMC}}{2}\right)\left(\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\cdot\sigma\varphi\frac{\hat{AMC}}{2}\right)=\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\frac{r}{q}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Έστω a, b και n ακέραιοι μεγαλύτεροι του 1 και ας υποθέσουμε ότι οι a και b είναι οι βάσεις δύο αριθμητικών συστημάτων. A_{n-1} και A_n είναι αριθμοί του συστήματος με βάση a και B_{n-1} και B_n είναι αριθμοί του συστήματος με βάση b. Αυτοί σχετίζονται ως εξής:

$$\begin{matrix} A_n=\overline{x_n x_{n-1}\cdots x_0}, & A_{n-1}=\overline{x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0} \\ B_n=\overline{x_n x_{n-1}\cdots x_0}, & B_{n-1}=\overline{x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0}\end{matrix} \quad (x_n\neq 0,\ x_{n-1}\neq 0).$$

Αποδείξτε ότι $\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}$, αν, και μόνο αν, $a>b$.

Λύση

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(t)=x_n t^n+x_{n-1}t^{n-1}+\cdots+x_1 t+x_0$. Τότε $A_n=P(a)$, $B_n=P(b)$, $A_{n-1}=P(a)-x_n a^n$, $B_{n-1}=P(b)-x_n b^n$. Αυτό που πρέπει να αποδειχθεί είναι ότι:

$$\frac{P(a)-x_n a^n}{P(a)}<\frac{P(b)-x_n b^n}{P(b)}\Leftrightarrow a>b.$$

Η πρώτη ανισότητα γράφεται:

$$1-\frac{x_n a^n}{P(a)}<1-\frac{x_n b^n}{P(b)} \Leftrightarrow \frac{P(a)}{a^n}<\frac{P(b)}{b^n},$$

αφού $x_n>0$ ως ψηφίο αριθμού και $x_n \neq 0$.

Επομένως μετά τις διαιρέσεις παίρνουμε την ισοδύναμη προς την προηγούμενη ανίσωση

$$x_n+\frac{1}{a}x_{n-1}+\frac{1}{a^2}x_{n-2}+\cdots+\frac{1}{a^n}x_0<x_n+\frac{1}{b}x_{n-1}+\frac{1}{b^2}x_{n-2}+\cdots+\frac{1}{b^n}x_0,$$

η οποία, αφού $x_{n-1}\neq 0$, αληθεύει όταν $a>b$ και είναι ψευδής όταν $a\leq b$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Οι πραγματικοί αριθμοί $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ είναι τέτοιοι ώστε

$$1=a_0\leq a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n\leq\cdots$$

Οι αριθμοί $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ καθορίζονται από τη σχέση

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}}.$$

i) **Να αποδείξετε ότι $0\leq b_n<2$ για όλους τους φυσικούς n.**

ii) **Αν δοθεί αριθμός c με $0\leq c<2$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί $a_0, a_1, \ldots$ με τις παραπάνω ιδιότητες, τέτοιοι ώστε $b_n>c$ για αρκετά μεγάλο n.**

Λύση

(i) Παρατηρούμε ότι $\frac{a_{k-1}}{a_k}\leq 1$, οπότε $b_n\geq 0$ για κάθε n φυσικό.

Θέτουμε όπου $\sqrt{a_k}$ την τιμή α_k. Τότε ο k-όρος του αθροίσματος b_n είναι:

$$\left(1-\frac{\alpha_{k-1}^2}{\alpha_k^2}\right)\frac{1}{\alpha_k}=\frac{\alpha_{k-1}^2}{\alpha_k}\left(\frac{1}{\alpha_{k-1}^2}-\frac{1}{\alpha_k^2}\right)=$$

$$=\frac{\alpha_{k-1}^2}{\alpha_k}\left(\frac{1}{\alpha_{k-1}}+\frac{1}{\alpha_k}\right)\left(\frac{1}{\alpha_{k-1}}-\frac{1}{\alpha_k}\right)=$$

$$=\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\left(1+\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right)\left(\frac{1}{\alpha_{k-1}}-\frac{1}{\alpha_k}\right)\leq 2\left(\frac{1}{\alpha_{k-1}}-\frac{1}{\alpha_k}\right).$$

Έτσι έχουμε τις ανισότητα (αν θέσουμε ξανά $\sqrt{a_k}$ την τιμή a_k)

$$\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}} \le 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right),\ k=1,2,\ldots,n.$$

Προσθέτοντας αυτές τις ανισοτικές σχέσεις για $k=1,2,\ldots,n$ παίρνουμε

$$0 \le b_n \le 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}}-\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)<2.$$

(ii) Για τον δεδομένο c με $0 \le c < 2$ θα αποδείξουμε την ύπαρξη κατάλληλων a_i κατασκευάζοντας αυτούς ως όρους μιας γεωμετρικής σειράς.

Αν υποθέσουμε ότι για $k=1,2,\ldots,n$ ισχύει $\frac{1}{\sqrt{a_k}}=d^k$, τότε ο k-όρος του αθροίσματος b_n γίνεται:

$$\left(1-\frac{d^{-2(k-1)}}{d^{-2k}}\right)d^k=\left(1-d^2\right)d^k.$$

Άρα

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-d^2\right)d^k=\left(1-d^2\right)\sum_{k=1}^{n}d^k=\left(1-d^2\right)\frac{d-d^{n+1}}{1-d}=d(1+d)\left(1-d^n\right).$$

Πρέπει να επιλέξουμε d μεταξύ 0 και 1 έτσι ώστε να είναι δυνατόν να ισχύει

$$b_n=d(1+d)\left(1-d^n\right)>c \text{ για αρκετά μεγάλο } n.$$

Διαφορετικά, αν $d>1$, η παραπάνω ανίσωση δεν είναι δυνατόν να ισχύει. Είναι αναγκαίο να έχουμε $c<2$, αφού $d(1+d)$ τείνει στο 2 καθώς το $d \to 1$.

Αφού $0<d<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-d^n\right)=1$ και το $1-d^n$ είναι όσο θέλουμε κοντά στο 1 για κατάλληλα μεγάλο n. Ειδικά $1-d^n>\frac{c}{d(1+d)}$ που σημαίνει ότι $d(1+d)\left(1-d^n\right)>c$ για αρκετά μεγάλο n.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Βρείτε το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων n για τους οποίους, το σύνολο $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ μπορεί να χωριστεί σε δύο υποσύνολα, τέτοια ώστε το γινόμενο των αριθμών του ενός συνόλου, να είναι ίσο με το γινόμενο των αριθμών του άλλου συνόλου.

Λύση:

Έστω $S=\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ που αποτελείται από 6 διαδοχικούς θετικούς ακέραιους αριθμούς.

Ας υποθέσουμε ότι το S μπορεί να χωριστεί σε δύο υποσύνολα S_1 και S_2 τέτοια ώστε τα γινόμενα a_1, a_2 των στοιχείων τους να είναι ίσα. Τότε

$$a_1 \equiv a_2 \pmod 7. \tag{1}$$

α) Παρατηρούμε ότι από τους 6 διαδοχικούς ακεραίους, μόνο ένας το πολύ μπορεί να διαιρείται με το 7. Αυτός θα ανήκει στο S_1 ή στο S_2, άρα $\frac{7}{a_1}$ ή $\frac{7}{a_2}$.

Επομένως η (1) δεν ισχύει όταν στο S περιέχεται ακέραιος διαιρούμενος δια του 7.

β) Έστω ότι κανείς από τους 6 ακέραιους διαιρείται με το 7 άρα αφήνουν υπόλοιπα 1, 2, 3, 4, 5 ή 6.

Θα χρησιμοποιήσουμε δύο γεγονότα για τα παραπάνω υπόλοιπα της διαίρεσης με το 7.

(i) Για το γινόμενό τους ισχύει $6! \equiv -1 \pmod 7$.

Πράγματι $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 \equiv 1\cdot2\cdot3\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(-1) \equiv (-36) \equiv -1 \pmod 7$

και (ii) Η ισοτιμία $x^2 \equiv -1 \pmod 7$ δεν έχει λύση.

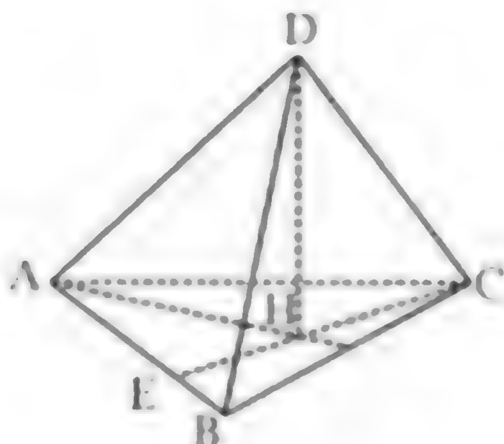
Πράγματι $1^2 \equiv 1 \pmod 7$, $2^2 \equiv 4 \pmod 7$, $3^2 \equiv 2 \pmod 7$, $4^2 \equiv 2 \pmod 7$, $5^2 \equiv 4 \pmod 7$, $6^2 \equiv 1 \pmod 7$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Στο τετράεδρο ABCD, η γωνία $\widehat{BDC}$ είναι ορθή. Υποθέτουμε ότι το ίχνος H του ύψους από την κορυφή D στο τρίγωνο ABC είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου αυτού. Αποδείξτε ότι $(AB+BC+CA)^2 \leq$

$6\left(AD^2 + BD^2 + CD^2\right)$. Για ποια τετράεδρα ισχύει η ισότητα;

Λύση



Σχήμα 53

Πρώτα θα δείξουμε ότι όλες οι γωνίες των εδρών που έχουν κοινή κορυφή D είναι ορθές.

Έχουμε $DH \perp ABC$ και $CE \perp AB$.

Άρα, από θεώρημα τριών καθέτων, $DE \perp AB$.

Επομένως $AB \perp DEC$, αφού είναι κάθετη στην CE και την DE. Άρα AB και DC ορθογώνιες. Ακόμα $CD \perp DB$, οπότε $DC \perp DBA$.

Άρα $DC \perp DA$ και αποδείξαμε ότι $\hat{CDA} = 90°$.

Με αντίστοιχο τρόπο δείχνουμε ότι $\hat{ADB} = 90°$.

Ας ονομάσουμε τις ακμές του τετραέδρου: $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $p = AD$, $q = BD$ και $r = CD$. Τότε $q^2 + r^2 = a^2$, $p^2 + r^2 = b^2$, $p^2 + q^2 = c^2$ οπότε

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2\left(p^2 + q^2 + r^2\right). \qquad (1)$$

Θα αποδείξουμε ότι $(a+b+c)^2 \leq 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$, η οποία με τη βοήθεια της (1) θα μας δώσει την ζητούμενη ανισότητα.

Η παραπάνω ανισότητα είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας Caushy: $(xa + yb + zc)^2 \leq \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$ για $x = y = z = 1$.

Άρα έχουμε $a_1 \equiv a_2 \pmod 7$ και προκύπτει ότι $a_1 \cdot a_2 \equiv a_1^2 \pmod 7$.

Όμως $a_1 \cdot a_2$ είναι το γινόμενο όλων των αριθμών του S και γνωρίζουμε ότι $a_1 a_2 \equiv 6! \pmod 7 \equiv -1 \pmod 7$.

Άρα $a_1^2 \equiv -1 \pmod 7$ που δεν έχει λύση.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το σύνολο S δεν μπορεί να χωριστεί σε δύο υποσύνολα S_1, S_2 για κανένα ακέραιο n.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

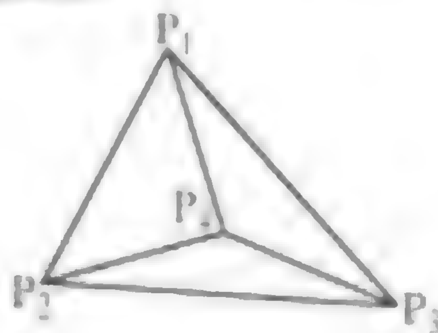
Σ' ένα επίπεδο υπάρχουν 100 σημεία, ανά τρία μη συνευθειακά. Αποδείξτε ότι το πολύ 70% από τα τρίγωνα που έχουν κορυφές αυτά τα σημεία, είναι οξυγώνια τρίγωνα.

Λύση

Θα αποδείξουμε με επαγωγή ότι αν $A(n)$ είναι ο μεγαλύτερος αριθμός οξυγωνίων τριγώνων που φτιάχνονται από n σημεία και $T(n)=\binom{n}{3}$ ο συνολικός αριθμός τριγώνων, τότε ο τύπος $\frac{A(n)}{T(n)}$ μας δίνει μία όχι-αύξουσα ακολουθία, η οποία για $n=5$ γίνεται $\frac{A(5)}{T(5)}=\frac{7}{10}$.

Επομένως για $n>5$ και ειδικά για $n=100$, $\frac{A(n)}{T(n)} \le \frac{7}{10}$.

Ξεκινάμε για **n = 4 σημεία**.



Σχήμα 54

Περίπτωση 1η: Ένα από τα σημεία βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο που φτιάχνουν τα άλλα τρία (σχήμα 54). Από τις τρεις γωνίες γύρω από το σημείο P_4 δύο τουλάχιστον είναι αμβλείες αφού έχουν άθροισμα 360°.

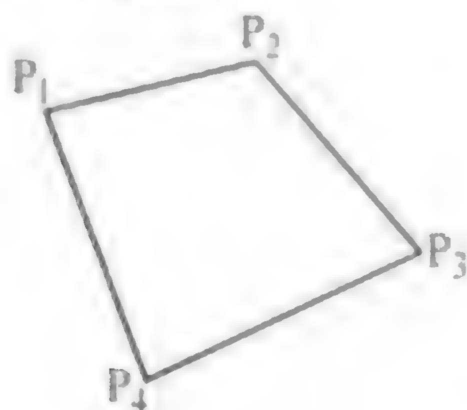
Άρα υπάρχουν δύο τουλάχιστον αμβλυγώνια τρίγωνα, και επομένως δύο το πολύ οξυγώνια τρίγωνα.

Περίπτωση 2η: Τα τέσσερα σημεία φτιάχνουν ένα κυρτό τετράπλευρο

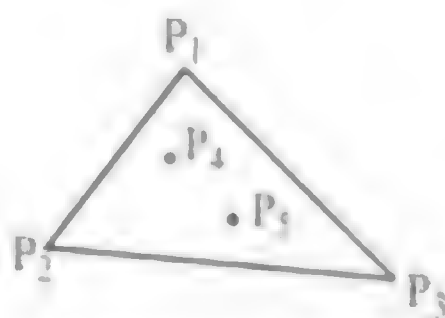
(σχήμα 50). Αφού το άθροισμα των γωνιών είναι 360° τουλάχιστον μία από αυτές είναι μεγαλύτερη ή ίση από 90°. Σ' αυτή την περίπτωση 3 τουλάχιστον από τα 4 τρίγωνα μπορεί να είναι οξυγώνια.

Άρα $\frac{A(4)}{T(4)} = \frac{3}{4} = \frac{75}{100}$.

Για **n = 5 σημεία**.



Σχήμα 55



Σχήμα 56

Περίπτωση $1^η$: Η κυρτή θήκη πέντε σημείων P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 (δηλαδή το μικρότερο κυρτό σχήμα που τα περιέχει) είναι ένα τρίγωνο, έστω $P_1P_2P_3$ και δύο σημεία P_4, P_5 βρίσκονται μέσα σ' αυτό (σχήμα 56).

Από την $1^η$ περίπτωση για $n = 4$ έχουμε, ότι τουλάχιστον 4 τρίγωνα είναι μη οξυγώνια (δύο για το P_4 και δύο για το P_5) και το πολύ 6 είναι οξυγώνια.

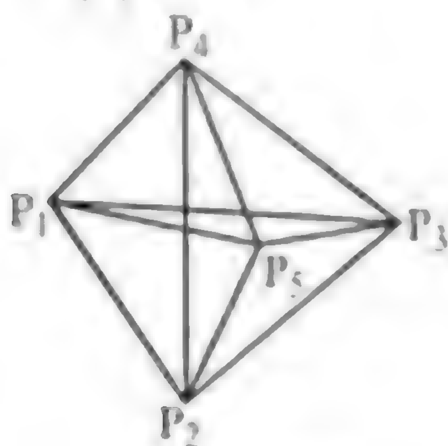
Το σύνολο των τριγώνων είναι $T(5) = \binom{5}{3} = 10$ άρα $\frac{A(5)}{T(5)} \le \frac{6}{10}$.

Περίπτωση $2^η$: Η κυρτή θήκη είναι ένα τετράπλευρο, έστω $P_1P_2P_3P_4$ και το P_5 βρίσκεται μέσα (σχήμα 57). Τότε το P_5 βρίσκεται μέσα σε δύο από τα $\binom{4}{3} = 4$ τρίγωνα που κατασκευάζονται με κορυφές τα P_1, P_2, P_3, P_4 σημεία. (Στο σχήμα 57 το P_5 βρίσκεται μέσα στα $P_1P_2P_3$ και $P_4P_2P_3$ τρίγωνα).

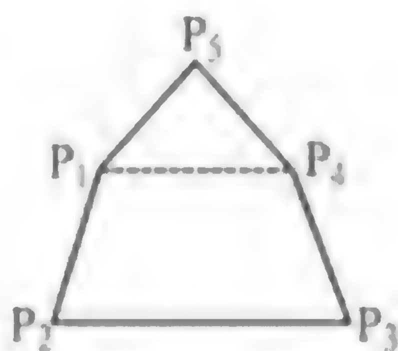
Όμως έχουμε αναφέρει στην περίπτωση α) για $n = 4$ σημεία, υπάρχουν 2 τουλάχιστον αμβλυγώνια τρίγωνα στην τετράδα σημείων P_1, P_2, P_3, P_5 και 2 τουλάχιστον στην τετράδα P_4, P_2, P_3, P_5 (σχήμα 57).

Αυτά όμως έχουν ένα κοινό τρίγωνο το $P_2P_5P_3$ στο σχήμα μας, επομένως μπορούμε να έχουμε τουλάχιστον 3 αμβλυγώνια τρίγωνα με κοινή κορυφή P_5. Επιπλέον μια από τις γωνίες P_1, P_2, P_3, P_4 πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση από 90° δίνοντας ακόμη ένα μη-οξυγώνιο τρίγωνο.

Επομένως $\frac{A(5)}{T(5)} \le \frac{6}{10}$.



Σχήμα 57



Σχήμα 58

Περίπτωση 3η: Τα σημεία φτιάχνουν ένα κυρτό πεντάγωνο $P_1P_2P_3P_4P_5$. Το άθροισμα των γωνιών είναι 540°, έτσι τουλάχιστον δύο είναι μη οξείες, δίνοντας δύο μη-οξυγώνια τρίγωνα $P_{i-1}P_iP_{i+1}$. Αν οι υπόλοιπες εσωτερικές γωνίες είναι οξείες, θα υπάρχουν δύο διαδοχικές, έστω P_2 και P_3 και με την $2^η$ περίπτωση για $n = 4$ εφαρμοζόμενη στο τετράπλευρο $P_1P_2P_3P_4$ (σχήμα 58), μία από τις γωνίες $P_1\hat{P_4}P_3$ ή $P_4\hat{P_1}P_2$ δεν είναι οξεία, δίνοντας έτσι ένα σύνολο τριών μη οξυγώνιων τριγώνων.

Έτσι σε κάθε περίπτωση πέντε σημείων, τουλάχιστον 3 τρίγωνα είναι μη οξυγώνια, άρα το πολύ 7 είναι οξυγώνια, από το σύνολο $\binom{5}{3} = 10$ τριγώνων που κατασκευάζονται. Δηλαδή $\frac{A(5)}{T(5)} \le \frac{7}{10}$.

Με επαγωγή τώρα:

α) Αποδείξαμε ότι για $n = 5$ έχουμε $A(5) \le \frac{7}{10}T(5)$.

β) Υποθέτουμε ότι $A(n) \le \frac{7}{10}T(n)$ και θα δείξουμε ότι

$A(n+1) \leq \frac{7}{10} T(n+1)$.

Από το σύνολο S των $n+1$ σημείων παραλείπουμε κατά σειρά, το πρώτο, το δεύτερο ... το $(n+1)$-στό σημείο και έτσι φτιάχνουμε $n+1$ υποσύνολα από n στοιχεία το καθένα. Σημειώνουμε με B_k τον αριθμό των οξυγωνίων τριγώνων, όταν παραλείπεται το τυχαίο k σημείο. Από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε $B_k \leq A(n) \leq \frac{7}{10} T(n)$ για κάθε k. Για να υπολογίσουμε τον συνολικό αριθμό B οξυγωνίων τριγώνων, βρίσκουμε το άθροισμα $B_1 + B_2 + \cdots + B_{n+1}$. Μ' αυτό τον τρόπο κάθε οξυγώνιο τρίγωνο μετριέται $(n+1) - 3 = n - 2$ φορές.

Έτσι $B = \frac{B_1 + B_2 + \cdots + B_{n+1}}{n-2} \leq \frac{7}{10} \cdot \frac{n+1}{n-2} T(n) = \frac{7}{10} T(n+1)$.

Εδώ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\frac{n+1}{n-2} \cdot \binom{n}{3} = \binom{n+1}{3} = T(n+1)$.



$13^{η}$ Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1971

Τόπος Διοργάνωσης:	Τσεχοσλοβακία (Ζιλίνα)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	St. Schwarz (Παν/μιο Μπρατισλάβας)
Συμμετοχή:	15 χώρες με 8 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες συμμετοχές:	Κούβα
Μέγιστη Βαθμολογία:	42 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες:	Ουγγαρία (255), Σοβ. Ένωση (205), Αν. Γερμανία (142), Πολωνία (118), Ρουμανία και Ηνωμένο Βασίλειο (110), Αυστρία (82), Γιουγκοσλαβία (71).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Αν $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί τότε:

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\cdots(a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\cdots(a_2 - a_n) + \cdots$$
$$+ (a_n - a_1)(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-1}) \geq 0.$$

Να αποδείξετε ότι ο παραπάνω ισχυρισμός είναι αληθής για $n = 3$ και $n = 5$ και είναι ψευδής για κάθε άλλο φυσικό αριθμό $n > 2$.

Λύση

Ας σημειώσουμε με A_n την δεδομένη παράσταση.

(i) Για $n = 3$ έχουμε

$$A_3 = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$$

η οποία μετά από πράξεις γίνεται

$$A_3=\frac{1}{2}\left[(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+(a_3-a_1)^2\right]\geq 0.$$

Διαφορετικά, χωρίς βλάβη της γενικότητας λόγω συμμετρίας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_1\geq a_2\geq a_3$ οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned}A_3&=(a_1-a_2)(a_1-a_3)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)+(a_3-a_1)(a_3-a_2)\\&=(a_1-a_2)\left[(a_1-a_3)-(a_2-a_3)\right]+(a_3-a_1)(a_3-a_2)\\&=(a_1-a_2)^2+(a_3-a_1)(a_3-a_2)\geq 0.\end{aligned}$$

(ii) Για $n=5$ υποθέτουμε ότι $a_1\geq a_2\geq a_3\geq a_4\geq a_5$ και από τους δύο πρώτους όρους του A_5 βγάζουμε κοινό παράγοντα το $a_1-a_2\geq 0$, οπότε αυτοί γίνονται:

$$(a_1-a_2)\left[(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)-(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\right].$$

Η παράσταση στις αγκύλες είναι μη αρνητική, αφού

$$a_1-a_3\geq a_2-a_3\geq 0$$

$$a_1-a_4\geq a_2-a_4\geq 0$$

$$a_1-a_5\geq a_2-a_5\geq 0.$$

Όμοια οι δύο τελευταίοι όροι του A_5 γράφονται:

$$(a_4-a_5)\left[(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)+(a_1-a_5)(a_2-a_5)(a_3-a_5)\right]=$$

$$=(a_4-a_5)\left[(a_1-a_5)(a_2-a_5)(a_3-a_5)-(a_1-a_4)(a_2-a_4)(a_3-a_4)\right]$$

και παρατηρούμε ότι και αυτή η παράσταση είναι μη αρνητική.

Στον τρίτο όρο του A_5, που είναι ο $(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)$, παρατηρούμε ότι οι δύο πρώτοι παράγοντες είναι μη θετικοί, ενώ οι δύο τελευταίοι μη αρνητικοί, οπότε ο όρος είναι τελικά μη αρνητικός.

Άρα είναι $A_5\geq 0$.

(iii) Για να δείξουμε ότι η δεδομένη σχέση είναι ψευδής για όλους τους άλλους φυσικούς $n>2$, αρκεί να δώσουμε παράδειγμα τέτοιο ώστε να μην ισχύει η σχέση.

Αν ο n είναι περιττός μεγαλύτερος του 5, δίνουμε τις εξής τιμές:

$$a_1=a_2=\cdots=a_{n-4}=0,\ a_{n-3}=1,\ a_{n-2}=a_{n-1}=a_n=2.$$

Τότε $A_n=(1)^{n-4}\cdot(1-2)^3=(-1)^3<0$.

Αν ο n είναι άρτιος, η παράσταση A_n είναι ομογενής περιττού βαθμού αφού κάθε όρος της έχει $n-1$ παράγοντες.

Έτσι αν υποθέσουμε ότι οι αριθμοί a_i αντικαθίστανται από τους αντίθετούς τους, τότε το πρόσημο του A_n αλλάζει:

$$A_n(-a_1,-a_2,\ldots,-a_n)=(-1)^{n-1}A_n(a_1,a_2,\ldots,a_n)=-A_n(a_1,a_2,\ldots,a_n)$$

που σημαίνει ότι A_n δεν είναι πάντα ≥ 0.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Θεωρούμε ένα κυρτό πολύεδρο P_1 με εννέα κορυφές $A_1, A_2, \ldots, A_9$. Έστω P_i το πολύεδρο που δημιουργείται από το P_1 με μία μεταφορά η οποία μεταφέρει την κορυφή A_1 στην $A_i\,(i=2,3,\ldots,9)$. Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον δύο από τα πολύεδρα $P_1, P_2, \ldots, P_9$ έχουν ένα κοινό εσωτερικό σημείο.

Λύση

Ας θεωρήσουμε την κορυφή A_1 ως αρχή ενός συστήματος συντεταγμένων τριών διαστάσεων, και ας σημειώσουμε τα διανύσματα προς τις κορυφές A_i με $\overline{a_i},(i=2,3,\ldots,9)$.

Έστω D το πολύεδρο που προκύπτει από το P_1 με μεγέθυνση σε λόγο $\frac{2}{1}$, που πραγματοποιείται αν αντικαταστήσουμε τα διανύσματα $\overline{a_i}$ με $2\overline{a_i}$ (ομοιοθεσία με λόγο 2:1).

Προφανώς το πολύεδρο D περιέχει το P_1. Υποστηρίζουμε ότι το D επίσης περιέχει όλα τα πολύεδρα $P_2, P_3, \ldots, P_9$. Πράγματι, έστω $\overline{r_{1i}}$ το διάνυσμα θέσης ενός σημείου M_{1i} και έστω $\overline{r_1}$ το διάνυσμα θέσης του αντίστοιχου σημείου M_1 του P_1. Τότε $\overline{r_{1i}}=\overline{a_i}+\overline{r_1}=2\left(\frac{1}{2}\overline{a_i}+\frac{1}{2}\overline{r_1}\right)$.

Αφού $\overline{a_i}$ και $\overline{r_1}$ είναι σημεία του P_1 και αφού το P_1 είναι κυρτό πολύεδρο, το μέσο $\frac{1}{2}\left(\overline{a_i}+\overline{r_1}\right)$ του τμήματος A_iM_1 βρίσκεται επίσης στο P_1. Επομένως το M_{1i} βρίσκεται στο D, το οποίο αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.

Ο όγκος του D είναι 8 φορές (οκταπλάσιος) του όγκου του P_1. Συνεπώς το πολύεδρο P_1 και οι 9 μεταφορές του, που περιέχονται στο D δεν μπορούν να έχουν όλα, αν θεωρηθούν ανά δύο, τα εσωτερικά τους ξένα μεταξύ τους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Να αποδείξετε ότι το σύνολο των ακεραίων του τύπου $2^k - 3\,(k = 2, 3, \ldots)$ περιέχει ένα μη πεπερασμένο υποσύνολο, στο οποίο κάθε δύο στοιχεία είναι σχετικά πρώτοι αριθμοί μεταξύ τους.

Λύση

Θα δώσουμε έναν τρόπο κατασκευής ενός μη πεπερασμένου συνόλου ακεραίων του τύπου $a_i = 2^{k_i} - 3, i = 1, 2, \ldots$ καθενός σχετικά πρώτου με όλους τους άλλους.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε n σχετικά πρώτους αριθμούς $a_1 = 2^{k_1} - 3$, $a_2 = 2^{k_2} - 3$, ..., $a_n = 2^{k_n} - 3$ (π.χ. $a_1 = 2^3 - 3 = 5$, $a_2 = 2^4 - 3 = 13$ για $n = 2$. Εδώ $k_1 = 3, k_2 = 4$). Το γινόμενο

$$s = \prod_{i=1}^{n} a_i = \left(2^{k_1} - 3\right)\left(2^{k_2} - 3\right)\cdots\left(2^{k_n} - 3\right)$$

είναι περιττός, αφού γινόμενο περιττών είναι περιττός αριθμός.

Ας θεωρήσουμε τώρα το σύνολο των $s + 1$ αριθμών, $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^s$. Αφού όταν ένας ακέραιος διαιρεθεί με s, τα πιθανά υπόλοιπα είναι 0, 1, 2, ..., $s - 1$, τότε τουλάχιστον δύο από τους παραπάνω $s + 1$ αριθμούς αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο αν διαιρεθούν με s.

Έτσι θα έχουμε $2^a \equiv 2^b \pmod{s}$ και έστω $a > b$.

Τότε $2^a - 2^b = ms \Leftrightarrow 2^b\left(2^{a-b} - 1\right) = ms$, m ακέραιος.

Ο περιττός αριθμός s δεν διαιρεί το 2^b άρα διαιρεί το $2^{a-b} - 1$, άρα $2^{a-b} - 1 = \ell s$, ℓ ακέραιος.

Αφού $2^{a-b} - 1$ διαιρείται με το s και ο s είναι περιττός τότε $2^{a-b} - 3$ είναι σχετικά πρώτος με τον s.

Αφού ο $2^{a-b} - 3$ είναι σχετικά πρώτος με το γινόμενο s, τότε είναι σχετικά πρώτος με κάθε παράγοντα του γινομένου.

Έτσι κατασκευάσαμε άλλον έναν αριθμό του τύπου $2^k - 3$ που έχει τις ιδιότητες του προβλήματος.

Με αυτόν τον τρόπο οδηγούμαστε σε ένα μη πεπερασμένο υποσύνολο σχετικά πρώτων ακεραίων του τύπου $2^k - 3$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Όλες οι έδρες ενός τετραέδρου ABCD είναι οξυγώνια τρίγωνα. Θεωρούμε όλες τις κλειστές πολυγωνικές γραμμές XYZTX που καθορίζονται ως εξής:

Το X είναι ένα σημείο της ακμής AB διαφορετικό των A, B και αντίστοιχα τα Y, Z, T είναι εσωτερικά σημεία των ακμών BC, CD, DA. Αποδείξτε ότι:

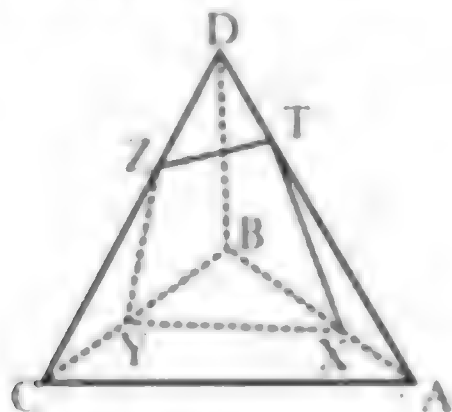
α) Αν $D\hat{A}B + B\hat{C}D \neq C\hat{D}A + A\hat{B}C$, τότε μεταξύ των πολυγωνικών γραμμών δεν υπάρχει καμία με ελάχιστο μήκος.

β) Αν $D\hat{A}B + B\hat{C}D = C\hat{D}A + A\hat{B}C$, τότε υπάρχουν πολλές πολυγωνικές γραμμές με ελάχιστο μήκος $2AC \cdot ημ\left(\frac{a}{2}\right)$, όπου $a = B\hat{A}C + C\hat{A}D + D\hat{A}B$.

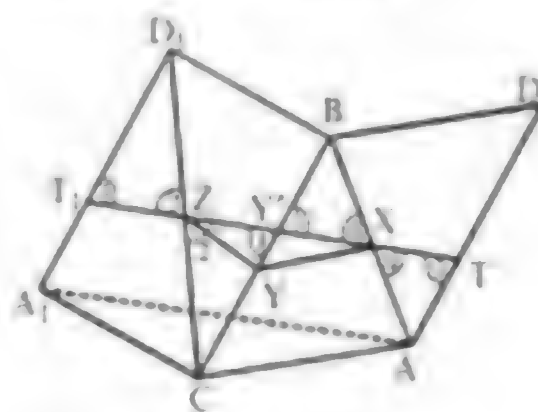
Λύση

Η γραμμή που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε είναι η τεθλασμένη XYZTX (σχήμα 59).

Ας υποθέσουμε ότι κόβουμε το τετράεδρο κατά μήκος των ακμών BD, AC και DA και «ξαπλώνουμε» τα τρίγωνα BCD και ABD στο επίπεδο του τριγώνου ABC. Κατόπιν τοποθετούμε το τρίγωνο ACD δίπλα στο BCD στο ίδιο επίπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα 60 και σημειώνουμε την πλευρά AD αριστερά με A_1D_1 για καλύτερη κατανόηση του σχήματος.



Σχήμα 59



Σχήμα 60

Θεωρούμε την γραμμή XYZ. Αν δεν είναι ευθεία μπορούμε να την ελαχιστοποιήσουμε μετακινώντας το Y στην τομή Y΄ του XZ και της BC. Αυτό είναι πάντα δυνατό, αφού τα οξυγώνια τρίγωνα ABC και BCD_1 σχηματίζουν ένα κυρτό τετράπλευρο ABD_1C, έτσι ώστε οποιοδήποτε τμήμα από ένα σημείο της AB προς ένα σημείο της CD_1 τέμνει την διαγώνιο BC. Ο ίδιος ισχυρισμός ισχύει και για την γραμμή TXY. Επομένως βλέπουμε ότι αν η γραμμή $TXYZT_1$ δεν είναι ευθεία, μπορεί πάντα να ελαχιστοποιηθεί μετακινώντας κάποια σημεία.

α) Ας υποθέσουμε ότι η γραμμή $TXYZT_1$ είναι ευθεία. Τότε οι γωνίες με την ίδια αρίθμηση είναι ίσες.

Έχουμε $\begin{matrix} A\hat{B}C + \hat{1} + \hat{4} = \pi \\ A_1\hat{D}_1C + \hat{2} + \hat{3} = \pi \end{matrix}$ και $\begin{matrix} B\hat{C}D_1 + \hat{1} + \hat{2} = \pi \\ D\hat{A}B + \hat{3} + \hat{4} = \pi \end{matrix}$

απ' όπου παίρνουμε $A\hat{B}C + A_1\hat{D}_1C = B\hat{C}D_1 + D\hat{A}B$ (στο σχήμα 60) η οποία αντιστοιχεί στην $A\hat{B}C + A\hat{D}C = B\hat{C}D + D\hat{A}B$ (στο σχήμα 59).

Αν η παραπάνω σχέση δεν ισχύει τότε η γραμμή $TXYZT_1$ δεν είναι ευθεία και επομένως δεν ελαχιστοποιείται.

β) Αν ισχύει $A\hat{B}C + A_1\hat{D}_1C = B\hat{C}D_1 + D\hat{A}B$ η γραμμή $TXYZT_1$ είναι ευθεία. Από την ιδιότητα $A\hat{T}X = D_1\hat{T}_1Z = \hat{3}$ έχουμε $AD \parallel A_1D_1$ και αφού $AD = A_1D_1$ σημαίνει ότι ADD_1A_1 είναι παραλληλόγραμμο. Αφού η ευθεία γραμμή $TXYZT_1$ αρχίζει από το T στην ακμή AD και τελειώνει στο $T_1 \equiv T$ στην ακμή $A_1D_1 \equiv AD$ σημαίνει ότι το ATT_1A_1 (σχήμα 60) είναι παραλληλόγραμμο και $TXYZT_1 = AA_1$. Στο ισοσκελές τρίγωνο CAA_1 έχουμε $AA_1 = 2AC \cdot ημ\left(\frac{A\hat{C}A_1}{2}\right)$ ή $AA_1 = 2AC \cdot ημ\left(\frac{\hat{a}}{2}\right)$, όπου $\hat{a} = A_1\hat{C}D_1 + D_1\hat{C}B + B\hat{C}A$.

Υπάρχουν λοιπόν πολλές τέτοιες γραμμές $TXYZT_1 \parallel AA_1$ με ελάχιστο μήκος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Αποδείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό m, υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο S σημείων στο επίπεδο με την επόμενη ιδιότητα. Για κάθε σημείο A του S, υπάρχουν ακριβώς m σημεία στο S, των οποίων η απόσταση από το A ισούται με τη μονάδα.

Λύση

α) Κατασκευή του συνόλου S.

Με την βοήθεια m μοναδιαίων διανυσμάτων του επιπέδου θα κατασκευάσουμε ένα σύνολο S αποτελούμενο από 2^m σημεία και έχοντας την απαιτούμενη ιδιότητα του προβλήματος. Κατασκευάζουμε τα διανύσματα $\vec{u} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_m\vec{u}_m$ (1), όπου $|\vec{u}_i| = 1, i = 1, 2, \ldots, m$ και ο κάθε συντελεστής c_i μπορεί να πάρει μία από τις δύο τιμές $\frac{1}{2}$ και $-\frac{1}{2}$.

Μπορούμε έτσι να φτιάξουμε 2^m τέτοια διανύσματα, των οποίων τα πέρατα αποτελούν το σύνολό μας S.

Θεωρούμε τώρα ένα συγκεκριμένο διάνυσμα $\vec{v}$ του τύπου (1) που το τέλος του είναι A και καθορίζουμε m διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ όπου:

$$\vec{v}_i = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_{i-1}\vec{u}_{i-1} - c_i\vec{u}_i + c_{i+1}\vec{u}_{i+1} + \cdots + c_m\vec{u}_m \quad (2).$$

Τα $\vec{v}_i$ διανύσματα διαφέρουν από το $\vec{v}$ μόνο στον i^o συντελεστή. Αν ο $i^{ος}$ συντελεστής του υ είναι $\frac{1}{2}$ τότε του $\vec{v}_i$ είναι $-\frac{1}{2}$ και αντίστροφα. Αυτό σημαίνει ότι $\vec{v} - \vec{v}_i = \pm\vec{u}_i, i = 1, 2, \ldots, m$, άρα $|\vec{v} - \vec{v}_i| = 1$ δηλαδή η απόσταση του $\vec{v}_i$ από το $\vec{v}$ ισούται με 1.

β) Περιορισμοί για τα m μοναδιαία διανύσματα.

Για να δείξουμε ότι, για κάθε $\vec{v}$ υπάρχουν ακριβώς m σημεία του S με απόσταση 1 από το $\vec{v}$, πρέπει για το συγκεκριμένο $\vec{v}$ να δείξουμε ότι:

(i) Τα m διανύσματα $\vec{v}_i$ που καθορίζονται από την (2) είναι διαφορετικά μεταξύ τους και

(ii) Κανένα άλλο διάνυσμα $\vec{w}$ του S έχει απόσταση 1 από το $\vec{v}$.

Η προϋπόθεση (i) σημαίνει ότι $\vec{v}_i - \vec{v}_j \neq \vec{0}$ για $i \neq j$.

Από την (2) έχουμε $\vec{v}_i - \vec{v}_j = -2c_i\vec{u}_i + 2c_j\vec{u}_j$ που δείχνει ότι, αν

$\vec{\upsilon}_i - \vec{\upsilon}_j = \vec{0}$ τότε $\vec{u}_i, \vec{u}_j$ είναι συγγραμμικά. Επομένως η προϋπόθεση (i) θα συμβαίνει όταν ανά δύο τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m$ είναι μη συγγραμμικά (3).

Η προϋπόθεση (ii) λέει ότι $|\vec{w} - \vec{\upsilon}| \neq 1$ για οποιοδήποτε $\vec{w} \in S$, το οποίο δεν είναι ένα από τα m διανύσματα που καθορίζονται από τη σχέση (2).

Αφού όλα τα $\vec{\upsilon}_i$ διαφέρουν από το $\vec{\upsilon}$ σε ένα ακριβώς συντελεστή, σημαίνει ότι το $\vec{w}$ διαφέρει από το $\vec{\upsilon}$ τουλάχιστον σε δύο συντελεστές.

Η προϋπόθεση (ii) σημαίνει ότι:

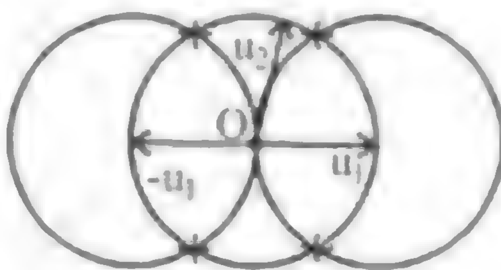
$$|\vec{w} - \vec{\upsilon}| = \left|\sum_{k=1}^{m} d_k \cdot \vec{u}_k\right| = |d_1\vec{u}_1 + d_2\vec{u}_2 + \cdots + d_m\vec{u}_m| \neq 1 \quad (4)$$

για όλους τους συντελεστές $d_k \in \{-1,0,1\}$ όπου τουλάχιστον δύο $d_k \neq 0$. Επομένως μπορούμε να κατασκευάσουμε το ζητούμενο σύνολο S, αν μπορούμε να πάρουμε m μοναδιαία διανύσματα που να ικανοποιούν τις σχέσεις (3) και (4).

γ) Με επαγωγή θα αποδείξουμε πως ικανοποιούνται οι απαιτήσεις (3) και (4).

Για $m = 2$ παίρνουμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{u}_1$.

Κατόπιν διαλέγουμε ένα άλλο μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{u}_2$ που δεν είναι συγγραμμικό με το $\vec{u}_1$ (3), έτσι ώστε το τέλος του να μην είναι ένα από τα τέσσερα σημεία που ο μοναδιαίος κύκλος με κέντρο O τέμνει τους μοναδιαίους κύκλους με κέντρα τα πέρατα των $\vec{u}_1$ και $-\vec{u}_1$. Τώρα $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ ικανοποιούν τις (3) και (4) προϋποθέσεις.



Σχήμα 61

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε $m-1$ μοναδιαία διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m-1}$ που ικανοποιούν τις προϋποθέσεις (3) και (4).

Αν $\vec{u}_m$ διαλεχτεί έτσι ώστε να διαφέρει από οποιοδήποτε των

διανυσμάτων $\sum_{i=1}^{m-1} d_i \vec{u}_i$ με $d_i \in \{-1,0,1\}$, τότε η προϋπόθεση (3) ικανοποιείται απο τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m$. Επιπλέον, αφού τα διανύσματα $\vec{s} = \sum_{i=1}^{m-1} d_i \vec{u}_i$, $d_i \in \{-1,0,1\}$ υπάρχουν, το διάνυσμα $\vec{s} + \vec{u}_m$ έχει μήκος 1 μόνο αν βρίσκεται σε μία από τις τομές του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο το O και των μοναδιαίων κύκλων με κέντρα τα πέρατα των $\vec{s}$.

Αυτοί οι μοναδιαίοι κύκλοι έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία. Έτσι για κάθε $\vec{s}$, $\vec{u}_m$ μπορούμε να επιλέξουμε σημείο ώστε $\vec{s} + \vec{u}_m$ και $\vec{s} - \vec{u}_m$ να αποφεύγουν αυτές τις τομές. Αυτό μπορεί να συμβεί γιατί από τον μοναδιαίο κύκλο με κέντρο O θα εξαιρεθεί πεπερασμένος αριθμός σημείων. Έτσι για το $\vec{u}_m$ διαλέγουμε ως τέλος του, ένα από τα υπόλοιπα σημεία αυτού του κύκλου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Έστω $A = [a_{ij}]$ $i, j = 1, 2, \ldots, n$ ένας τετραγωνικός πίνακας, τα στοιχεία του οποίου είναι μη αρνητικοί ακέραιοι. Να υποθέσετε ότι, οπουδήποτε ένα στοιχείο a_{ij} είναι 0, το άθροισμα των στοιχείων στην i γραμμή και στην j στήλη είναι μεγαλύτερο ή ίσο του n. Αποδείξτε ότι το άθροισμα όλων των στοιχείων του πίνακα είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $\frac{n^2}{2}$.

Λύση

Θεωρούμε τα αθροίσματα των σειρών $R_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) και τα αθροίσματα των στηλών $C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$). Σημειώνουμε με p το μικρότερο από αυτά τα αθροίσματα, δηλαδή $p = \min_{i,j} \{R_i, C_j\}$.

Περίπτωση 1η: Υποθέτουμε ότι $p \geq \frac{n}{2}$. Τότε το άθροισμα s όλων των

στοιχείων του πίνακα είναι τουλάχιστον $np \geq n\left(\frac{n}{2}\right)$ έτσι $s \geq \frac{n^2}{2}$ και ο ισχυρισμός είναι σωστός.

Περίπτωση 2η: Υποθέτουμε ότι $p < \frac{n}{2}$. Εναλλάσσοντας γραμμές και στήλες και ξανατοποθετώντας στη σειρά τις γραμμές μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα στοιχεία της πρώτης γραμμής έχουν άθροισμα p. Επίσης επανατοποθετώντας τις στήλες μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα πρώτα q στοιχεία στην πρώτη γραμμή είναι μη μηδενικά ενώ όλα τα άλλα στοιχεία της πρώτης γραμμής είναι 0.

Από την υπόθεση, το άθροισμα των στοιχείων σε καθεμία από τις $n-q$ στήλες που ξεκινούν από 0 συν το άθροισμα p των στοιχείων της πρώτης γραμμής είναι $\geq n$.

Επομένως το άθροισμα των στοιχείων σε καθεμία απ' αυτές τις στήλες είναι $\geq n-p$. Αφού υπάρχουν $n-q$ τέτοιες στήλες το άθροισμα όλων των στοιχείων σ' αυτές είναι $\geq (n-p)(n-q)$. Το άθροισμα όλων των στοιχείων στις πρώτες q στήλες είναι τουλάχιστον pq. Άρα το άθροισμα s όλων των στοιχείων του πίνακα ικανοποιεί τη σχέση:

$$s \geq (n-p)(n-q) + pq = n^2 - np - np + 2pq =$$
$$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}(n-2p)(n-2q)$$

Από την υπόθεση έχουμε $p < \frac{n}{2}$ άρα $n-2p > 0$. Ακόμα $q \leq \frac{n}{2}$, γιατί αν περισσότερα από $\frac{n}{2}$ στοιχεία της πρώτης γραμμής ήταν θετικοί ακέραιοι, το άθροισμά τους p θα ήταν $\geq \frac{n}{2}$. Επομένως $n-2p \geq 0$ και $s \geq \frac{n^2}{2}$ σ' όλες τις περιπτώσεις.



14η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1972

Τόπος Διοργάνωσης: Πολωνία (Τορούν)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών: S. Balcerzyk (Παν/μιο Τορούν)
Συμμετοχή: 14 χώρες με 8 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες Συμμετοχές: --
Μέγιστη Βαθμολογία: 40 βαθμοί ανά μαθητή
Τελική Βαθμολογία: Σοβ. Ένωση (270), Ουγγαρία (263), Αν. Γερμανία (239), Ρουμανία (206), Ηνωμένο Βασίλειο (179), Πολωνία (160), Γιουγκοσλαβία και Αυστρία (136).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να αποδείξετε ότι από ένα σύνολο δέκα διαφορετικών διψήφιων αριθμών (στο δεκαδικό σύστημα), είναι δυνατόν να επιλέξουμε δύο υποσύνολα ξένα μεταξύ τους, των οποίων τα στοιχεία να έχουν το ίδιο άθροισμα.

Λύση

Καταρχήν σημειώνουμε ότι, αν $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ είναι ένα σύνολο με n στοιχεία, τότε ο αριθμός των υποσυνόλων του είναι 2^n. Επομένως ο αριθμός των υποσυνόλων ενός συνόλου S με 10 στοιχεία είναι $2^{10} = 1024$.

Στο σύνολο με τα 10 στοιχεία που είναι διψήφιοι αριθμοί, το άθροισμα των στοιχείων σε οποιοδήποτε υποσύνολό του θα είναι μικρότερο ή ίσο του $10 \cdot 99 = 990$. Ακριβέστερα, το μεγαλύτερο δυνατό άθροισμα είναι

$$99 + 98 + \ldots + 91 + 90 = 945.$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε συνολικά 945 δυνατά αθροίσματα στοιχείων των υποσυνόλων του S, αν εξαιρέσουμε το κενό σύνολο, ενώ το πλήθος των υποσυνόλων είναι 1024. Επομένως, σύμφωνα με τη αρχή της

περιστεροφωλιάς τουλάχιστον δύο διαφορετικά υποσύνολα S_1, S_2 θα έχουν το ίδιο άθροισμα στοιχείων.

Αν τα υποσύνολα S_1, S_2 είναι ξένα μεταξύ τους, τότε αυτά αποτελούν τη λύση του προβλήματος. Αν είναι $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$, τότε αφαιρούμε από τα S_1, S_2 τα κοινά τους στοιχεία, οπότε προκύπτουν υποσύνολα S'_1, S'_2 που είναι ξένα μεταξύ τους και έχουν το ίδιο άθροισμα στοιχείων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να αποδείξετε ότι, αν n $\geqslant$ 4, κάθε τετράπλευρο εγγράψιμο σε κύκλο, μπορεί να διαιρεθεί σε n τετράπλευρα καθένα από τα οποία είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Λύση

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

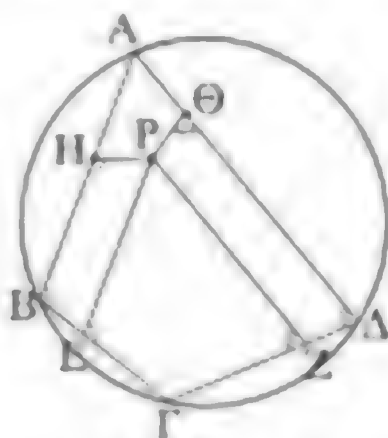
i) Έστω ΑΒΓΔ ένα εγγράψιμο τετράπλευρο, του οποίου η μικρότερη γωνία είναι η $\widehat{A}$. Θεωρούμε τυχόν σημείο Ρ στο εσωτερικό του τετραπλεύρου και φέρουμε τις ΡΕ || ΑΒ, ΡΖ || ΑΔ. Σχετικά με το διπλανό σχήμα, αν το Ρ είναι αρκετά κοντά στο Α, το Ε θα βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ ενώ το Ζ θα βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ. Φέρουμε και τις ΡΗ, ΡΘ έτσι ώστε $\widehat{Ρ\Theta\Delta} = \widehat{\Delta}$ και $\widehat{PHB} = \widehat{B}$. Επειδή $\widehat{B} > \widehat{A}$, το Η θα βρίσκεται μεταξύ Α και Β και ομοίως το Θ θα βρίσκεται μεταξύ των Α και Δ.

Το τετράπλευρο ΡΕΓΖ είναι εγγράψιμο, γιατί έχει τις γωνίες του μία προς μία ίσες με τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Το τετράπλευρο ΑΗΡΘ είναι εγγράψιμο, γιατί

$$\widehat{AHP} + \widehat{A\Theta P} = (180^\circ - \widehat{B}) + (180^\circ - \widehat{\Delta}) = 360^\circ - (\widehat{B} + \widehat{\Delta}) = 180^\circ.$$

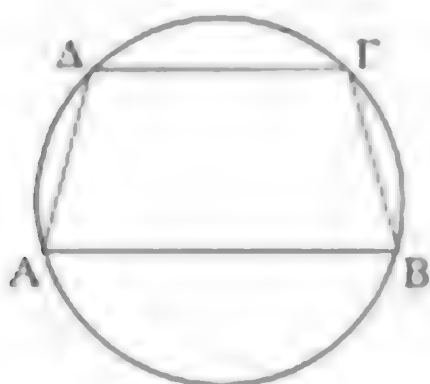
Τα τετράπλευρα ΡΗΒΕ, ΡΖΔΘ είναι εγγράψιμα, γιατί είναι ισοσκελή τραπέζια.

Επομένως έχουμε υποδιαιρέσει το τετράπλευρο ΑΒΓΔ σε τέσσερα εγγράψιμα τετράπλευρα. Είναι δυνατόν να υποδιαιρέσουμε το ΑΒΓΔ σε περισσότερα εγγράψιμα τετράπλευρα, αν για παράδειγμα σε κάποιο από τα ισοσκελή τραπέζια φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα προς τις βάσεις του.

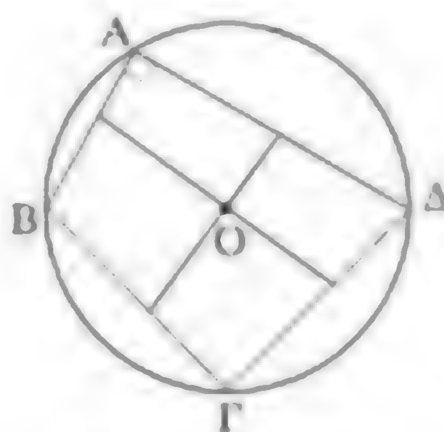


Σχήμα 62

ii) Έστω ΑΒΓΔ ένα εγγράψιμο τετράπλευρο, του οποίου οι μικρότερες γωνίες είναι δύο. Αν είναι $\widehat{A} = \widehat{B}$ ή $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$ οι δύο μικρότερες γωνίες, τότε το εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο και το πρόβλημα επιλύεται με παράλληλα τμήματα προς τις βάσεις του (Σχ 63 (Ι))



Σχήμα 63 (i),



Σχήμα 63 (ii)

Αν είναι $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$ οι δύο μικρότερες γωνίες του, τότε $\widehat{A} = \widehat{\Gamma} = 90°$. Στην περίπτωση αυτή όμως θα είναι $\widehat{B} + \widehat{\Delta} = 180°$, οπότε η μόνη δυνατή περίπτωση είναι να έχουμε και $\widehat{B} = \widehat{\Delta} = 90°$ οπότε το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και το πρόβλημα επιλύεται εύκολα. Διαφορετικά μία από τις γωνίες $\widehat{B}$, $\widehat{\Delta}$ θα ήταν μικρότερη των 90° (άτοπο).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω m και n είναι τυχαίοι μη αρνητικοί ακέραιοι. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

είναι ακέραιος. (Δίνεται ότι 0! = 1).

Λύση

Αν είναι n = 0, τότε n! = 1 και ο αριθμός γίνεται $\frac{(2m)!}{m!m!} = \binom{2m}{m}$ και είναι ακέραιος, για κάθε m μη αρνητικό ακέραιο.

Αν είναι n > 0, τότε γράφουμε

$$f(m, n) = \frac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!(m+n)!} \qquad (1)$$

και παρατηρούμε ότι

$$f(m, n-1) = \frac{(2m)!\,(2n-2)!}{m!\,(n-1)!\,(m+n-1)!},$$

$$f(m, +1\ n-1) = \frac{(2m+2)!\,(2n-2)!}{(m+1)!\,(n-1)!\,(m+n\,)!},$$

οπότε λαμβάνουμε την αναδρομική σχέση

$$f(m, n) = 4f(m, n-1) - f(m+1, n-1) \qquad (2)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε, μέσω της (2), τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Έχουμε ήδη αποδείξει, ότι για n = 0, ο αριθμός f(m, 0) είναι ακέραιος για κάθε μη αρνητικό ακέραιο m. Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός f(m, n - 1) είναι ακέραιος για κάθε μη αρνητικό ακέραιο m, τότε από τη αναδρομική σχέση (2) προκύπτει ότι και ο αριθμός f(m , n) είναι ακέραιος για κάθε μη αρνητικό ακέραιο m.

Επομένως, ο αριθμός f(m, n) είναι ακέραιος, για όλους τους m και n μη αρνητικούς ακέραιους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να βρεθούν όλες οι λύσεις $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ του συστήματος των ανισοτήτων

$$\begin{aligned}
&(x_1^2 - x_3x_5)\cdot(x_2^2 - x_3x_5) \le 0\\
&(x_2^2 - x_4x_1)\cdot(x_3^2 - x_4x_1) \le 0\\
&(x_3^2 - x_5x_2)\cdot(x_4^2 - x_5x_2) \le 0,\\
&(x_4^2 - x_1x_3)\cdot(x_5^2 - x_1x_3) \le 0\\
&(x_5^2 - x_2x_4)\cdot(x_1^2 - x_2x_4) \le 0
\end{aligned} \qquad (\Sigma)$$

όπου x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

Λύση

Κάθε ανίσωση του συστήματος (Σ) είναι της μορφής

$$(x_i^2 - x_{i+2}x_{i+4}) \cdot (x_{i+1}^2 - x_{i+2}x_{i+4}) \leqslant 0, \qquad (1)$$

όπου οι δείκτες θεωρούνται modulo 5, δηλαδή $x_{j+5} = x_j$.

Αν εκτελέσουμε τις πράξεις στο αριστερό μέλος της (1) και προσθέσουμε κατά μέλη τις πέντε ανισότητες του (Σ), για i = 1, 2, 3, 4, 5 θα λάβουμε

10 όρους της μορφής $x_i^2 x_j^2$, $i \neq j$

5 όρους της μορφής $- x_i^2 x_{i+1} x_{i+2}$ και

5 όρους της μορφής $- x_i^2 x_{i+2} x_{i+4}$,

οι οποίοι τελικά δίνουν

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i^2 - x_{i+2}x_{i+4}) \cdot (x_{i+1}^2 - x_{i+2}x_{i+4}) \leqslant 0$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} \{(x_i x_{i+1} - x_i x_{i+3})^2 + (x_{i-1} x_{i+1} - x_{i-1} x_{i+3})^2\} \leqslant 0$$

από την οποία έπεται ότι

$$\left.\begin{cases} x_i x_{i+1} - x_i x_{i+3} = 0 \\ x_{i-1} x_{i+1} - x_{i-1} x_{i+3} = 0 \end{cases}\right\}, \ i = 1, 2, 3, 4, 5$$

ή ισοδύναμα $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$.

Επομένως κάθε πεντάδα $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (c, c, c, c, c)$, όπου c θετικός πραγματικός αριθμός είναι λύση του (Σ).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Έστω f και g είναι πραγματικές συναρτήσεις που ορίζονται για όλες τις πραγματικές τιμές των x και y και ικανοποιούν την εξίσωση

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)g(y)$$

για κάθε x, y. Να αποδείξετε ότι, αν η f(x) δεν είναι η μηδενική συνάρτηση και αν $|f(x)| \leqslant 1$ για κάθε x, τότε $|g(y)| \leqslant 1$ για κάθε y.

Λύση (1ος τρόπος)

Επειδή $|f(x)| \leqslant 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $|f|$ είναι φραγμένη, οπότε έχει ελάχιστο άνω φράγμα, έστω M, συμβολικά $M = \sup|f(x)|$ ή $M = \text{lub}|f(x)|$. Επιπλέον θα είναι $M > 0$, αφού η f δεν είναι η μηδενική

συνάρτηση.

Υποθέτουμε ότι η ανισότητα $|g(y)| \leqslant 1$, για κάθε $y \in \mathbb{R}$, δεν ισχύει, οπότε θα υπάρχει $y_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $|g(y_0)| > 1$.

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση του προβλήματος και την τριγωνική ανισότητα λαμβάνουμε

$$2\,|f(x)|\,|g(y_0)| = |f(x + y_0) + f(x - y_0)| \leqslant |f(x + y_0)| + |f(x - y_0)| \leqslant 2M.$$

Επομένως έχουμε

$$|f(x)| \leqslant \frac{M}{|g(y_0)|} < M, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ (αφού } |g(y_0)| > 1)$$

που είναι άτοπο, γιατί το M είναι το ελάχιστο άνω φράγμα της $|f(x)|$.

Επομένως, θα είναι $|g(y)| \leqslant 1$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

2^{ος} τρόπος

Επειδή η f δεν είναι μηδενική συνάρτηση, υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(\alpha) \neq 0$. Θέτουμε στη δοθείσα εξίσωση $x = \alpha + ny$, $n \in \mathbb{Z}$ οπότε λαμβάνουμε τελικά

$$f(\alpha + (n + 1)y) - 2f(\alpha + ny)g(y) + f(\alpha + (n - 1)y) = 0 \qquad (1)$$

Αν θεωρήσουμε το y σταθερό και συμβολίσουμε το $f(\alpha + ny)$ με f_n, τότε από την (1) προκύπτει η εξίσωση διαφορών

$$f_{n+1} - 2gf_n + f_{n-1} = 0, \qquad (2)$$

η οποία έχει λύσεις της μορφής

$$f_n = b_1 r_1^n + b_2 r_2^n, \qquad (3)$$

υπό τον όρο ότι οι ρίζες r_1, r_2 της αντίστοιχης χαρακτηριστικής εξίσωσης $r^2 - 2gr + 1 = 0$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Εδώ είναι

$$r_1 = g + \sqrt{g^2 - 1},\ r_2 = g - \sqrt{g^2 - 1}$$

και είναι διαφορετικές μεταξύ τους, αν $g \neq \pm 1$.

Αν υποθέσουμε ότι ισχύει $g(y_0) > 1$για κάποιο y_0, τότε από τα παραπάνω για $y = y_0$ προκύπτει ότι $r_1 > 1$ και $\lim r_1^n = +\infty$ οπότε:

- Αν $b_1 \neq 0$, η συνάρτηση f_n γίνεται μη φραγμένη καθώς $n \to +\infty$, που είναι αντίθετο προς την υπόθεση, $|f(x)| \leqslant 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Αν $b_1 = 0$, τότε $b_2 \neq 0$ (αφού $f(\alpha) = b_2 \neq 0$). Επειδή $r_1 r_2 = 1$, θα ισχύει $0 < r_2 < 1$. Τότε όμως από την εξίσωση (3) προκύπτει, ότι η

συνάρτηση f_n είναι μη φραγμένη καθώς n -> - ∞, που είναι πάλι αντίθετο προς την υπόθεση $|f(x)| \leqslant 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο, αν υποθέσουμε ότι ισχύει $g(y_0) < -1$ για κάποιο y_0.

Άρα θα είναι $|g(y)| \leqslant 1$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση 1

Και οι δύο λύσεις εξακολουθούν να ισχύουν, αν η υπόθεση $|f(x)| \leqslant 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αντικατασταθεί από την υπόθεση $|f(x)| \leqslant B$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου B είναι οποιαδήποτε θετική σταθερά. Ο λόγος είναι ότι και στις δύο λύσεις χρησιμοποιήθηκε μόνο η υπόθεση του φραγμένου για την $|f|$.

Παρατήρηση 2

Για αυτούς που γνωρίζουν Λογισμό Συναρτήσεων μιας μεταβλητής, πρέπει να σημειώσουμε ότι με την πρόσθετη υπόθεση ότι η συνάρτηση g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα που περιέχει το 0, μπορούν να αποδείξουν ότι η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$f''(x) = g''(0)f(x) \quad (4)$$

Αν ήταν $g''(0) \geqslant 0$, καμία μη τετριμμένη λύση της (4) δεν είναι φραγμένη. Επομένως $g''(0) < 0$, οπότε η (4) έχει τη γενική λύση

$$f(x) = A\ ημ(αx + θ),\ όπου\ α = \sqrt{-g''(0)},$$

από την οποία μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $g(y) = συναy$.

Παρατήρηση 3

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση διαφορών (2) ικανοποιείται από τις συναρτήσεις $f_j = συν\ jx$, $g = συνx$. Αυτό μπορεί να επαληθευτεί εύκολα με μετατροπή των συναρτήσεων

$$f_{n+1} = συν(nx + x),\ f_{n-1} = συν(nx - x)$$

σε αθροίσματα. Με $f_0 = 1$, $f_1 = g$, τότε η αναδρομική σχέση (2) παράγει τις συναρτήσεις

$$f_n = -f_{n-2} + 2gf_{n-1} = συνnx,\ n = 2, 3, ...$$

ως πολυώνυμα μεταβλητής $g = συνx$. Τα πολυώνυμα αυτά ονομάζονται **πολυώνυμα του Chebyshev** και έχουν σημαντικές εφαρμογές.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Δίνονται τέσσερα διαφορετικά παράλληλα επίπεδα. Να αποδείξετε ότι υπάρχει κανονικό τετράεδρο που έχει μία κορυφή σε κάθε επίπεδο.

Λύση

Συμβολίζουμε με Π_0, Π_1, Π_2, Π_3 τα τέσσερα επίπεδα υποδηλώνοντας έτσι και τη σειρά τους στο χώρο. Έστω d_i είναι η απόσταση του επιπέδου Π_0 από το επίπεδο Π_i, $i = 1, 2, 3$.

Θα λύσουμε το πρόβλημα θεωρώντας ένα κανονικό τετράεδρο $P_0 P_1P_2P_3$ πλευράς μήκους 1 και παράλληλα επίπεδα Π_0', Π_1', Π_2', Π_3' που περνάνε από τις κορυφές του, έτσι ώστε

i) οι κορυφές P_1, P_2, P_3 να βρίσκονται στον ίδιο ημίχωρο ως προς το επίπεδο Π_0'

ii) οι αποστάσεις d_i' των επιπέδων Π_i', $i = 1, 2, 3$ από το επίπεδο Π_0' να ικανοποιούν τις ισότητες:

$$\frac{d_1}{d_1'} = \frac{d_2}{d_2'} = \frac{d_3}{d_3'}, \qquad (1)$$

Η προηγούμενη θεώρηση μπορεί να γίνει γιατί όταν το πρόβλημα επιλυθεί έτσι, είναι δυνατόν με μία περιστροφή να επιτύχουμε $\Pi_0' \parallel \Pi_0$ και τότε με ένα μετασχηματισμό ομοιοθεσίας, (διαστολής ή συστολής) με τον παράγοντα $\frac{d_1}{d_1'}$, να καταλήξουμε στην επίλυση του αρχικού προβλήματος.

Είναι κατάλληλο να τοποθετήσουμε το σημείο P_0 στο επίπεδο Π_0 και να θεωρήσουμε το P_0 ως αρχή ενός συστήματος συντεταγμένων στο χώρο, έστω $(P_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$, όπου $\overrightarrow{P_0P_1} = \vec{r}_1$, $\overrightarrow{P_0P_2} = \vec{r}_2$, $\overrightarrow{P_0P_3} = \vec{r}_3$. Θα προσδιορίσουμε τα επίπεδα Π_i' βρίσκοντας το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμά τους $\vec{N}$. Επειδή το $\vec{N}$ είναι μοναδιαίο και κάθετο προς τα επίπεδα Π_i' και $P_i \in \Pi_i'$, η απόσταση των επιπέδων Π_0' και Π_i' θα είναι

$$d_i' = \vec{r}_i \cdot \vec{N},$$

όπου $\vec{r}_i \cdot \vec{N}$ συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{r}_i$ και $\vec{N}$. Επομένως οι εξισώσεις (1) μπορούν να γραφούν

$$\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{N}}{d_1} = \frac{\vec{r}_2 \cdot \vec{N}}{d_2} = \frac{\vec{r}_3 \cdot \vec{N}}{d_3}, \qquad (2)$$

όπου οι συντεταγμένες (a_i, b_i, c_i) των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{r}_i$ είναι γνωστές, ενώ οι συντεταγμένες (x, y, z) του μοναδιαίου καθέτου διανύσματος $\vec{N}$ πρέπει να προσδιορισθούν.

Οι εξισώσεις (2) είναι ισοδύναμες με το ομογενές γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0$$

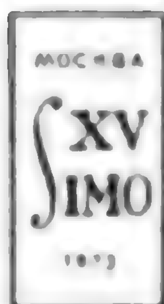
$$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = 0, \qquad (3)$$

όπου

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{d_1} - \frac{a_2}{d_2},\ b_1 = \frac{b_1}{d_1} - \frac{b_2}{d_2},\ \gamma_1 = \frac{c_1}{d_1} - \frac{c_2}{d_2},$$

$$\alpha_2 = \frac{a_1}{d_1} - \frac{a_3}{d_3},\ b_2 = \frac{b_1}{d_1} - \frac{b_3}{d_3},\ \gamma_2 = \frac{c_1}{d_1} - \frac{c_3}{d_3}.$$

Το ομογενές σύστημα (3) έχει μία τουλάχιστον μη μηδενική λύση (x, y, z). Το συμπέρασμα αυτό είναι μία ειδική περίπτωση του γενικού θεωρήματος, που λέει ότι ένα ομογενές γραμμικό σύστημα n – 1 εξισώσεων και n αγνώστων έχει μία τουλάχιστον μη μηδενική λύση και μπορεί να αποδειχθεί με απαλοιφή και επαγωγή ως προς n.



$15^{η}$ Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1973

Τόπος Διοργάνωσης:	Σοβιετική Ένωση (Μόσχα)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	V. Ivan Jakovlievic (Παν/μιο Μόσχας)
Συμμετοχή:	16 χώρες με 8 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες Συμμετοχές:	- -
Μέγιστη Βαθμολογία:	40 βαθμοί ανά μαθητή
Τελική Βαθμολογία:	Σοβ. Ένωση (254), Ουγγαρία (215), Αν. Γερμανία (188), Πολωνία (174), Ηνωμένο Βασίλειο (164), Γαλλία (153), Τσεχοσλοβακία (149), Ρουμανία (206).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Το σημείο O βρίσκεται σε ευθεία g. Τα διανύσματα $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2} \dots \overrightarrow{OP_n}$ είναι μοναδιαία και τέτοια ώστε τα σημεία $P_1, P_2, \dots, P_n$ να βρίσκονται σε ένα επίπεδο Π που περιέχει την ευθεία g και στο ένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η g επί του Π. Αν είναι ο n περιττός, να αποδείξετε ότι

$$|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \dots + \overrightarrow{OP_n}| \geqslant 1.$$

[Εδώ με $|\overrightarrow{OP}|$ συμβολίζουμε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OP}$.]

Λύση

Θα λύσουμε την άσκηση με επαγωγή ως προς το n. Θα χρησιμοποιήσουμε όμως την ακόλουθη βοηθητική πρόταση:

Λήμμα: Αν η γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{\upsilon}$ είναι $\theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, τότε

$$|\vec{u} + \vec{\upsilon}| \geqslant |\vec{u}| \text{ και } |\vec{u} + \vec{\upsilon}| \geqslant |\vec{\upsilon}|.$$

Απόδειξη:

Έχουμε $|\vec{u} + \vec{\upsilon}|^2 = (\vec{u} + \vec{\upsilon}) \cdot (\vec{u} + \vec{\upsilon})$

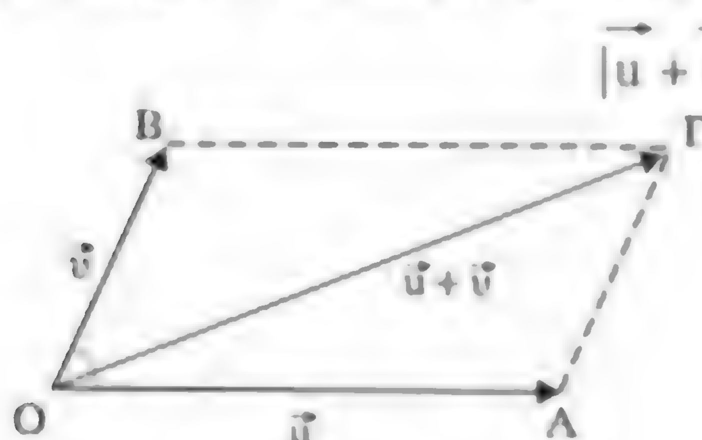
$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{\upsilon}|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{\upsilon}$$

$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{\upsilon}| \,\text{συνθ}$$

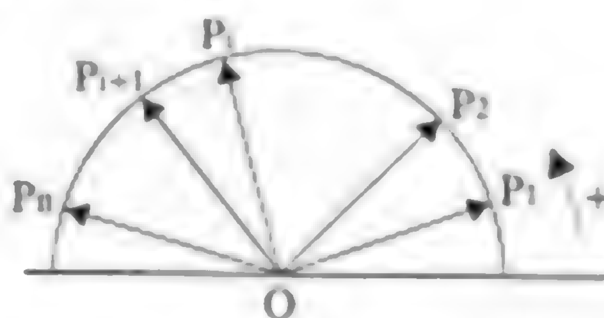
$$\geqslant |\vec{u}|^2, \text{ αφού } 0 \leqslant \text{συνθ} \leqslant 1.$$

Ομοίως, έχουμε και την ανίσωση

$$|\vec{u} + \vec{\upsilon}|^2 \geqslant |\vec{\upsilon}|^2.$$



Σχήμα 64



Σχήμα 65

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης ότι το άθροισμα $\vec{u} + \vec{\upsilon}$ δύο διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{\upsilon}$ βρίσκεται μέσα στη γωνία των $\vec{u}$ και $\vec{\upsilon}$, όπως φαίνεται εύκολα από τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Αριθμούμε τα σημεία P_i, έτσι ώστε να τα συναντάμε με αύξουσα σειρά στο δείκτη τους καθώς κινούμεθα στο μοναδιαίο ημικύκλιο (Σχ. 65) κατά τη θετική φορά.

Θέτουμε $\vec{OP_i} = \vec{u_i}$ και $\vec{OP_1} + \vec{OP_2} + ... + \vec{OP_n} = \vec{u}$, δηλαδή

$$\vec{u} = \vec{u_1} + \vec{u_2} + ... + \vec{u_n}.$$

Θα δείξουμε ότι, αν n περιττός, τότε είναι $|\vec{u}| \geqslant 1$.

Για n = 1, είναι $|\vec{u}| = |\vec{u_1}| = 1$, οπότε το ζητούμενο αληθεύει.

Έστω ισχύει το ζητούμενο για n = 2κ - 1, δηλαδή ισχύει

$$|\vec{\upsilon}| = |\vec{u_2} + \vec{u_3} + ... + \vec{u_{2\kappa-1}}| \geqslant 1$$

Επιπλέον το διάνυσμα $\vec{\upsilon}$ θα βρίσκεται μεταξύ των $\vec{OP_1}$ και $\vec{OP_{2\kappa-1}}$, δη-

λαδή μέσα στη γωνία $P_1\widehat{O}P_{2\kappa-1}$.

Θεωρούμε τώρα $n + 1 = 2\kappa + 1$ διανύσματα, όπως παραπάνω, και θέτουμε:

$\vec{\upsilon} = \vec{u}_2 + \vec{u}_2 + ... + \vec{u}_{2\kappa}$, $\vec{w} = \vec{u}_1 + \vec{u}_{2\kappa+1}$, οπότε $\vec{u} = \vec{\upsilon} + \vec{w} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + ... + \vec{u}_{2\kappa} + \vec{u}_{2\kappa+1}$.

Θα είναι $\vec{w} = \vec{0}$, μόνον όταν $\vec{u}_1 = -\vec{u}_{2\kappa+1}$, δηλαδή όταν τα $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_{2\kappa+1}$ βρίσκονται πάνω στην ευθεία g με αντίθετη φορά. Τότε όμως $|\vec{u}| = |\vec{\upsilon} + \vec{w}| = |\vec{\upsilon}| \geqslant 1$, από την υπόθεση της επαγωγής.

Αν είναι $\vec{u}_{2\kappa+1} \neq -\vec{u}_1$, τότε το διάνυσμα $\vec{w}$ θα έχει τη διεύθυνση της διχοτόμου της γωνίας $P_1\widehat{O}P_{2\kappa+1}$, οπότε θα σχηματίζει γωνίες μικρότερες του $\frac{\pi}{2}$ με τα διανύσματα $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_{2\kappa+1}$. Επίσης και το $\vec{\upsilon}$, που βρίσκεται μέσα στη γωνία $P_1\widehat{O}P_{2\kappa-1}$ θα σχηματίζει οξεία γωνία με το διάνυσμα $\vec{w}$, οπότε σύμφωνα με το λήμμα, θα είναι

$$|\vec{u}| = |\vec{\upsilon} + \vec{w}| \geqslant |\vec{\upsilon}| \geqslant 1.$$

Παρατήρηση

Η άσκηση δεν αληθεύει για άρτιο αριθμό διανυσμάτων $\vec{u}_i$, όπως για παράδειγμα για $n = 2$, και $(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2}) = 0 \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να εξετάσετε αν υπάρχει ή όχι ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων Μ στο χώρο που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και είναι τέτοια ώστε για οποιαδήποτε δύο σημεία Α και Β του Μ, μπορούμε να βρούμε δύο άλλα σημεία Γ και Δ του Μ έτσι ώστε οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ να είναι παράλληλες, χωρίς να συμπίπτουν.

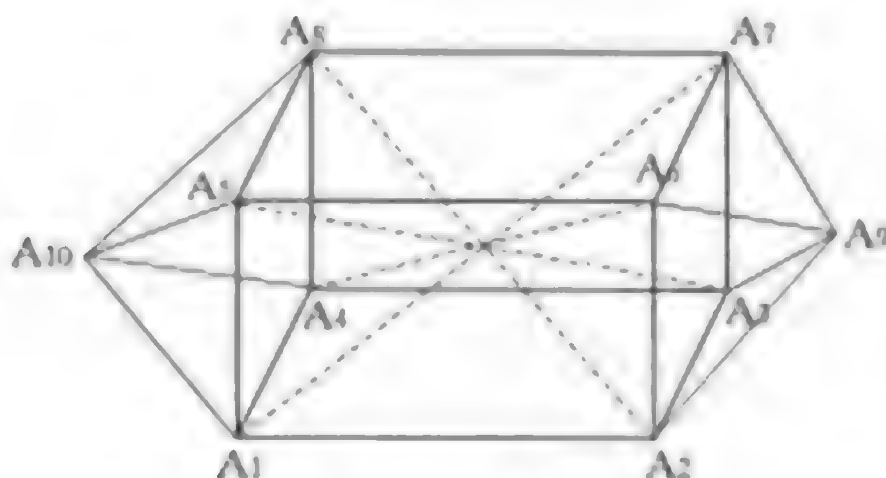
Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος, αν θεωρήσουμε δύο σημεία A_1 και A_2 ενός συνόλου Μ, τότε πρέπει να υπάρχουν και σημεία A_3, A_4 τέτοια ώστε $A_1A_2 \parallel A_3A_4$.

Θεωρώντας , όμως, τα παραπάνω τέσσερα σημεία, εμφανίζονται και τα ζεύγη των σημείων A_1, A_3, των A_1, A_4, των A_2, A_3 και A_2, A_4.

Επομένως πρέπει κατ' αρχήν να θεωρήσουμε το τετράπλευρο $A_1A_2A_3A_4$ παραλληλόγραμμο, οπότε θα είναι και $A_1A_4 \parallel A_2A_3$. Όμως για τις

ευθείες A_1A_3 και A_2A_4 δεν υπάρχουν παράλληλες που να ορίζονται από τα τέσσερα σημεία που έχουμε θεωρήσει. Επομένως, πρέπει να θεωρήσουμε και άλλα δύο ζεύγη σημείων A_5, A_7 και A_6, A_8 έτσι ώστε $A_1A_3 \parallel A_5A_7$ και $A_2A_4 \parallel A_6A_8$. Τότε όμως εμφανίζονται και άλλες ευθείες από καινούργια ζεύγη σημείων, όπως οι A_1A_5, A_2A_6, A_3A_7, A_4A_8, A_5A_6, A_6A_7, A_7A_8, A_8A_5, κ.ο.κ.



Σχήμα 66

Για την ύπαρξη παραλλήλων ευθειών ανά δύο, πρέπει τα σημεία A_5, A_6, A_7, A_8 να ληφθούν σε επίπεδο παράλληλο προς αυτό των A_1, A_2, A_3, A_4, οπότε το $A_5A_6A_7A_8$ πρέπει να είναι παραλληλόγραμμο ίσο προς το $A_1A_2A_3A_4$. Άρα το στερεό πολύεδρο $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ θα είναι παραλληλεπίπεδο, όχι κατ' ανάγκη ορθογώνιο.

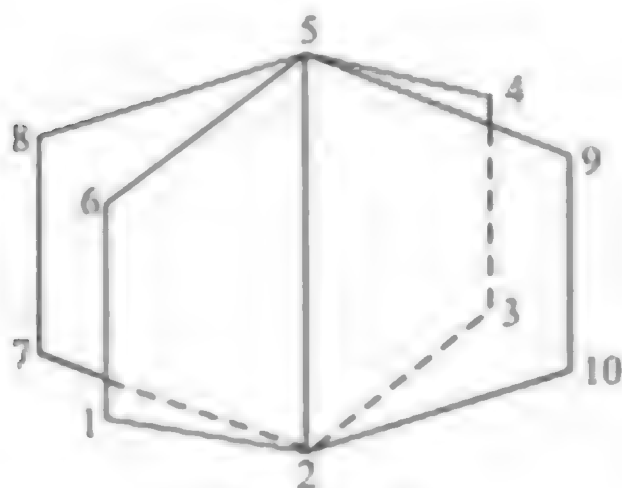
Στο παραλληλεπίπεδο οι πλευρές και οι διαγώνιοι κάθε έδρας είναι παράλληλες προς τις αντίστοιχες πλευρές και διαγωνίους της απέναντι έδρας. Όμως για τις διαγωνίους A_1A_7, A_3A_5, A_2A_8 και A_4A_6 δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες που να ορίζονται από τα 8 σημεία που θεωρήσαμε. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να αντιμετωπισθεί αν θεωρήσουμε δύο επιπλέον σημεία A_9 και A_{10}. Το A_9 είναι το αντίστοιχο του κέντρου Ο του παραλληλεπιπέδου, αν θεωρήσουμε παράλληλη μεταφορά της πυραμίδας $OA_1A_4A_8A_5$, έτσι ώστε η βάση $A_1A_4A_8A_5$ να συμπέσει με την $A_2A_3A_7A_6$. Το A_{10} προκύπτει ομοίως από παράλληλη μετατόπιση της πυραμίδας $OA_2A_3A_7A_6$ έτσι ώστε η βάση $A_2A_3A_7A_6$ να συμπέσει με την $A_1A_4A_8A_5$. Εύκολα επαληθεύουμε ότι το σύνολο των ευθειών που ορίζονται από τα δέκα σημεία που θεωρήσαμε, έχουν παράλληλη μέσα στο σύνολο των ευθειών αυτών.

Για παράδειγμα, επειδή είναι $A_1O \parallel= A_2A_9$ και $OA_7 \parallel= A_8A_{10}$, $A_1O = OA_7$ θα είναι $A_2A_9 \parallel= A_8A_{10}$, οπότε $A_9A_8A_{10}A_2$ είναι παραλληλόγραμμο και $A_9A_8 \parallel A_{10}A_2$.

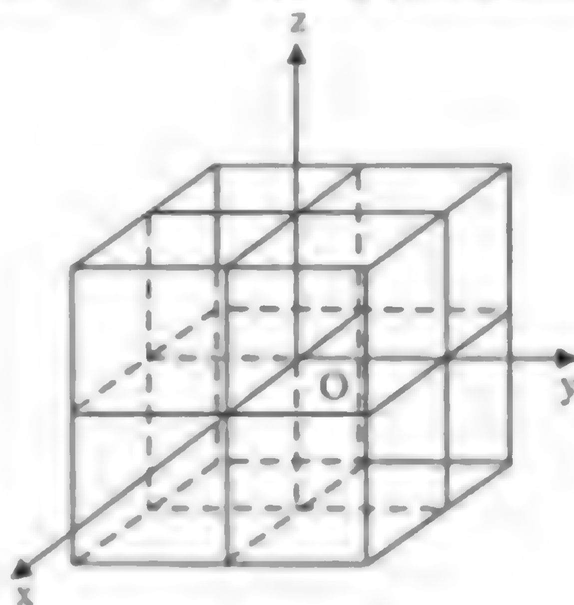
Επίσης τα 10 σημεία δύο ομοίως κειμένων εξαγώνων με μια κοινή διαγώνιο, αποτέλουν λύση του προβλήματος (Σχήμα 67).

Επίσης το κέντρο και τα 26 σημεία ένος κύβου πλευράς 2 (Σχήμα 68)

αποτελούν λύση του προβλήματος. Ισοδύναμα τα 27 σημεία (x, y, z) του χώρου με συντεταγμένες –1, 0, 1 αποτελούν λύση του προβλήματος.



Σχήμα 67



Σχήμα 68

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω α και b πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε η εξίσωση

$$x^4 + \alpha x^3 + bx^2 + \alpha x + 1 = 0$$

να έχει τουλάχιστον μία λύση στους πραγματικούς αριθμούς. Για όλα τα παραπάνω ζεύγη (α, b) βρείτε την ελάχιστη τιμή του αθροίσματος $\alpha^2 + b^2$.

Λύση

Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι η εξίσωση $x + \frac{1}{x} = y$, $y \in \mathbb{R}$ είναι ισοδύναμη προς την εξίσωση $x^2 - yx + 1 = 0$, η οποία έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, αν και μόνο αν, $|y| \geqslant 2$.

Για την επίλυση της δοθείσας εξίσωσης, τη διαιρούμε με x^2 και θέτουμε $x + \frac{1}{x} = y$, οπότε $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ και η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$y^2 + \alpha y + (b - 2) = 0 \qquad (1)$$

η οποία έχει τις λύσεις

$$y = x + \frac{1}{x} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4(b-2)}}{2} \quad , (2)$$

εφόσον ισχύει $\alpha^2 - 4(b - 2) \geqslant 0$.

Η εξίσωση (2), ως προς x, έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, σύμφωνα με όσα παρατηρήσαμε παραπάνω, αν, και μόνον αν,

$$|-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4(b-2)}| \geqslant 4 \text{ ή } |-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4(b-2)}| \geqslant 4$$

$$\Leftrightarrow |-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4(b-2)}| \geqslant 4 \text{ ή } |\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4(b-2)}| \geqslant 4$$

$$\Leftrightarrow \text{ ή } -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4(b-2)} \leqslant -4 \text{ ή}$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4(b-2)}| \geqslant 4 \text{ ή } \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4(b-2)}| \leqslant -4$$

$$\Leftrightarrow |\alpha| + \sqrt{\alpha^2 - 4(b-2)} \geqslant 4 \text{ ή } |\alpha| + \sqrt{\alpha^2 + 4(b-2)} \leqslant -4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2 - 4(b-2)} \geqslant 4 - |\alpha|$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 4b + 8 \geqslant 16 - 8|\alpha| + \alpha^2$$

$$\Leftrightarrow 8|\alpha| \geqslant 8 + 4b \text{ ή } 2|\alpha| \geqslant 2 + b \text{ ή } 4\alpha^2 \geqslant b^2 + 4b + 4$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2 + 4b^2 \geqslant 5b^2 + 4b + 4$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + b^2 \geqslant \frac{5}{4}\left(b^2 + \frac{4}{5}b + \frac{4}{5}\right) = \frac{5}{4}\left(b + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}.$$

Επομένως, η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος $\alpha^2 + b^2$ λαμβάνεται όταν $b + \frac{2}{5} = 0$ ή $b = -\frac{2}{5}$ και είναι ίση προς $\frac{4}{5}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Ένας στρατιώτης πρέπει να ελέγξει ως προς την ύπαρξη ναρκών ένα χωριό σχήματος ισοπλεύρου τριγώνου. Η ακτίνα δράσης του ανιχνευτή ναρκών που διαθέτει ισούται με το μισό του ύψους του τριγώνου. Αν ο στρατιώτης ξεκινάει από μία κορυφή του τριγώνου, να βρεθεί η διαδρομή που πρέπει να ακολουθήσει για να εκτελέσει την αποστολή του διανύοντας το ελάχιστο δυνατό διάστημα.

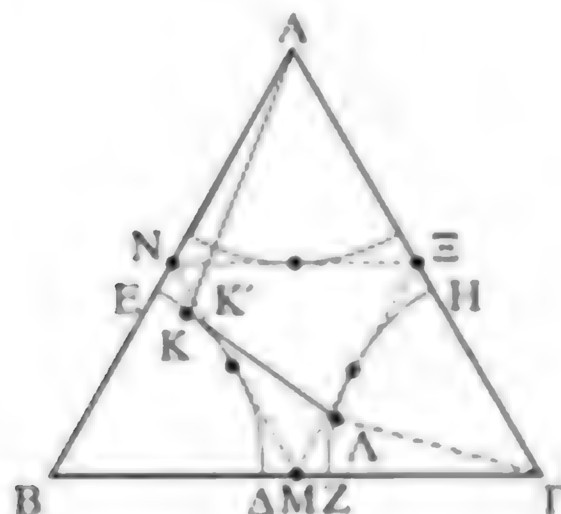
Λύση

Έστω ΑΒΓ το ισόπλευρο τρίγωνο που παριστά το χωρίο που πρέπει να ελέγξει ο στρατιώτης. Υποθέτουμε ότι ο στρατιώτης ξεκινάει από την κορυφή Α του τριγώνου. Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι για να ελέγξει τις κορυφές Β και Γ του τριγώνου, πρέπει οπωσδήποτε να βρεθεί σε κάποιο σημείο των κύκλων $\left(\Gamma, \frac{\upsilon}{2}\right)$ και $\left(B, \frac{\upsilon}{2}\right)$, εσωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ, όπου υ είναι το ύψος του τριγώνου.

Επομένως, ζητάμε να προσδιορίσουμε σημεία Κ και Λ, των τόξων ΔΕ και ΖΗ αντίστοιχα, έτσι ώστε το μήκος της διαδρομής ΑΚΛ να είναι το ελάχιστο δυνατό. Ισοδύναμα, αρκεί το άθροισμα ΑΚ + ΚΛ να είναι ελάχιστο ή αφού $ΛΓ = \frac{υ}{2}$ αρκεί το άθροισμα ΑΚ + ΚΛ + ΛΓ να είναι ελάχιστο ή τελικά αρκεί το άθροισμα ΑΚ + ΚΓ να είναι ελάχιστο.

Έστω Κ τυχόν σημείο του τόξου ΔΕ και Μ, Ν τα μέσα των ΒΓ, ΒΑ, αντίστοιχα. Αν η ΑΚ τέμνει τη ΜΝ στο Κ΄ τότε ισχύει:

$$AK + KΓ \geqslant AK' + K'Γ.$$



Σχήμα 69

Όμως για $K' \in MN$, έχουμε:

$$\min(AK' + K'Γ) = AK_0 + K_0Γ,\ K' \in MN$$

όπου K_0 είναι το μέσον του τμήματος ΜΝ το οποίο επιπλέον είναι και σημείο επαφής του κύκλου $\left(B, \frac{υ}{2}\right)$ με την ευθεία ΜΝ. Σημειώνουμε εδώ ότι το K_0 προκύπτει ως σημείο τομής της Α΄Γ με τη ΜΝ, όπου Α΄ είναι το συμμετρικό του Α ως προς τη ΜΝ. Επομένως το K_0 είναι το ζητούμενο σημείο και $AK_0Λ_0$ είναι η ζητούμενη διαδρομή ελάχιστου μήκους

$$AK_0 + K_0Λ_0 = \frac{α\sqrt{7}}{4} + \left(\frac{α\sqrt{7}}{4} - \frac{α\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$= α\left(\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right),$$

όπου α η πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ.

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης πρέπει να δείξουμε ότι κάθε σημείο

της διαδρομής $AK_0\Lambda_0$ απόσταση μικρότερη ή ίση του $\frac{\upsilon}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}$. Αυτό προκύπτει από τις σχέσεις

$$K_0N = \frac{\alpha}{4} < \frac{\alpha\sqrt{3}}{4} = \frac{\upsilon}{2}$$

και

$$\Lambda_0H < \Lambda_0\Xi < K_0\Xi = \frac{\upsilon}{2}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Έστω G είναι ένα σύνολο μη σταθερών πραγματικών συναρτήσεων μεταβλητής x της μορφής

$$f(x) = \alpha x + b,\ \alpha,\ b \in \mathbb{R},$$

το οποίο έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

i) Αν $f, g \in G$, τότε $gof \in G$ [εδώ $(gof)(x) := g[f(x)]$]

ii) Αν $f \in G$, τότε και η αντίστροφη της $f^{-1} \in G$.

iii) Για κάθε $f \in G$, υπάρχει $x_f \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x_f) = x_f$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(\kappa) = \kappa$, για κάθε $f \in G$.

Λύση

Από την υπόθεση (i) προκύπτει ότι για κάθε ζεύγος συναρτήσεων του G ορίζονται οι συναρτήσεις gof και fog και ανήκουν στο G, ενώ από την υπόθεση (ii), αν $f(x) = \alpha x + b$ ανήκει στο G, προκύπτει ότι $\alpha \neq 0$ και $f^{-1} \in G$ με $f^{-1}(x) = \frac{1}{\alpha}x - \frac{b}{\alpha}$.

Επιπλέον και η ταυτοτική απεικόνιση $i(x) = x$ ανήκει στο G, αφού $i = fof^{-1}$ με $f \in G$.

Από την υπόθεση (iii), αν $f(x) = \alpha x + b$ ανήκει στο G, τότε υπάρχει $x_f \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\alpha x_f + b = x_f$, οπότε θα είναι $x_f = \frac{b}{1-\alpha}$ με $\alpha \neq 1$.

Αν $\alpha = 1$, τότε η ισότητα $x_f + b = x_f$ αληθεύει για κάθε $x_f \in \mathbb{R}$ με την προϋπόθεση ότι $b = 0$, δηλαδή από τις ευθείες $f(x) = x + b$, με κλίση 1, μόνο η ταυτοτική $f(x) = x$ (διχοτόμος γωνίας xOy) ανήκει στο G.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι αν $f, g \in G$, τότε $fog = gof$.

Πράγματι, αν $f(x) = \alpha x + b$ και $g(x) = cx + d$, τότε οι συνθέσεις fog και gof έχουν κλίση ac, είναι $(fog)(x) = (\alpha c)x + \alpha d + b$, $(gof)(x) = (c\alpha)x + cb + \alpha$, ενώ οι συναρτήσεις $(fog)^{-1}$ και $(gof)^{-1}$ έχουν κλίση $\frac{1}{\alpha c}$, οπότε η συνάρτηση $(fog)^{-1} o (gof)$ έχει κλίση 1 και επιπλέον ανήκει στο G.

Επομένως θα είναι: $(fog)^{-1} o (gof) = i$, από την οποία προκύπτει

$$(fog)o\,[(fog)^{-1}o(gof)] = (fog)o\,i$$

$$[(fog)\,o\,(fog)^{-1}]\,o\,(gof) = (fog)o\,i$$

$$i\,o\,(gof) = (fog)\,o\,i$$

$$gof = fog.$$

Σημειώνουμε, ότι χρησιμοποιήσαμε παραπάνω την προσεταιριστική ιδιότητα για τη σύνθεση συναρτήσεων, η οποία, όπως ξέρουμε, ισχύει.

Υποθέτουμε τώρα ότι x_0 είναι το σταθερό σημείο μιας συνάρτησης f του συνόλου G, όπως προκύπτει από την υπόθεση (iii). Τότε, αν $g \in G$, ισχύει

$f\,[g(x_0)] = (fog)(x_0) = (gof)(x_0) = g[f(x_0)] = g(x_0)$, δηλαδή τότε και το $g(x_0)$ είναι σταθερό σημείο της f.

Διακρίνουμε τώρα τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Αν $G = \{i\}$, τότε $f = i$ και το ζητούμενο είναι προφανές.

- Αν $f(x) = \alpha x + b$, $\alpha \neq 1$, τότε αυτή έχει μοναδικό σταθερό σημείο κ με $f(\kappa) = \kappa$ το $\kappa = b / (1 - \alpha)$. Επομένως, αν g είναι μία οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση που ανήκει στο G η f θα έχει, όπως είδαμε παραπάνω, και το $g(\kappa)$ ως σταθερό σημείο, οπότε θα ισχύει $g(\kappa) = \kappa$, για κάθε $g \in G$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ είναι n θετικοί ακέραιοι και έστω q είναι ένας δεδομένος πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $0 < q < 1$. Να βρείτε n αριθμούς $b_1, b_2, \ldots, b_n$ για τους οποίους να ισχύουν:

(i) $\alpha_\kappa < b_\kappa$, **για** $\kappa = 1, 2, \ldots, n$

(ii) $q < \frac{b_{\kappa+1}}{b_\kappa} \leqslant \frac{1}{q}$, **για** $\kappa = 1, 2, \ldots, n - 1$

(iii) $b_1 + b_2 + \ldots + b_n < \frac{1 + q}{1 - q}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$

Λύση

Κατ' αρχήν γράφουμε τη σχέση (ii) στην ισοδύναμη μορφή

(ii)* $$qb_\kappa < b_{\kappa+1} < \frac{1}{q}\, b_\kappa.$$

Είναι πιο εύκολο να λύσουμε το ακόλουθο ελαφρά τροποποιημένο πρόβλημα:

Να θεωρήσουμε $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ να είναι n μη αρνητικοί αριθμοί και να αντικαταστήσουμε το < με το ⩽ στις ανισώσεις (i), (ii)* και (iii).

Όπως θα δούμε, η επίλυση του τροποποιημένου προβλήματος, αποτελεί και λύση του αρχικού προβλήματος. Παρατηρούμε ακόμη ότι αν το διάνυσμα (διατεταγμένη n-άδα) $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ επιλύει το πρόβλημα για δοθέν διάνυσμα $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ και το διάνυσμα $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n)$ επιλύει το πρόβλημα για το δοθέν διάνυσμα $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n)$, τότε εύκολα επαληθεύουμε τα εξής:

- το διάνυσμα $(b_1 + b'_1, b_2 + b'_2, \ldots, b_n + b'_n)$ επιλύει το πρόβλημα για το διάνυσμα $(\alpha_1 + \alpha'_1, \alpha_2 + \alpha'_2, \ldots, \alpha_n + \alpha'_n)$
- το διάνυσμα $(cb_1, cb_2, \ldots, cb_n)$ με $c > 0$, επιλύει το πρόβλημα για το διάνυσμα $(c\alpha_1, c\alpha_2, \ldots, c\alpha_n)$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, αρκεί να επιλύσουμε το πρόβλημα θεωρώντας ως δοθέντα διανύσματα τα

$$u_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ u_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ u_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

αφού το τυχόν διάνυσμα $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ με $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ μη αρνητικά μπορεί να προκύψει ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $u_1, u_2, \ldots, u_n$ με θετικούς συντελεστές.

Για το διάνυσμα u_1 η ανισότητα (i) με $\kappa = 1$ δίνει $b_1 = 1$ ως ελάχιστη δυνατή τιμή του b_1. Όλες οι άλλες ανισότητες $\alpha_\kappa \leqslant b_\kappa$ με $\kappa > 1$ ικανοποιούνται αυτόματα με θετικούς b_κ.

Οι ελάχιστες τιμές για το b_κ που ικανοποιούν τις ανισότητες $qb_\kappa \leqslant b_{\kappa+1}$ είναι:

$$b_1 = 1,\ b_2 = q,\ b_3 = q^2, \ldots, b_n = q^{n-1}.$$

Με την παραπάνω επιλογή για τα b_κ, η ανισότητα (iii) ικανοποιείται, αφού ισχύει

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$$
$$< 1 + q + q^2 + \ldots$$

$$= \frac{1}{1-q} < \frac{1+q}{1-q} = \frac{1+q}{1-q}(1+0+0+...+0).$$

Ομοίως για το $u_i = (0, 0,..., 1, 0,..., 0)$, όπου όλες οι συνιστώσες είναι 0 εκτός της i-συνιστώσας που είναι 1, δηλαδή $\alpha_i = 1$, η ανισότητα (i), για $\kappa = i$, δίνει $b_i = 1$ ως την ελάχιστη δυνατή τιμή το b_i. Οι ελάχιστες τιμές των b_κ που ικανοποιούν τις ανισότητες (ii)* είναι

$b_\kappa = q^{\kappa-i}$, για $i < \kappa$, $b_\kappa = q^{i-\kappa}$, για $\kappa < i$.

Επειδή ισχύει

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n,$$

το διάνυσμα που ικανοποιεί το πρόβλημα θα είναι το

$$\alpha_1(1, q,..., q^{n-1}) + \alpha_2(q, 1, q,..., q^{n-2}) + ... + \alpha_n(q^{n-1}, q^{n-2},..., q, 1),$$

με θετικούς ακέραιους $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

Έτσι έχουμε τη λύση

$$\left\{\begin{array}{c} b_1 = \alpha_1 + q\alpha_2 + q^2\alpha_3 + ... + q^{n-1}\alpha^n \\ b_2 = q\alpha_1 + \alpha_2 + q\alpha_3 + ... + q^{n-2}\alpha^n \\ b_3 = q^2\alpha_1 + q\alpha_2 + \alpha_3 + ... + q^{n-3}\alpha^n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_n = q^{n-1}\alpha_1 + q^{n-2}\alpha_2 + q^{n-3}\alpha_3 + ... + \alpha^n \end{array}\right\}, \quad (1)$$

Θα αποδείξουμε ότι το διάνυσμα $(b_1, b_2,..., b_n)$ που ορίζεται από τις (1) είναι μία λύση του αρχικού προβλήματος.

- Επειδή στο αρχικό πρόβλημα είναι $\alpha_j > 0$ για κάθε $j = 1, 2,..., n$ και $q > 0$, έχουμε:

$$b_\kappa = q^{\kappa-1}\alpha_1 + ... + q\alpha_{\kappa-1} + \alpha_\kappa + q\alpha_{\kappa+1} + ... + q^{n-\kappa}\alpha_n > \alpha_\kappa, \quad (2)$$

για κάθε $\kappa = 1, 2,..., n$.

- Με πολλαπλασιασμό και των δύο μελών της (2) επί q λαμβάνουμε:

$$qb_\kappa = q^\kappa\alpha_1 + ... + q^2\alpha_{\kappa-1} + q\alpha_\kappa + q^2\alpha_{\kappa+1} + ... + q^{n-\kappa+1}\alpha_n$$

Επιπλέον, από το σύστημα (1) έχουμε

$$b_{\kappa+1} = q^\kappa\alpha_1 + q^{\kappa-1}\alpha_2 + ... + q\alpha_\kappa + \alpha_{\kappa+1} + ... + q^{n-\kappa-1}\alpha_n.$$

Επειδή οι κ-πρώτοι όροι των $b_{\kappa+1}$ και qb_κ είναι ίσοι και επιπλέον ισχύει $0 < q < 1$, θα έχουμε:

$$b_{\kappa+1} > qb_\kappa \Leftrightarrow \frac{b_{\kappa+1}}{b_\kappa} > q.$$

Με πολλαπλασιασμό της (2) επί $\frac{1}{q}$ λαμβάνουμε

$$\frac{1}{q}b_\kappa = q^{\kappa-2}\alpha_1 + ... + \alpha_{\kappa-1} + \frac{1}{q}\alpha_\kappa + \alpha_{\kappa+1} + ... + q^{n-\kappa-1}\alpha_n .$$

Επειδή οι τελευταίοι n – κ όροι .των $b_{\kappa+1}$ και $\frac{1}{q}b_\kappa$ είναι ίσοι και $0 < q < 1$ θα έχουμε:

$$\frac{1}{q}b_\kappa > b_{\kappa+1} \Leftrightarrow \frac{b_{\kappa+1}}{b_\kappa} < \frac{1}{q}.$$

Επομένως, αποδείξαμε ότι ισχύουν οι ανισότητες

$$q < \frac{b_{\kappa+1}}{b_\kappa} < \frac{1}{q}, \text{ για } \kappa = 0, 1, ..., n - 1.$$

- Με πρόσθεση κατά μέλη των n εξισώσεων του συστήματος (1) λαμβάνουμε:

$$b_1 + b_2 + ... + b_n = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + ... + c_n\alpha_n ,$$

όπου c_j είναι το άθροισμα των συντελεστών του α_j στις εξισώσεις του συστήματος (1).

Επειδή, όπως είναι φανερό, ισχύει ότι

$$c_j < c := 1 + 2q + 2q^2 + ... + 2q^{n-1},$$

για κάθε j = 1, 2,..., n, θα έχουμε:

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + ... + c_n\alpha_n < c\alpha_1 + c\alpha_2 + ... + c\alpha_n = c(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n).$$

Επιπλέον

$$c = 1 + 2q(1 + q + q^2 + ... + q^{n-2} < 1 + 2q(1 + q + q^2 + ... + q^{n-2} + ...) =$$

$$= 1 + 2q\frac{1}{1-q} = \frac{1+q}{1-q}.$$

Επομένως, έχουμε

$$b_1 + b_2 + ... + b_n < \frac{1+q}{1-q}(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n).$$



$16^{η}$ Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1974

Τόπος Διοργάνωσης:	Ανατ. Γερμανία (Βερολίνο)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	W. Engel (Παν/μιο Ροστόκ)
Συμμετοχή:	18 χώρες με 8 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες συμμετοχές:	Η.Π.Α., Βιετνάμ
Μέγιστη Βαθμολογία:	40 βαθμοί ανά μαθητή
Τελική Βαθμολογία:	Σοβ. Ένωση (256), Η.Π.Α. (243), Ουγγαρία (237), Αν. Γερμανία (236), Γιουγκοσλαβία (216), Αυστρία (212), Ρουμανία (222), Γαλλία (194).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Τρεις παίκτες Α, Β και Γ παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι: Σε καθεμία από τρεις κάρτες είναι γραμμένος ένας ακέραιος. Αυτοί οι τρεις ακέραιοι, έστω p, q, r, ικανοποιούν τις ανισώσεις $0 < p < q < r$. Οι τρεις κάρτες ανακατεύονται και μοιράζονται από μία κάρτα σε κάθε παίκτη. Στη συνέχεια κάθε παίκτης παίρνει μάρκες ίσες σε αριθμό με αυτόν που είναι γραμμένος στην κάρτα του. Τότε οι κάρτες ανακατεύονται ξανά, ενώ οι μάρκες παραμένουν στους παίκτες. Η παραπάνω διαδικασία γίνεται τουλάχιστον δύο γύρους. Μετά τον τελευταίο γύρο, ο Α έχει 20 μάρκες συνολικά, ο Β έχει 10 και ο Γ έχει 9 μάρκες συνολικά. Κατά τον τελευταίο γύρο ο Β πήρε r μάρκες. Να βρείτε ποιος παίκτης πήρε q μάρκες στον πρώτο γύρο.

Λύση

Αν έγιναν συνολικά Κ γύροι, $K \geq 2$, τότε

$$K(p+q+r)=39.$$

Επειδή $0 < p < q < r$, συμπεραίνουμε ότι $p+q+r \geq 6$ και αφού ο 39 έχει μοναδικούς πρώτους διαιρέτες τους 3 και 13, θα είναι

$$K = 3 \text{ και } p+q+r = 13.$$

Σημειώνουμε με a_i, b_i, c_i τις μάρκες που πήραν οι παίκτες A, B, Γ αντιστοίχως, κατά τον i γύρο και γράφουμε τον επόμενο πίνακα:

Γύρος	A	B	C	Σύνολο
1	a_1	b_1	c_1	13
2	a_2	b_2	c_2	13
3	a_3	r	c_3	13
Σύνολο	20	10	9	39

Επειδή είναι $a_3 \neq r$, θα είναι $a_1 + a_2 + a_3 \leq 2r + q$, οπότε

$$2r + q \geq 20$$

$$2r + (13 - p - r) \geq 20$$

$$r - p \geq 7$$

$$r \geq p + 7 \geq 8, \text{ αφού } p \geq 1.$$

Επίσης έχουμε $b_1 + b_2 + r \geq 2p + r$, δηλαδή

$$2p + r \leq 10 \qquad (1)$$

$$r \leq 10 - 2p \leq 8, \text{ αφού } p \geq 1.$$

Από τις ανισώσεις $r \geq 8$ και $r \leq 8$ προκύπτει $r = 8$, οπότε από την (1) θα είναι $p \leq 1$, δηλαδή $p = 1$ και $q = 13 - p - r = 4$.

Επομένως είναι $2r + q = 20$ και $2p + r = 10$, οπότε έχουμε τον πίνακα

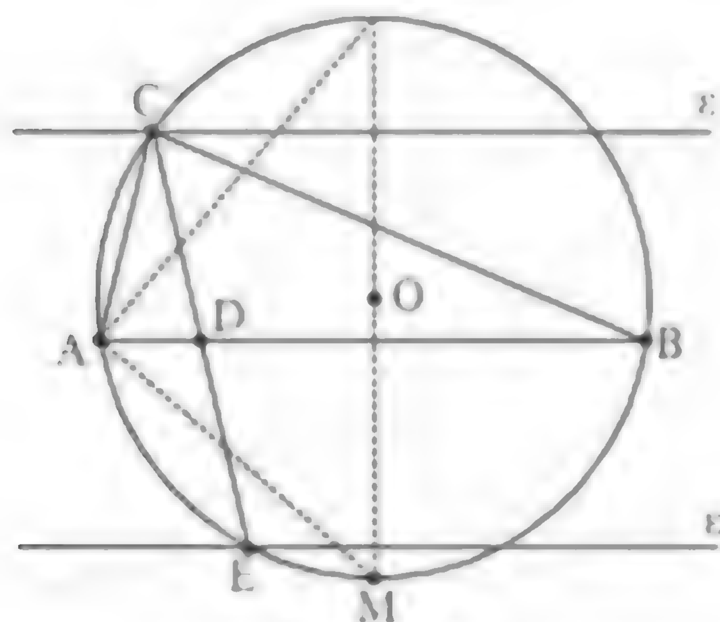
Γύρος	A	B	C
1	8	1	4
2	8	1	4
3	4	8	1

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο τρίγωνο ABC, να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο στην πλευρά AB τέτοιο ώστε το τμήμα CD είναι ο γεωμετρικός μέσος των τμημάτων AD και DB, αν, και μόνο αν,

$$\text{ημ}A\,\text{ημ}B \le \text{ημ}^2\frac{C}{2}.$$

Λύση



Σχήμα 70

Φέρουμε από το C ευθεία $\varepsilon \parallel AB$ και ευθεία $\varepsilon' \parallel AB \parallel \varepsilon$ έτσι ώστε η ευθεία AB να είναι μεσοπαράλληλη των ε και ε΄. Γράφουμε και το περιγεγραμμένο κύκλο (O,R) του τριγώνου ABC. Θα αποδείξουμε ότι το ζητούμενο σημείο D υπάρχει, αν, και μόνο αν, η ευθεία ε΄ έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τον κύκλο (O,R).

Πράγματι αν E είναι ένα κοινό σημείο της ε΄ με τον κύκλο (O,R), τότε η χορδή CE τέμνει τη χορδή AB σε ένα σημείο, έστω D, και ισχύει ότι $CD \cdot DE = AD \cdot DB$. Επειδή τα C, E ανήκουν στις ε, ε΄ αντιστοίχως, ενώ το D ανήκει στη μεσοπαράλληλη AB των ε και ε΄, θα είναι $CD = DE$, οπότε προκύπτει και ότι

$$CD^2 = AD \cdot DB.$$

Αντίστροφα, αν η ε΄ δεν έχει κοινό σημείο με τον κύκλο (O,R), τότε δεν μπορεί να ορισθεί το σημείο E που δίνει την ισότητα $CD^2 = CD \cdot DE$.

Η ε΄ έχει κοινό σημείο με τον κύκλο (O,R), αν, και μόνο αν, η απόσταση του C από το AB είναι μικρότερη ή ίση της απόστασης του μέσου M του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ (αυτού που δεν περιέχει το C) από το AB, ή ισοδύναμα

$$(\overset{\Delta}{ABC}) \le (\overset{\Delta}{ABM})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \eta\mu C \le \frac{1}{2} AM \cdot BM \cdot \eta\mu(\pi - C)$$

$$\Leftrightarrow AC \cdot BC \le AM^2 \qquad (1)$$

αφού $AM = BM$ και $\eta\mu C = \eta\mu(\pi - C)$.

Επειδή επιπλέον είναι

$$AM = 2R\eta\mu\frac{C}{2}, \ BC = 2R\eta\mu A, \ AC = 2R\eta\mu B,$$

από την (1) προκύπτει τελικά ότι

$$\eta\mu A \cdot \eta\mu B \le \eta\mu^2 \frac{C}{2}.$$

Είναι φανερό ότι η ισότητα ισχύει όταν η ευθεία ε΄ εφάπτεται του κύκλου (O,R).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$ δεν διαιρείται με το 5, για κάθε ακέραιο $n \ge 0$.

Λύση

Οι συνδυασμοί $\binom{2n+1}{2k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, απαντούν σε ορισμένους όρους του διωνυμικού αναπτύγματος $(a+b)^{2n+1}$. Για $a = 2^{3/2}$, $b = 1$, οι όροι αυτοί είναι

$$\binom{2n+1}{2k+1} 2^{3(2k+1)/2} = \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k} \cdot 2^{3/2}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Οι υπόλοιποι όροι του αναπτύγματος $(a+b)^{2n+1}$ είναι της μορφής

$$\binom{2n+1}{2k} 2^{3k}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Επομένως θα έχουμε

$$\left(2^{3/2}+1\right)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}2^{3k} + 2^{3/2}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}2^{3k}$$
$$= A + 2^{3/2}B, \qquad (1)$$

όπου οι αριθμοί

$$A := \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}2^{3k}, \quad B := \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}2^{3k}$$

είναι ακέραιοι για κάθε ακέραιο $n \geq 0$.

Θα δείξουμε ότι ο B δεν διαιρείται με το 5.

Ομοίως, έχουμε

$$\left(2^{3/2}-1\right)^{2n+1} = -A + 2^{3/2}B \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) με πολλαπλασιασμό κατά μέλη προκύπτει ότι

$$\left[\left(2^{3/2}\right)^2 - 1\right]^{2n+1} = \left(2^{3/2}B\right)^2 - A^2$$
$$\Leftrightarrow 7^{2n+1} = 8B^2 - A^2 \qquad (3)$$

Επειδή $7^{2n+1} = \left(7^2\right)^n \cdot 7 = (50-1)^n \cdot (5+2)$, έπεται ότι $7^{2n+1} \equiv 2(-1)^n \pmod 5$, οπότε θα είναι και

$$8B^2 - A^2 \equiv 2(-1)^n \pmod 5 \qquad (4)$$

Αν υποθέσουμε ότι το B διαιρείται με το 5, τότε από την (4) θα προκύψει ότι

$$A^2 \equiv \pm 2 \pmod 5, \qquad (5)$$

που είναι αδύνατη, γιατί

$$0^2 \equiv 0,\ 1^2 \equiv 1,\ 2^2 \equiv -1,\ 3^2 \equiv -1,\ 4^2 \equiv 1 \ (\text{modulo } 5)$$

και για κάθε ακέραιο $A = 5k + u, k \in \mathbb{Z},\ u = 0,1,2,3,4$, ισχύει

$$A^2 = (5k+u)^2 \equiv u^2 \pmod 5,\ u = 0,1,2,3,4.$$

Επομένως ο B δεν διαιρείται με το 5.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Χωρίζουμε έναν 8×8 πίνακα σκακιού σε p μη αλληλοκαλυπτόμενα ορθογώνια έτσι ώστε

(i) Κάθε ορθογώνιο έχει τον ίδιο αριθμό άσπρων και μαύρων τετραγώνων.

(ii) Αν a_i είναι ο αριθμός των άσπρων τετραγώνων του i-ορθογωνίου, τότε $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$.

Βρείτε τη μέγιστη τιμή του p, για την οποία ο χωρισμός είναι δυνατός. Για αυτήν την τιμή του p, να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές ακολουθίες $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

Λύση

Επειδή ο σκακιστικός πίνακας έχει 32 άσπρα και 32 μαύρα τετράγωνα, θα έχουμε

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_p = 32.$$

Επιπλέον, πρέπει να ισχύουν $a_i \geq i$, $i = 1, 2, \ldots, p$, οπότε πρέπει

$$32 \geq 1 + 2 + \cdots + p = \frac{p(p+1)}{2} \Leftrightarrow p(p+1) \leq 64 \Leftrightarrow p \leq 7$$

Επομένως στο ζητούμενο διαχωρισμό του ορθογωνίου μπορεί να υπάρχουν το πολύ 7 ορθογώνια.

Στη συνέχεια αναζητούμε όλες τις δυνατές επτάδες θετικών ακεραίων $a_1, a_2, \ldots, a_7$ με άθροισμα 32, και τέτοιες ώστε $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7$, οι οποίες είναι

(a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11

(b) 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10

(c) 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9

(d) 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9

(e) 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8

Η περίπτωση (a) είναι αδύνατη, γιατί δεν υπάρχει ορθογώνιο με $2 \times 11 = 22$ τετράγωνα στον 8×8 πίνακα.

Οι περιπτώσεις (b) – (e) είναι δυνατές και εφαρμόσιμες, όπως φαίνεται από τους παρακάτω πίνακες:

(b) (c)

(d) (e)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης

$$S=\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d},$$

όπου a, b, c, d είναι τυχαίοι θετικοί αριθμοί.

Λύση

Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι ισχύει

$$S>\frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{a+b+c+d}+\frac{c}{a+b+c+d}+\frac{d}{a+b+c+d}=1.$$

Αν υποθέσουμε ότι είναι $\max\{a,b,c,d\}=d$, τότε

$$S<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}+\frac{d}{a+c+d}=1+\frac{d}{a+c+d}<1+1=2.$$

Επομένως, είναι $1<S<2$.

Θα δείξουμε ότι το S παίρνει κάθε τιμή στο διάστημα $(1,2)$.

Παρατηρούμε ότι η παράσταση S μεταβάλλεται συνεχώς ως προς τις θετικές μεταβλητές της a, b, c και d. Επομένως αν δείξουμε ότι οι τιμές της μπορούν να είναι πολύ κοντά στο 1 και το 2, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι παίρνει όλες τις τιμές του διαστήματος $(1,2)$.

Αν θέσουμε $a=1$, $b=x$, $c=1-x$, $d=x(1-x)$, με $0<x<1$, τότε

$$S=f(x)=\frac{1+x}{1+2x+x^2}+\frac{x}{2}+\frac{1-x}{1+x-x^2}+\frac{x-x^2}{2-x^2}, \qquad x\in(0,1)$$

Η συνάρτηση f(x) είναι συνεχής στο (0, 1) και ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=2, \ \lim_{x\to 1^-} f(x)=1,$$

οπότε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f(x) είναι το (1, 2).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Έστω P ένα μη σταθερό πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές. Αν $n(P)$ είναι ο αριθμός των διακεκριμένων ακεραίων k που είναι τέτοιοι ώστε $\left[P(k)\right]^2=1$, να αποδείξετε ότι

$$n(P)-\text{βαθμ.}(P)\le 2, \qquad (1)$$

όπου βαθμ.(P) είναι ο βαθμός του πολυωνύμου P.

Λύση

Αν υποθέσουμε ότι είναι $\text{βαθμ.}(P)=\ell$, η (1) γίνεται

$$n(P)\le 2+\ell,$$

δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι το πολυώνυμο $\left[P(x)\right]^2-1$ έχει το πολύ $2+\ell$ διακεκριμένες ακέραιες ρίζες.

Θεωρούμε την εξίσωση $[P(x)]^2-1=0$ που είναι ισοδύναμη προς την εξίσωση

$$[P(x)-1]\cdot[P(x)+1]=0, \tag{2}$$

ή αν θέσουμε $Q(x)=P(x)-1$,

$$Q(x)\cdot[Q(x)+2]=0, \tag{3}$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι οι εξισώσεις

$$Q(x)=0\ ,\ Q(x)+2=0$$

έχουν συνολικά το πολύ $2+\ell$ διακεκριμένες ακέραιες λύσεις. Για την απόδειξη αυτού θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο:

Λήμμα: Έστω μ είναι μία ακέραια ρίζα του πολυωνύμου $R(x)$ με ακέραιους συντελεστές. Τότε οι μόνες πιθανές ακέραιες ρίζες των πολυωνύμων $R(x)\pm\lambda$, όπου λ πρώτος, είναι οι $\mu-\lambda, \mu-1, \mu+1$ και $\mu+\lambda$.

Απόδειξη: Επειδή το μ είναι ρίζα της εξίσωσης $R(x)=0$, θα έχουμε $R(x)=(x-\mu)\Pi(x)$, όπου $\Pi(x)$ είναι πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές. Επομένως θα είναι

$$R(x)\pm\lambda=(x-\mu)\Pi(x)\pm\lambda,$$

οπότε αν το x_0 είναι ακέραια ρίζα του $R(x)\pm\lambda$, τότε

$$(x_0-\mu)\Pi(x_0)=\mp\lambda.$$

Άρα ο αριθμός $x_0-\mu$ διαιρεί το λ και επειδή οι μοναδικοί διαιρέτες του λ είναι οι αριθμοί ±1 και $\pm\lambda$, θα έχουμε

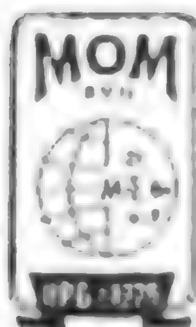
$$x_0-\mu=\pm1 \text{ ή } x_0-\mu=\pm\lambda$$

ή ισοδύναμα

$$x_0=\mu+1 \text{ ή } x_0=\mu-1 \text{ ή } x_0=\mu+\lambda \text{ ή } x_0=\mu-\lambda.$$

Εφαρμόζουμε το παραπάνω λήμμα στην άσκησή μας για $\lambda=2$, με την υπόθεση ότι η εξίσωση (3) έχει μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα. Υποθέτουμε

ότι ο αριθμός μ είναι η **μικρότερη** ακέραια ρίζα της εξίσωσης (3) και πιο συγκεκριμένα της εξίσωσης $Q(x)=0$. Τότε, σύμφωνα με το λήμμα οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης $Q(x)+2=0$ είναι οι $\mu+1$ και $\mu+2$, και αφού το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει το πολύ ℓ ακέραιες ρίζες η εξίσωση $Q(x)\left[Q(x)+2\right]=0$ θα έχει το πολύ $2+\ell$ ακέραιες ρίζες.



$17^η$ Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1975

Τόπος Διοργάνωσης: Βουλγαρία (Σόφια)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών: J. Prodanov (Παν/μιο Σόφιας)
Συμμετοχή: 17 χώρες με 8 το πολύ μαθητές η καθεμία.
Νέες συμμετοχές: Ελλάδα
Μέγιστη Βαθμολογία: 40 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες: Ουγγαρία (258), Αν. Γερμανία (249), Η.Π.Α. (247), Σοβ. Ένωση (246), Ηνωμένο Βασίλειο (239), Αυστρία (192), Βουλγαρία (186), Ρουμανία (180).

Η Ελληνική ομάδα συμμετείχε για πρώτη φορά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω x_i, y_i, $i=1,2,\ldots,n$ είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \text{ και } y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n.$$

Να αποδείξετε ότι, αν $z_1, z_2, \ldots, z_n$ είναι οποιαδήποτε μετάθεση των $y_1, y_2, \ldots, y_n$, τότε

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2.$$

Λύση

Επειδή είναι

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}x_i y_i + \sum_{i=1}^{n}y_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} z_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 ,$$

αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_i z_i . \qquad (1)$$

Στην περίπτωση που ισχύει $z_i = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε η (1) αληθεύει ως ισότητα.

Στην περίπτωση που δεν ισχύει η ισότητα $z_i = y_i$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, θα υπάρχουν 2 τουλάχιστον δείκτες k, $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$ με $k < \ell$ και

$$x_k \geq x_\ell , \ z_k < z_\ell . \qquad (2)$$

Σε κάθε τέτοια περίπτωση ύπαρξης τέτοιων δεικτών, στο δεύτερο μέλος της (1) εναλλάσσουμε τους αριθμούς z_k και z_ℓ, οπότε το άθροισμα $x_k z_k + x_\ell z_\ell$ αντικαθίσταται από το άθροισμα $x_k z_\ell + x_\ell z_k \geq x_k z_k + x_\ell z_\ell$, αφού

$$x_k z_k + x_\ell z_\ell - (x_k z_\ell + x_\ell z_k) = (x_k - x_\ell)(z_k - z_\ell) \leq 0 .$$

Μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό τέτοιων εναλλαγών το δεύτερο μέλος της (2) θα έχει γίνει $\sum_{i=1}^{n} x_i z_i'$, όπου $z_1' \geq z_2' \geq \cdots \geq z_n'$. Τότε όμως θα ισχύει $z_i' = y_i$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, οπότε

$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i z_i' = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Έστω $a_1, a_2, a_3, \ldots$ είναι μία αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων. Να αποδείξετε ότι για κάθε $p \geq 1$ υπάρχουν άπειροι όροι a_m οι οποίοι μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$a_m = x a_p + y a_q ,$$

με x, y θετικούς ακέραιους και $q > p$.

Λύση

Για $0 < r < a_p$, γράφουμε με B_r την υπακολουθία της ακολουθίας $a_1, a_2, a_3, \ldots$ που αποτελείται από όλα τα στοιχεία της που είναι ισοϋπόλοιπα με το r modulo a_p. Επειδή τα υπόλοιπα της διαίρεσης με a_p είναι πεπερασμένου πλήθους, τα $0, 1, 2, \ldots, a_p - 1$ και η ακολουθία $a_1, a_2, a_3, \ldots$ έχει άπειρους όρους, έπεται ότι υπάρχει μία τουλάχιστον τιμή του r για την οποία η υπακολουθία B_r έχει άπειρους όρους.

Θεωρούμε ότι το r είναι μία τέτοια τιμή και υποθέτουμε ότι ο a_q είναι το ελάχιστο στοιχείο της B_r που είναι μεγαλύτερο του a_p. Τότε κάθε a_m στο B_r με $m > q$ θα έχουμε

$$a_m - a_q \equiv 0 \left(\bmod a_p\right) \text{ ή } a_m - a_q = x a_p,$$

όπου x είναι ακέραιος. Επομένως έχουμε

$$a_m = x a_p + a_q,$$

που αποτελεί λύση του προβλήματος με $x = \dfrac{a_m - a_q}{a_p}$, $y = 1$.

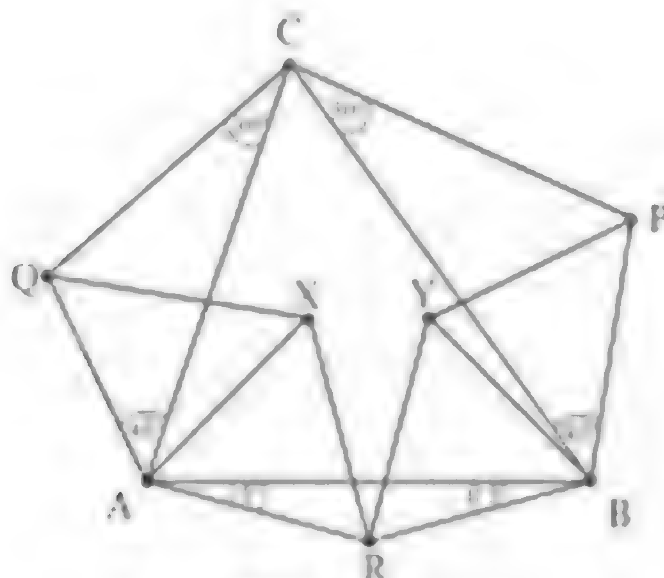
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Στις πλευρές ενός τριγώνου ABC κατασκευάζουμε τρίγωνα ABR, BCP, CAQ προς το εξωτερικό του τριγώνου έτσι ώστε

$$\mathbf{C\hat{B}P = C\hat{A}Q = 45^\circ,\ B\hat{C}P = A\hat{C}Q = 30^\circ,\ A\hat{B}R = B\hat{A}R = 15^\circ.}$$

Να αποδείξετε ότι $\mathbf{Q\hat{R}P = 90^\circ}$ και $\mathbf{QR = RP}$.

Λύση



Σχήμα 71

Σύμφωνα με τις υποθέσεις θα είναι $\hat{AQC} = \hat{BPC} = 105^\circ$ και $\hat{ARB} = 150^\circ$. Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα RX τέτοιο ώστε: $RX \perp RA$. Έτσι το τρίγωνο ARX είναι ισοσκελές και έχει $\hat{ARX} = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$. Επομένως το τρίγωνο ARX είναι ισόπλευρο.

Επιπλέον έχουμε

$$\hat{BAQ} = \hat{A} + 45^\circ, \ \hat{BAX} = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ,$$

οπότε

$$\hat{XAQ} = \hat{BAQ} - \hat{BAX} = \hat{A}.$$

Στο τρίγωνο ACQ από το νόμο των ημιτόνων έχουμε

$$\frac{AQ}{AC} = \frac{\eta\mu 30^\circ}{\eta\mu 105^\circ} = \frac{\eta\mu 30^\circ}{\eta\mu 75^\circ} = \frac{2\eta\mu 15^\circ \sigma\upsilon\nu 15^\circ}{\sigma\upsilon\nu 15^\circ} = 2\eta\mu 15^\circ,$$

ενώ στο τρίγωνο ABR έχουμε

$$\frac{AR}{AB} = \frac{\eta\mu 15^\circ}{\eta\mu 150^\circ} = \frac{\eta\mu 15^\circ}{\eta\mu 30^\circ} = 2\eta\mu 15^\circ,$$

αφού $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Επομένως έχουμε

$$\frac{AR}{AB} = \frac{AX}{AB} = \frac{AQ}{AC}$$

και αφού είναι $\hat{CAQ} = \hat{BAX} = 45^\circ$, τα τρίγωνα AXQ και ABC είναι όμοια, οπότε

$$\hat{AQX} = \hat{C} \text{ και } \hat{AXQ} = \hat{B}.$$

Επιπλέον έχουμε

$$\hat{RBP} = 15^\circ + \hat{B} + 45^\circ = 60^\circ + \hat{B}$$

$$\hat{RXQ} = 60^\circ + \hat{B},$$

οπότε $\hat{RBP} = \hat{RXQ}$.

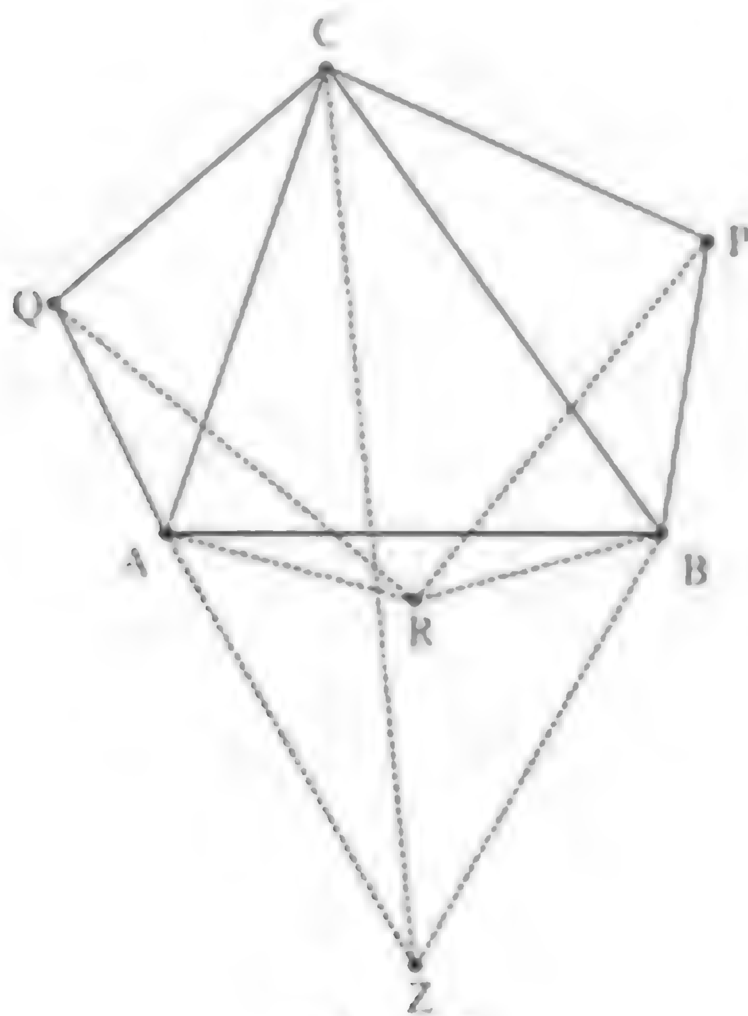
Όπως παραπάνω, φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $RY = RB$ και $RY \perp RA$, οπότε ομοίως προκύπτει ότι το τρίγωνο YBP είναι όμοιο προς

το τρίγωνο ABC.

Επομένως από τις παραπάνω ομοιότητες τριγώνων προκύπτουν και τα τρίγωνα AXQ, YRB όμοια. Επειδή οι ομόλογες πλευρές AX και YB των παραπάνω τριγώνων είναι ίσες και τα τρίγωνα AXQ και YRB θα είναι ίσα. Επιπλέον τα ισόπλευρα τρίγωνα ARX και YRB είναι ίσα, οπότε και τα τετράπλευρα ARXQ, YRBP θα είναι ίσα. Αυτό έχει ως συνέπεια και την ισότητα των αντίστοιχων διαγώνιών τους, δηλαδή $RQ = RP$.

Επιπλέον έχουμε $XR \perp RB$, οπότε με περιστροφή του τετραπλεύρου RAXQ γύρω από το R κατά 90° ακολουθώντας την αρνητική φορά, αυτό θα συμπέσει με το τετράπλευρο RYPB. Επομένως και η γωνία QRP θα είναι 90°.

2ος τρόπος



Σχήμα 72

Στην πλευρά AB του τριγώνου ABC κατασκευάζουμε προς το εξωτερικό του ισόπλευρο τρίγωνο ABZ και φέρουμε τις CZ και RZ. Τότε είναι $Z\hat{A}R = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$, οπότε $Q\hat{A}R = C\hat{A}Z$.

Επιπλέον, όπως δείξαμε στον πρώτο τρόπο λύσης, είναι $\frac{AQ}{AR} = \frac{AC}{AB}$ και αφού $AB = AZ$, έπεται ότι $\overset{\Delta}{AQR} \approx \overset{\Delta}{ACZ}$.

Ομοίως έχουμε και ότι $\overset{\Delta}{BPR} \approx \overset{\Delta}{BCZ}$.

Επιπλέον, από τα όμοια τρίγωνα CAQ και CBP έχουμε

$$\frac{AC}{AQ} = \frac{BC}{BP} = \lambda,$$

δηλαδή ο λόγος της ομοιότητας είναι ο ίδιος για τα δύο ζεύγη ομοίων τριγώνων AQR, ACZ και BPR, BCZ.

Στη συνέχεια περιστρέφουμε το τρίγωνο AQR κατά 45° με αρνητική φορά (όπως η κίνηση των δεικτών του ωρολογίου) γύρω από το A, με ταυτόχρονη ομοιοθεσία με λόγο λ. Θεωρούμε επίσης στροφή 45° γύρω από το B με θετική φορά για το τρίγωνο BPR και ταυτόχρονη ομοιοθεσία με λόγο λ. Οι μετασχηματισμοί αυτοί μεταφέρουν την QR πάνω στην CZ και την PR πάνω στην CZ. Επομένως θα είναι $QR = PR$, ενώ η γωνία τους θα είναι $45° + 45° = 90°$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Όταν ο αριθμός 4444^{4444} γράφεται στο δεκαδικό σύστημα, το άθροισμα των ψηφίων του είναι Α. Έστω Β το άθροισμα των ψηφίων του Α. Να βρεθεί το άθροισμα των ψηφίων του Β (οι αριθμοί Α, Β θεωρούνται ως προς το δεκαδικό σύστημα).

Λύση

Για τη λύση μας χρειάζεται η επόμενη βοηθητική πρόταση.

Λήμμα: Κάθε ακέραιος n γραφόμενος στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, είναι ισοϋπόλοιπος προς το άθροισμα των ψηφίων του modulo 9.

Απόδειξη

Έστω ότι είναι $n = d_1 + 10d_2 + 10^2 d_3 + \cdots + 10^k d_{k+1}$ ή

$$\begin{aligned} n &= d_1 + d_2 + 9d_2 + d_3 + 99d_3 + \cdots + d_{k+1} + \left(10^k - 1\right)d_{k+1} \\ &\equiv (d_1 + d_2 + \cdots + d_{k+1}) \pmod 9, \end{aligned}$$

αφού ο 9 είναι διαιρέτης κάθε αριθμού της μορφής $10^k - 1$.

Έστω τώρα $X = 4444^{4444}$. Σύμφωνα με το λήμμα έχουμε ότι

$4444 \equiv 16 \pmod 9$, οπότε θα είναι και

$$4444 \equiv 7 \pmod 9) \text{ και } 4444^3 \equiv 7^3 \equiv 1 \pmod 9.$$

Επειδή $4444 = 3 \cdot 1481 + 1$ έχουμε

$$X = 4444^{4444} = 4444^{3 \cdot 1481} \cdot 4444 \equiv 1 \cdot 7 \equiv 7 \pmod 9.$$

Επομένως σύμφωνα με το λήμμα θα είναι

$$X \equiv A \equiv B \equiv (\text{άθροισμα ψηφίων B}) \equiv 7 \pmod 9.$$

Θεωρώντας λογαρίθμους με βάση το 10, έχουμε

$$\log X = 4444 \log 4444 < 4444 \log 10^4 = 4444 \cdot 4 = 17776.$$

Είναι φανερό ότι, αν ο κοινός (δεκαδικός) λογάριθμος ενός αριθμού είναι μικρότερος του m, τότε ο αριθμός έχει το πολύ m ψηφία. Επομένως ο X έχει το πολύ 17776 ψηφία, οπότε το άθροισμά τους είναι το πολύ $9 \cdot 17776 = 159984$.

Επομένως είναι $A \leq 159984$.

Ανάμεσα σε όλους τους φυσικούς αριθμούς που είναι μικρότεροι ή ίσοι του 159984 αυτός που έχει μέγιστο άθροισμα ψηφίων είναι ο 99999. Έτσι ομοίως προκύπτει ότι είναι $B \leq 45$.

Ανάμεσα στους φυσικούς αριθμούς που είναι μικρότεροι ή ίσοι του 45, ο 39 έχει το μέγιστο άθροισμα ψηφίων, δηλαδή 12. Ο μοναδικός φυσικός αριθμός που είναι μικρότερος ή ίσος του 12 και είναι ισοϋπόλοιπος του 7 modulo 9 είναι ο 7. Άρα το άθροισμα των ψηφίων του B είναι 7.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Να προσδιορίσετε, με απόδειξη, αν είναι δυνατόν ή όχι να βρούμε 1975 σημεία πάνω σε έναν κύκλο με μοναδιαία ακτίνα, έτσι ώστε η απόσταση οποιωνδήποτε δύο από αυτά να είναι ρητός αριθμός.

Λύση

Θα δείξουμε ότι υπάρχει άπειρο πλήθος σημείων πάνω στον μοναδιαίο κύκλο που είναι τέτοια ώστε η απόσταση μεταξύ οποιωνδήποτε δύο από αυτά να είναι ρητός αριθμός. Θα κατασκευάσουμε αυτά τα σημεία ως κορυφές ορθογωνίων τριγώνων ABC με κοινή υποτείνουσα τη διάμετρο AB του μοναδιαίου κύκλου.

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές a, b, c ρητούς αριθμούς

και $a^2 + b^2 = c^2$.

Αν πολλαπλασιάσουμε τα μήκη a, b, c των πλευρών επί το κοινό παρονομαστή τους, έστω d, τότε οι προκύπτοντες ακέραιοι da, db, dc ικανοποιούν το Πυθαγόρειο θεώρημα, αφού $(da)^2 + (db)^2 = (dc)^2$.

Σημειώνουμε ότι μία τριάδα (α, β, γ) θετικών ακεραίων α, β, γ τέτοια ώστε $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ ονομάζεται **Πυθαγόρεια τριάδα**.

Είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε άπειρο αριθμό τέτοιων τριάδων, αν πάρουμε τυχαίους φυσικούς αριθμούς m, n και θέσουμε

$$\alpha = 2mn, \ \beta = m^2 - n^2$$

τότε

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \left(m^2 + n^2\right)^2 \text{ ή } \gamma = m^2 + n^2 .$$

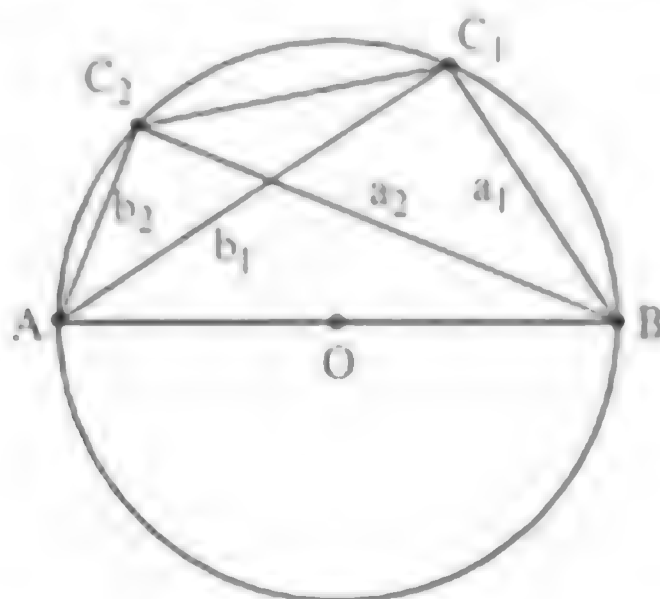
Στο πρόβλημά μας, η υποτείνουσα γ των τριγώνων θα είναι η διάμετρος του μοναδιαίου κύκλου, οπότε θα είναι $\gamma = 2$.

Κανονικοποιούμε την παραπάνω τριάδα (α, β, γ) πολλαπλασιάζοντας κάθε μέλος της επί $\dfrac{2}{m^2 + n^2}$, οπότε λαμβάνουμε μία Πυθαγόρεια τριάδα (a, b, c) με

$$a = \frac{4mn}{m^2 + n^2}, \ b = \frac{2\left(m^2 - n^2\right)}{m^2 + n^2}, \ c = 2, \qquad (2)$$

που είναι ρητοί αριθμοί.

Κάθε διαφορετικό ζεύγος πρώτων μεταξύ τους φυσικών αριθμών m, n παράγει μία διαφορετική τριάδα $(a, b, 2)$. Επειδή οι τέσσερις γνωστές πράξεις μεταξύ ρητών δίνουν ως αποτέλεσμα ρητό αριθμό, είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε άπειρο πλήθος Πυθαγορείων τριάδων της μορφής (1), τα στοιχεία των οποίων θα είναι μήκη πλευρών ορθογωνίων με κοινή υποτείνουσα μήκους 2 και κορυφές πάνω στο μοναδιαίο κύκλο.



Σχήμα 73

Το τετράπλευρο ABC_1C_2 είναι εγγράψιμο, οπότε από το Θεώρημα του Πτολεμαίου, θα ισχύει:

$$2C_1C_2 + b_2a_1 = a_2b_1 \text{ ή } C_1C_2 = \frac{1}{2}(a_2b_1 - a_1b_2),$$

οπότε η απόσταση C_1C_2 είναι ρητός αριθμός, αφού και οι αριθμοί a_1, a_2, b_1, b_2 είναι ρητοί αριθμοί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα P, δύο μεταβλητών, με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) το P είναι ομογενές βαθμού n, δηλαδή για τον θετικό ακέραιο n και για κάθε $t, x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$P(tx, ty) = t^n P(x, y),$$

(ii) για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$P(b+c, a) + P(c+a, b) + P(a+b, c) = 0,$$

(iii) $P(1,0) = 1$.

Λύση

Αν θεωρήσουμε $a = b = c$, τότε από (ii) προκύπτει ότι

$$3P(2a, a) = 0, \text{ για κάθε } a \in \mathbb{R},$$

δηλαδή το πολυώνυμο $P(x,y)$ μηδενίζεται για εκείνα τα ζεύγη (x,y) που ικανοποιούν την ισότητα $x-2y=0$. Θεωρώντας το x ως μεταβλητή και το y ως παράμετρο, θα έχουμε

$$P(x,y)=(x-2y)Q(x,y), \tag{1}$$

όπου το $Q(x,y)$ είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού $n-1$.

Επιπλέον θα είναι

$$Q(1,0)=P(1,0)=1.$$

Η συνθήκη (ii) με $b=c$ δίνει

$$P(2b,a)+2P(a+b,b)=0,$$

η οποία μέσω της (1) γίνεται

$$(2b-2a)Q(2b,a)+2(a-b)Q(a+b,b)=2(a-b)\left[Q(a+b,b)-Q(2b,a)\right]=0$$

Επομένως θα είναι

$$Q(a+b,b)=Q(2b,a), \text{ για } a\neq b. \tag{2}$$

Σημειώνουμε ότι η σχέση (2) ισχύει και για $a=b$.

Επιπλέον, αν θέσουμε $a+b=x$, $b=y$, τότε η (2) γίνεται

$$Q(x,y)=Q(2y,x-y) \tag{3}$$

Από την (3) μπορούμε να έχουμε τις διαδοχικές ισότητες

$$Q(x,y)=Q(2y,x-y)=Q(2x-2y,3y-x)=Q(6y-2x,3x-5y)=\cdots \tag{4}$$

όπου το άθροισμα των μεταβλητών σε κάθε περίπτωση είναι $x+y$. Οι σχέσεις (4) συνοπτικά γράφονται και ως εξής

$$\begin{gathered} Q(x,y)=Q(x+d,y-d), \\ d=0,\ 2y-x,\ x-2y,\ 6y-3x,\ldots, \end{gathered} \tag{5}$$

όπου όλες οι παραπάνω τιμές του d είναι διαφορετικές ανά δύο, για $x\neq 2y$.

Αν θεωρήσουμε συγκεκριμένες τιμές στα x, y, τότε η εξίσωση ως προς d

$$Q(x+d,y-d)-Q(x,y)=0$$

είναι πολυωνυμική βαθμού $n-1$ και για $x\neq 2y$ έχει άπειρες λύσεις της μορφής $d=0, 2y-x, x-2y,\ldots$

Επομένως, για $x \neq 2y$, θα ισχύει

$$Q(x+d, y-d) - Q(x, y) = 0, \text{ για κάθε } d \in \mathbb{R}. \qquad (6)$$

Λόγω συνεχείας της πολυωνυμικής συνάρτησης $Q(x, y)$, η σχέση (6) θα αληθεύει και πάνω στην ευθεία $x - 2y = 0$. Για $d = y$ προκύπτει $Q(x, y) = Q(x+y, 0)$ και αφού το πολυώνυμο $Q(x, y)$ είναι ομογενές βαθμού $n-1$ θα έχουμε

$$Q(x, y) = c(x+y)^{n-1}, \ c \in \mathbb{R}.$$

Επειδή $Q(1,0) = 1$ έπεται ότι $c = 1$, οπότε από την (1) έχουμε

$$P(x, y) = (x-2y)(x+y)^{n-1}.$$

2ος τρόπος

Συνοπτικά θα αποδείξουμε ότι η μοναδική **συνεχής** συνάρτηση $P(x, y)$ που ικανοποιεί τις σχέσεις (i), (ii) και (iii) είναι η

$$P(x, y) = (x-2y)(x+y)^{n-1},$$

οπότε η υπόθεση ότι το $P(x, y)$ είναι πολυώνυμο είναι περιττή.

Κατ' αρχήν αποδεικνύουμε ότι για τη συνάρτηση $f(x) = P(x, 1-x) + 2$ αληθεύει η ισότητα

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \text{ για κάθε } a, b \in \mathbb{R}. \qquad (7)$$

Επειδή επιπλέον η f είναι συνεχής, σύμφωνα με ένα περίφημο θεώρημα του Cauchy θα είναι

$$f(x) = cx, \ c \in \mathbb{R}.$$

Αφού $f(1) = P(1,0) + 2 = 3$, θα είναι $c = 3$ και

$$f(x) = P(x, 1-x) + 2 = 3x$$

$$P(x, 1-x) = 3x - 2, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (8)$$

Στη συνέχεια, αν $a + b \neq 0$, θέτουμε στην (i) $t = a + b$, $x = \dfrac{a}{a+b}$, $y = \dfrac{b}{a+b}$, οπότε λαμβάνουμε

$$P(a,b)=(a+b)^n P\left(\frac{a}{a+b},\frac{b}{a+b}\right). \tag{9}$$

Από την εξίσωση (8), για $x=\frac{a}{a+b}$ λαμβάνουμε

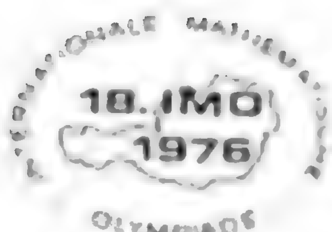
$$P\left(\frac{a}{a+b},\frac{b}{a+b}\right)=\frac{3a}{a+b}-2=\frac{a-2b}{a+b},$$

οπότε από την (9) προκύπτει ότι

$$P(a,b)=(a+b)^n\cdot\frac{a-2b}{a+b}=(a+b)^{n-1}(a-2b), \tag{10}$$

αν $a+b\neq 0$. Επειδή η συνάρτηση $P(x,y)$ είναι συνεχής η ισότητα θα ισχύει και για $a+b=0$.

Αντιστρόφως, είναι προφανές ότι το πολυώνυμο που δίνεται από την (10) ικανοποιεί τις συνθήκες (i), (ii) και (iii) του προβλήματος.



18^{η} Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1976

Τόπος Διοργάνωσης:	Αυστρία (Λιντς – Βιέννη)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	E. Hlawka – G. Baron (Παν/μιο Βιέννης)
Συμμετοχή:	19 χώρες με 8 το πολύ μαθητές η καθεμία.
Νέες συμμετοχές:	--
Μέγιστη Βαθμολογία:	40 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες:	Σοβ. Ένωση (250), Ηνωμένο Βασίλειο (239), Η.Π.Α. (188), Αυστρία (167), Γαλλία (165), Ουγγαρία (160), Αν. Γερμανία (142).
Η Ελληνική ομάδα:	Συμμετείχε και κατέλαβε την προτελευταία θέση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Σε ένα επίπεδο κυρτό τετράπλευρο εμβαδού 32, το άθροισμα των μηκών δύο απέναντι πλευρών του και μιας διαγωνίου είναι 16. Να προσδιορίσετε όλα τα δυνατά μήκη της άλλης διαγωνίου.

Λύση

Έστω ABCD ένα τετράπλευρο με εμβαδόν $(ABCD)=32$ και

$$AB+BD+DC=16. \qquad (1)$$

Το εμβαδόν του τετραπλεύρου μπορεί να γραφτεί ως

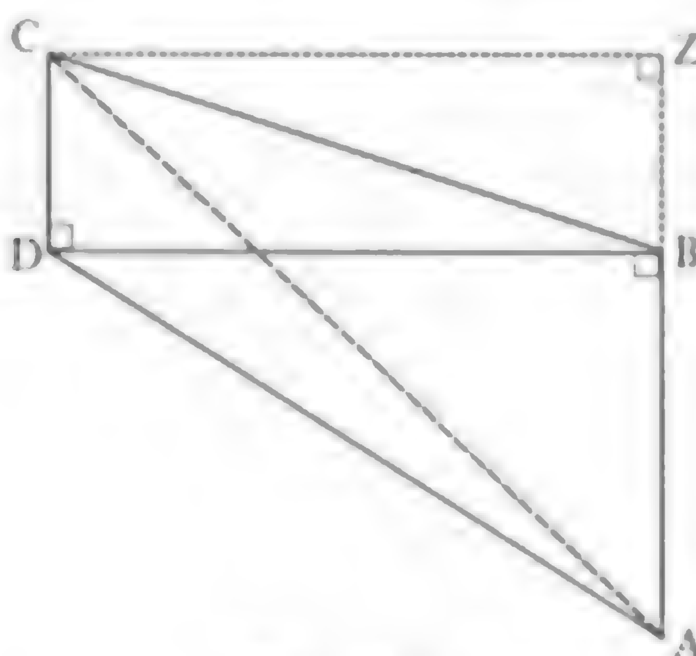
$$E=\frac{1}{2}AB\cdot BD\cdot \eta\mu\, A\hat{B}D+\frac{1}{2}DC\cdot BD\cdot \eta\mu\, C\hat{D}B, \qquad (2)$$

και όπως είναι φανερό εξαρτάται από τις γωνίες $A\hat{B}D$ και $C\hat{D}B$.

Για να προσδιορίσουμε τα δυνατά μήκη της διαγωνίου AC με εμβαδόν $E=32$, θα βρούμε κατ' αρχήν τη μέγιστη τιμή του Ε, όταν ισχύει η (1).

Ανεξάρτητα από το μήκος της διαγωνίου BD, το εμβαδόν του τετραπλεύρου ABCD γίνεται μέγιστο, όταν οι γωνίες $\hat{ABD}$ και $\hat{CDB}$ είναι 90°. Επομένως, αρκεί να βρούμε το μέγιστο του εμβαδού

$$E = \frac{1}{2}BD \cdot (AB + DC), \text{ όταν } AB + BD + DC = 16. \qquad (3)$$



Σχήμα 74

Η συνάρτηση $E = \frac{1}{2}BD \cdot (16 - BD) = -\frac{1}{2}BD^2 + 8BD$ έχει μέγιστο, όταν $BD = \frac{-8}{-1} = 8$, με τιμή $E = 32$. Τότε ισχύει

$$AB + DC = BD = 8 \qquad (4)$$

Επομένως οι συνθήκες του προβλήματος ικανοποιούνται μόνον όταν ισχύει η σχέση (4) και στην περίπτωση αυτή θα είναι

$$AC = \sqrt{(AB + DC)^2 + BD^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2},$$

όπως προκύπτει από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ACZ με $\hat{Z} = 90°$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Έστω $P_1(x) = x^2 - 2$ και $P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x))$ για $j = 2, 3, \ldots$. Να αποδείξετε ότι, για κάθε θετικό ακέραιο n, οι ρίζες της εξίσωσης $P_n(x) = x$ είναι πραγματικές και διαφορετικές ανά δύο.

Λύση

Έχουμε $P_1(x)=x^2-2$

$$P_2(x)=P_1(x^2-2)=(x^2-2)^2-2$$

$$P_3(x)=P_1(P_2(x))=[P_2(x)]^2-2$$

$$\vdots$$

$$P_n(x)=P_1(P_{n-1}(x))=[P_{n-1}(x)]^2-2.$$

Αν θέσουμε $x=x(t)=2\sigma\upsilon\nu t$ με $t\in[0,\pi]$, τότε $x\in[-2,2]$ και τα πολυώνυμα $P_1(x), P_2(x),\dots,P_n(x)$ γίνονται:

$$P_1(x(t))=4\sigma\upsilon\nu^2 t-2=2\sigma\upsilon\nu 2t$$

$$P_2(x(t))=P_1(2\sigma\upsilon\nu 2t)=4\sigma\upsilon\nu^2 2t-2=2\sigma\upsilon\nu 4t$$

$$\vdots$$

$$P_n(x(t))=2\sigma\upsilon\nu 2^n t,$$

όπως εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε με επαγωγή.

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} P_n(x)=x &\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu 2^n t=2\sigma\upsilon\nu t \\ &\Leftrightarrow 2^n t=2\kappa\pi\pm t,\ \kappa\in\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow t=\frac{2\kappa\pi}{2^n-1}\ \text{ή}\ t=\frac{2\kappa\pi}{2^n+1},\ \kappa\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Επειδή είναι $t\in[0,\pi]$ θα πρέπει

$$0\le\frac{2\kappa\pi}{2^n-1}\le\pi\ \text{ή}\ 0\le\frac{2\kappa\pi}{2^n+1}\le\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

$$0\le 2\kappa\le 2^n-1\ \text{ή}\ 0\le 2\kappa\le 2^n+1,\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

$$0\le\kappa\le 2^{n-1}-\frac{1}{2}\ \text{ή}\ 0\le\kappa\le 2^{n-1}+\frac{1}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

$$\kappa\in\{0,1,\dots,2^{n-1}-1\}\ \text{ή}\ \kappa\in\{0,1,\dots,2^{n-1}\}.$$

Επομένως, έχουμε συνολικά $2\cdot 2^{n-1}=2^n$ διαφορετικές λύσεις:

$$t = 0\,,\ \ t = \frac{2\kappa\pi}{2^n - 1},\ \ \kappa = 1, 2, \ldots, 2^{n-1} - 1\,, t = \frac{2\kappa\pi}{2^n + 1},\ \ \kappa = 1, 2, \ldots, 2^{n-1},$$

οπότε έχουμε και 2^n διαφορετικές πραγματικές τιμές του $x = 2\sigma\upsilon\nu t$ ως λύσεις της εξίσωσης $P_n(x) = x$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι δυνατόν να το γεμίσουμε πλήρως με μοναδιαίους κύβους. Αν τοποθετήσουμε, όσο γίνεται περισσότερους κύβους όγκου 2, μέσα στο κουτί, με έδρες παράλληλες προς τις έδρες του κουτιού, τότε γεμίζουμε ακριβώς το 40% του κουτιού. Να προσδιορίσετε τις δυνατές διαστάσεις του κουτιού.

Λύση

Επειδή το κουτί γεμίζει πλήρως με μοναδιαίους κύβους οι διαστάσεις του θα είναι φυσικοί αριθμοί, έστω $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Ο όγκος του κουτιού θα είναι

$$V = \alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Έστω τώρα β_i ο μέγιστος αριθμός κύβων όγκου 2 που μπορούν να τοποθετηθούν κατά μήκος της ακμής α_i. Η πλευρά αυτών των κύβων είναι $\sqrt[3]{2}$ και θα ισχύει

$$\alpha_i - \sqrt[3]{2} < \beta_i \cdot \sqrt[3]{2} \le \alpha_i,\ \ i = 1, 2, 3 \Leftrightarrow \frac{\alpha_i}{\sqrt[3]{2}} - 1 < \beta_i \le \frac{\alpha_i}{\sqrt[3]{2}},\ \ i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

οπότε ο αριθμός β_i θα είναι το ακέραιο μέρος του αριθμού $\frac{\alpha_i}{\sqrt[3]{2}}$, δηλαδή

$$\beta_i = \left[\frac{\alpha_i}{\sqrt[3]{2}}\right],\ \ i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Ο όγκος που καταλαμβάνουν οι παραπάνω κύβοι είναι $\sqrt[3]{2}\beta_1 \cdot \sqrt[3]{2}\beta_2 \cdot \sqrt[3]{2}\beta_3$ και καλύπτει το 40% του κουτιού. Έτσι έχουμε

$$2\beta_1\beta_2\beta_3 = \frac{40}{100}\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ \text{ή}\ \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\beta_1\beta_2\beta_3} = 5. \quad (3)$$

Πρέπει να προσδιορίσουμε όλους τους δυνατούς θετικούς ακέραιους που ικανοποιούν τις σχέσεις (2) και (3). Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι πρέ-

πει $\alpha_i > 1$, γιατί διαφορετικά θα ήταν $\beta_i = 0$. Στη συνέχεια γράφουμε σε πίνακα μερικές τιμές για τους $\alpha_i, \beta_i, \frac{\alpha_i}{\beta_i}$

α	2	3	4	5	6	7	8	...
β	1	2	3	3	4	5	6	...
α/β	2	1,5	1,33	1,66	1,5	1,4	1,33	...

Θα δείξουμε ότι για $\alpha > 8$ είναι $\frac{\alpha}{\beta} < 1,5$. Πράγματι, από την (1) προκύπτει ότι

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha}{\frac{\alpha}{\sqrt[3]{2}} - 1} = \frac{\alpha\sqrt[3]{2}}{\alpha - \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{1 - \frac{\sqrt[3]{2}}{\alpha}},$$

οπότε για $\alpha \geq 8$ θα είναι

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\sqrt[3]{2}}{1 - \frac{\sqrt[3]{2}}{8}} < \frac{1,26}{1 - \frac{1,26}{8}} < 1,5. \tag{4}$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα και τον πίνακα προκύπτει ότι για $\alpha \geq 3$ είναι

$$\frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{5}{3}. \tag{5}$$

Αν τα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ήταν όλα μεγαλύτερα ή ίσα του 3, τότε θα είχαμε $\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\beta_1\beta_2\beta_3} \leq \left(\frac{5}{3}\right)^3$, που αντίκειται στην (3). Επομένως, ένα τουλάχιστον από τα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, έστω το α_1 θα είναι 2. Τότε θα είναι $\beta_1 = 1$ και

$$\frac{\alpha_2\alpha_3}{\beta_2\beta_3} = \frac{5}{2}. \tag{6}$$

Από την (1) είναι $\beta_i \leq \frac{\alpha_i}{\sqrt[3]{2}}$, $i = 2,3$ οπότε

$$\frac{\beta_i}{\alpha_i} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad i = 2,3,$$

και έτσι από την (6), για $i = 3$, προκύπτει

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\beta_3}{\alpha_3} \leq \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}} < 2 .$$

Ομοίως από την (6), για $i = 2$, προκύπτει ότι $\frac{\alpha_3}{\beta_3} < 2$. Από τον πίνακα και τη σχέση (4) παρατηρούμε ότι είναι $\frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{3}{2}$, εκτός εάν είναι $\alpha = 2$ ή $\alpha = 5$. Επειδή $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} < \frac{5}{2}$, παρατηρούμε ότι η (6) θα αληθεύει όταν ένα τουλάχιστον από τα α_2, α_3 είναι 5, έστω $\alpha_2 = 5$. Τότε θα είναι $\frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{5}{3}$ και από την (6) προκύπτει ότι $\frac{\alpha_3}{\beta_3} = \frac{3}{2}$.

Άρα θα είναι $\alpha_3 = 3$, $\beta_3 = 2$ ή $\alpha_3 = 6$, $\beta_3 = 4$ και τελικά οι δυνατές διαστάσεις του κουτιού είναι 2, 3, 5 ή 2, 5, 6.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να προσδιορίσετε, δικαιολογώντας την απάντησή σας, το μέγιστο γινόμενο των θετικών ακεραίων που έχουν άθροισμα 1976.

Λύση

Ο αριθμός των διαφορετικών διαμερίσεων του 1976 σε θετικούς ακεραίους είναι πεπερασμένος, οπότε και ο αριθμός των αντίστοιχων γινομένων θα είναι πεπερασμένος, οπότε το σύνολό τους θα έχει μέγιστη τιμή. Επομένως το πρόβλημά μας έχει λύση.

Υποθέτουμε ότι οι ακέραιοι $a_1, a_2, \ldots, a_n$ έχουν άθροισμα 1976, δηλαδή

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1976 ,$$

και θεωρούμε το αντίστοιχο γινόμενό τους $\Pi = a_1 a_2 \cdots a_n$.

Παρατηρούμε ότι είναι δυνατόν να αντικαταστήσουμε κάποιους από τους αριθμούς a_i με κάποιους άλλους έτσι ώστε το άθροισμα των n αριθμών να μην αλλάζει, ενώ το γινόμενός τους να μεγαλώνει.

Για παράδειγμα, αν υπάρχει αριθμός $a_j \geq 4$ και τον αντικαταστήσουμε με τους αριθμούς 2 και $a_j - 2$ τότε το άθροισμά τους είναι πάλι $2 + (a_j - 2) = a_j$, ενώ το γινόμενό τους είναι

$$2(a_j - 2) = 2a_j - 4 \geq a_j.$$

Η τελευταία ανίσωση αληθεύει, γιατί είναι ισοδύναμη προς την $a_j \geq 4$, που ισχύει.

Με την παραπάνω διαδικασία είναι δυνατόν να αντικαταστήσουμε όλους τους αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 3 με δύο άλλους που τελικά θα είναι 2 ή 3 και το τελικό γινόμενο θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το αρχικό.

Επιπλέον, αν υπάρχει όρος $a_i = 1$, τότε είναι δυνατόν να αντικαταστήσουμε το ζεύγος $a_i = 1$, $a_j > 1$, με τον αριθμό $a_j + 1$, γιατί έτσι το άθροισμα παραμένει αναλλοίωτο, ενώ το γινόμενο μεγαλώνει.

Τελικά μετά από τις παραπάνω αντικαταστάσεις, εκτελώντας όσες χρειάζονται, καταλήγουμε σε ένα γινόμενο της μορφής

$$2^m \cdot 3^n.$$

Αν είναι $m \geq 3$, αντικαθιστούμε κάθε τριάδα από 2 με άθροισμα $2 + 2 + 2 = 6$, με μία δυάδα από 3, που έχουν το ίδιο άθροισμα, ενώ για τα γινόμενα ισχύει ότι

$$2^3 = 8 < 9 = 3^2.$$

Έτσι καταλήγουμε σε γινόμενα της μορφής

$$2^x \cdot 3^y, \text{ με } x = 0, 1, 2.$$

Επειδή είναι $1976 = 3 \cdot 658 + 2$ η καλύτερη διαμέριση συνίσταται από 658 τριάρια και ένα δύο, είναι δηλαδή

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{658} = 3, \ a_{659} = 2.$$

Το μέγιστο γινόμενο είναι $\Pi = 2 \cdot 3^{658}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Θεωρούμε το σύστημα των p εξισώσεων και $q = 2p$ αγνώστων $x_1, x_2, \ldots, x_q$:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q = 0 \end{array}\right\} \quad (\Sigma),$$

του οποίου κάθε συντελεστής a_{ij} είναι στοιχείο του συνόλου $\{-1,0,1\}$.

Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μία λύση $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ τέτοια ώστε:

(α) $x_j \in \mathbb{Z}$, για κάθε $j = 1,2,\ldots,q$,

(β) υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_j \neq 0$,

(γ) $|x_j| \leq q$, για κάθε $j = 1,2,\ldots,q$.

Λύση

Έστω $(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ είναι μία q-άδα ακεραίων με $|y_j| \leq p$, $j = 1,2,\ldots q$. Το σύστημα (Σ) γράφεται ισοδύναμα ως

$$\sum_{i=1}^{q} a_{ri}x_i = 0, \quad r = 1,2,\ldots,p.$$

Επειδή οι συντελεστές a_{ri} ανήκουν στο σύνολο $\{-1,0,1\}$ θα έχουμε για $x_i = y_i$, $i = 1,2,\ldots,q$,

$$\left|\sum_{i=1}^{q} a_{ri}y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{q} |a_{ri}||y_i| \leq p\sum_{i=1}^{q}|a_{ri}| \leq pq, \text{ ή } -pq \leq \sum_{i=1}^{q} a_{ri}y_i \leq pq,$$

οπότε ο ακέραιος $\sum_{i=1}^{q} a_{ri}y_i$, $r = 1,2,\ldots,p$ μπορεί να πάρει συνολικά $2pq+1$ τιμές και η p-άδα

$$\left(\sum_{i=1}^{q} a_{1i}y_i, \sum_{i=1}^{q} a_{2i}y_i, \ldots, \sum_{i=1}^{q} a_{pi}y_i\right) \tag{1}$$

θα έχει συνολικά το πολύ $(2pq+1)^p$ διαφορετικές μορφές.

Επιπλέον, επειδή είναι

$$-p \le y_j \le p, \quad y_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, \ldots, q,$$

για κάθε y_j υπάρχουν $2p+1$ διαφορετικές επιλογές και συνολικά μπορούμε να κατασκευάσουμε $(2p+1)^q$ διαφορετικές q-άδες $(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ και αφού $q = 2p$ θα είναι

$$(2p+1)^q = (2p+1)^{2p} = \left[(2p+1)^2\right]^p = \left(4p^2+4p+1\right)^p.$$

Έτσι έχουμε διαπιστώσει ότι υπάρχουν το πολύ $\left(4p^2+4p+1\right)^p$ q-άδες $(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ με στοιχεία ακεραίους και $|y_j| \le p$, $j = 1, 2, \ldots, q$, ενώ υπάρχουν το πολύ $(2pq+1)^p = \left(4p^2+1\right)^p$ p-άδες της μορφής (1).

Επειδή είναι $(2p+1)^q > (2p+1)^p$, σύμφωνα με την αρχή της περιστεροφωλιάς θα υπάρχουν δύο τουλάχιστον διαφορετικές q-άδες που θα δίνουν την ίδια p-άδα της μορφής (1). Έστω ότι δύο από αυτές είναι οι

$$(y_1, y_2, \ldots, y_q) \text{ και } (z_1, z_2, \ldots, z_q).$$

Θα δείξουμε ότι η q-άδα $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ με $x_j = y_j - z_j$, $j = 1, 2, \ldots, q$ αποτελεί λύση του προβλήματος.

Κατ' αρχήν έχουμε $\sum_{i=1}^{q} a_{ri} y_i = \sum_{i=1}^{q} a_{ri} z_i$, $r = 1, 2, \ldots, p$,

οπότε θα είναι

$$\sum_{i=1}^{q} a_{ri} x_i = \sum_{i=1}^{q} a_{ri} (y_i - z_i) = \sum_{i=1}^{q} a_{ri} y_i - \sum_{i=1}^{q} a_{ri} z_i = 0,$$

δηλαδή η q-άδα $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ είναι λύση του (Σ).

Επιπλέον ισχύουν:

(α) $x_i = y_i - z_i \in \mathbb{Z}$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, q$, αφού $y_i, z_i \in \mathbb{Z}$.

(β) Επειδή $(y_1, y_2, \ldots, y_q) \ne (z_1, z_2, \ldots, z_q)$, τότε $(x_1, x_2, \ldots, x_q) \ne (0, 0, \ldots 0)$.

(γ) $|x_i| = |y_i - z_i| \le |y_i| + |z_i| \le 2p = q$, αφού είναι $|y_i| \le p$ και $|z_i| \le p$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, q$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Η ακολουθία (u_n) ορίζεται από $u_0 = 2, u_1 = 5/2$ και $u_{n+1} = u_n\left(u_{n-1}^2 - 2\right) - u_1$, $n = 1,2,\ldots$ Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ισχύει

$$[u_n] = 2^{\left[2^n - (-1)^n\right]/3},$$

όπου με $[x]$ σημειώνουμε το ακέραιο μέρος του x, δηλαδή το μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος του x.

Λύση

Κατ' αρχήν έχουμε

$$u_0 = 2,\ u_1 = \frac{5}{2},\ u_2 = \frac{5}{2}\left(2^2 - 2\right) - \frac{5}{2} = \frac{5}{2},\ u_3 = \frac{5}{2}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}\right] - \frac{5}{2} = \frac{65}{8},$$

$$u_4 = \frac{65}{8}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2\right] - \frac{5}{2} = \frac{1025}{32},\ u_5 = \frac{1025}{32}\left[\left(\frac{65}{8}\right)^2 - 2\right] - \frac{5}{2} = \frac{4194305}{2048}.$$

Για τους όρους που ακολουθούν οι πράξεις δυσκολεύουν, οπότε προσπαθούμε να βρούμε έναν κανόνα για την παραγωγή τους με τη βοήθεια των όρων που έχουμε υπολογίσει. Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι παρανομαστές είναι δυνάμεις του 2, ενώ οι αριθμητές γίνονται δυνάμεις του 2, αν τους αφαιρεθεί μία μονάδα. Έτσι έχουμε

$$u_0 = \frac{2^0 + 1}{2^0} = 2^0 + 2^{-0},\ u_1 = \frac{2^2 + 1}{2^1} = 2^1 + 2^{-1} = u_2,$$

$$u_3 = \frac{2^6 + 1}{2^3} = 2^3 + 2^{-3},\ u_4 = \frac{2^{10} + 1}{2^5} = 2^5 + 2^{-5},\ u_5 = 2^{11} + 2^{-11},\ldots$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι ο γενικός όρος u_n της ακολουθίας θα είναι της μορφής

$$u_n = 2^{f(n)} + 2^{-f(n)}, \qquad (1)$$

όπου $f(n)$ είναι μία ακολουθία που πρέπει να προσδιοριστεί.

Επειδή για $n>0$, ο όρος $2^{-f(n)}$ φαίνεται να είναι κλάσμα μικρότερο του 1, οπότε δεν συνεισφέρει στο ακέραιο μέρος του u_n, υποψιαζόμαστε ότι η ακολουθία $f(n)$ πρέπει να είναι της μορφής που δίνεται στην εκφώνηση της άσκησης, δηλαδή

$$f(n)=\frac{1}{3}\left[2^n-(-1)^n\right], \tag{2}$$

το οποίο και αληθεύει για $n=1,2,3$.

Παρατηρούμε ότι $f(n)>0$ για κάθε $n=1,2,\ldots$ και $3\mid 2^n-(-1)^n$, για κάθε $n=1,2,\ldots$, αφού από $2\equiv -1(\bmod 3)$ έπεται ότι $2^n\equiv(-1)^n(\bmod 3)$ και $2^n-(-1)^n\equiv 0(\bmod 3)$.

Επιπλέον η μορφή (2) ικανοποιεί και την υποψία μας ότι $2^{-f(n)}<1$, για κάθε $n=1,2,\ldots$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η σχέση (1) αληθεύει για όλα τα $k\leq n$ και θα αποδείξουμε ότι αυτή αληθεύει και για το $n+1$. Έχουμε τότε

$$\begin{aligned}u_{n+1}&=u_n\left(u_{n-1}^2-2\right)-\frac{5}{2}=\left(2^{f(n)}+2^{-f(n)}\right)\cdot\left(2^{2f(n-1)}+2^{-2f(n-1)}\right)-\frac{5}{2}\\&=2^{f(n)+2f(n-1)}+2^{-f(n)-2f(n-1)}+2^{f(n)-2f(n-1)}+2^{-f(n)+2f(n-1)}-\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Επιπλέον έχουμε ότι

$$\begin{aligned}f(n)+2f(n-1)&=\frac{1}{3}\cdot 2^n+\frac{2}{3}\cdot 2^{n-1}-\frac{1}{3}(-1)^n-\frac{2}{3}(-1)^{n-1}\\&=\frac{1}{3}\cdot 2^{n+1}+\frac{1}{3}(-1)^{n+1}-\frac{2}{3}(-1)^{n+1}\\&=\frac{1}{3}\left[2^{n+1}-(-1)^{n+1}\right]=f(n+1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(n)-2f(n-1)&=\frac{1}{3}\cdot 2^n-\frac{2}{3}\cdot 2^{n-1}-\frac{1}{3}(-1)^n+\frac{2}{3}(-1)^{n-1}\\&=\frac{1}{3}\left(2^n-2^n\right)+\frac{1}{3}(-1)^{n+1}+\frac{2}{3}(-1)^{n+1}=(-1)^{n+1}.\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} &= 2^{f(n+1)} + 2^{-f(n+1)} + 2 + 2^{-1} - \frac{5}{2} \\
&= 2^{f(n+1)} + 2^{-f(n+1)},
\end{aligned}
$$

οπότε, σύμφωνα με την αρχή της τελείας επαγωγής η σχέση (1) αληθεύει για κάθε θετικό ακέραιο n.



19η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1977

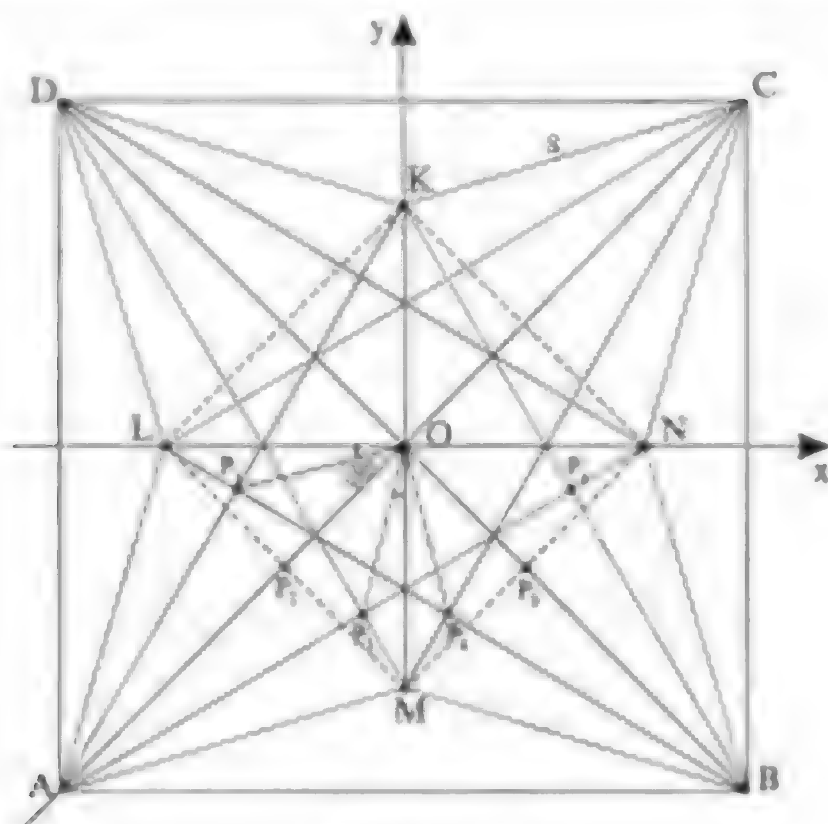
Τόπος Διοργάνωσης:	Γιουγκοσλαβία (Βελιγράδι)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	V. Dajovic (Παν/μιο Βελιγραδίου)
Συμμετοχή:	20 χώρες με 8 το πολύ μαθητές η καθεμία.
Νέες συμμετοχές:	Δυτική Γερμανία, Αλγερία
Μέγιστη Βαθμολογία:	40 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες:	Η.Π.Α. (202), Σοβ. Ένωση (192), Ηνωμ. Βασίλειο και Ουγγαρία (190), Ολλανδία (185), Βουλγαρία (172), Δυτική Γερμανία (165), Αν. Γερμανία (163).
Η Ελληνική ομάδα:	Δεν πήρε μέρος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Μέσα στο τετράγωνο ABCD κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα ABK, BCL, CDM και DAN. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των τεσσάρων τμημάτων KL, LM, MN, NK και τα μέσα των οκτώ τμημάτων AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN είναι οι δώδεκα κορυφές ενός κανονικού δωδεκαγώνου.

Λύση

Έστω O το κέντρο του τετραγώνου. Επειδή οι διαγώνιοι AC, BD, όπως και οι ευθείες MK, LN, είναι άξονες συμμετρίας του τετραγώνου, κάθε στροφή του τετραγώνου κατά 90° (ή πολλαπλάσιο των 90°), αφήνει το σχήμα αναλλοίωτο. Επομένως είναι αρκετό να δουλέψουμε στο χωρίο του επιπέδου που ορίζεται μεταξύ των ημιευθειών OA και OL, και στη συνέχεια με διαδοχικές συμμετρίες ως προς την OA, OM και LN θα παράξουμε ολόκληρο το σχήμα. Ονομάζουμε τα μέσα των τμημάτων AK, LM, AN, ... αντίστοιχα $P_1, P_2, P_3, \ldots$, (όπως στο σχήμα)



Σχήμα 75

Επειδή είναι $AK = AD$ και $D\hat{A}K = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ θα έχουμε $A\hat{D}K = A\hat{K}D = 75^\circ$. Επομένως τα ίσα ισοσκελή τρίγωνα CDK, BCN, ABM, DAL θα έχουν τις παρά τη βάση γωνίες ίσες με 15°. Επομένως τα όμοια τρίγωνα AML, BNM, CKN και DLK είναι ισόπλευρα, έστω με πλευρά β.

Το τμήμα OP_1 συνδέει τα μέσα των πλευρών AK και AC του τριγώνου AKC, οπότε είναι παράλληλο προς τη βάση KC και ίσο προς το μισό της, δηλαδή $OP_1 = \frac{\beta}{2}$. Λόγω συμμετρίας, θα είναι $OL \parallel DC$, οπότε θα είναι $L\hat{O}P_1 = D\hat{C}K = 15^\circ$, και αφού $A\hat{O}L = 45^\circ$, θα είναι και $P_1\hat{O}P_2 = 30^\circ$. Επειδή είναι $AO \perp OB$, η OB θα διχοτομεί τη γωνία MBN, οπότε θα είναι $BO \perp MN$. Επομένως $MN \parallel AO$ και $OP_2 = MP_5 = \frac{\beta}{2}$, δηλαδή $OP_1 = OP_2$.

Λόγω συμμετρίας ως προς την ευθεία OA, θα έχουμε $OP_3 = OP_1$, $P_2\hat{O}P_3 = 30^\circ$ και $P_3\hat{O}M = 15^\circ$. Στη συνέχεια με συμμετρία ως προς την ευθεία OM διαπιστώνουμε ότι και τα τμήμα OP_4, OP_5 και OP_6 έχουν μήκος $\frac{\beta}{2}$ και ότι $P_3\hat{O}P_4 = P_4\hat{O}P_5 = P_5\hat{O}P_6 = 30^\circ$.

Τέλος θεωρώντας συμμετρία ως προς την ευθεία LN διαπιστώνουμε ότι

έχουμε συνολικά 12 σημεία $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ που βρίσκονται σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας $\frac{\beta}{2}$ και τέτοια ώστε $P_i\hat{O}P_{i+1} = 30°$, $i = 1, 2, \ldots, 11$, $P_{12}\hat{O}P_1 = 30°$.

Επομένως τα $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ είναι οι κορυφές ενός κανονικού δωδεκαγώνου.

Παρατήρηση: Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί και με Αναλυτική Γεωμετρία ως προς τους άξονες xOy που φαίνονται στο σχήμα. Αν υποθέσουμε ότι είναι $A(-2,2)$, $B(2,-2)$, $C(2,2)$, $D(-2,2)$, τότε είναι $K\left(0, 2\sqrt{3}-2\right)$, $L\left(2-2\sqrt{3}, 0\right)$, $M\left(0, 2-2\sqrt{3}\right)$, $N\left(2\sqrt{3}-2, 0\right)$ και $P_1\left(-1, \sqrt{3}-2\right)$, $P_2\left(1-\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\right)$, $P_3\left(\sqrt{3}-2, -1\right)$. $(OP_1)^2 = (OP)^2 = (OP_3)^2 = 8-4\sqrt{3}$ και $(P_1P_2)^2 = (P_3P_4)^2 = 28-16\sqrt{3}$.

Χρησιμοποιώντας συμμετρίες μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι όλα τα μέσα $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ απέχουν από το O απόσταση $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$ και ότι όλες οι πλευρές του δωδεκαγώνου έχουν μήκος $2\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Σε μία πεπερασμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών το άθροισμα οποιωνδήποτε επτά διαδοχικών όρων της είναι αρνητικός αριθμός και το άθροισμα οποιωνδήποτε ένδεκα διαδοχικών όρων της είναι θετικός αριθμός. Να προσδιορίσετε το μέγιστο αριθμό όρων της ακολουθίας.

Λύση

Έστω $X_n : a_1, a_2, \ldots, a_n$ μία πεπερασμένη ακολουθία που ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος. Γράφουμε έναν πίνακα με 7 στήλες και n γραμμές, όπως φαίνεται παρακάτω.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}

Παρατηρούμε ότι κάθε γραμμή του πίνακα έχει ως στοιχεία μία επτάδα διαδοχικών όρων της ακολουθίας, ενώ κάθε στήλη (χρησιμοποιώντας μόνο 11 γραμμές) έχει ως στοιχεία μία ενδεκάδα διαδοχικών όρων της ακολουθίας.

Αν είναι $S_i = a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{i+6}$, $i = 1,2,\ldots,11$ το άθροισμα των στοιχείων της i-γραμμής του πίνακα τότε θα είναι $S_i < 0$ $\forall i = 1,2,\ldots,11$ και

$$S = S_1 + S_2 + \cdots + S_{11} < 0 \qquad (1)$$

Αν είναι $\Sigma_j = a_j + a_{j+1} + \cdots + a_{j+10}$, $j = 1,2,\ldots,7$, το άθροισμα των στοιχείων της j-στήλης του πίνακα, τότε θα είναι $\Sigma_j > 0$ $\forall j = 1,2,\ldots,11$ και

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots + \Sigma_7 > 0 \,. \qquad (2)$$

Όμως πρέπει να είναι $S = \Sigma$, οπότε οι σχέσεις (1) και (2) οδηγούν σε άτοπο.

Επομένως η ακολουθία X_n δεν είναι δυνατόν να υπάρχει με $n \geq 17$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ορίζεται η ακολουθία X_n με $n = 16$ ή με $n < 16$, οπότε ο ζητούμενος μέγιστος αριθμός θα είναι ο 16.

Μία ακολουθία X_n με 16 όρους που ικανοποιεί το πρόβλημά μας είναι

η $\qquad 5,5,-13,5,5,5,-13,5,5,-13,5,5,5,-13,5,5,$

ενώ οποιοιδήποτε n διαδοχικοί όροι, με $11 \leq n \leq 16$, της παραπάνω ακολουθίας οδηγούν σε ακολουθία που ικανοποιεί το πρόβλημά μας.

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε τον τρόπο εύρεσης της παραπάνω ακολουθίας με 16 όρους. Υποθέτουμε ότι έχουμε μία ακολουθία X_n με 16 όρους που διαβάζεται ομοίως από αριστερά προς τα δεξιά, αλλά και από δεξιά προς τα αριστερά, της οποίας το άθροισμα οποιωνδήποτε επτά διαδοχικών όρων είναι −1, ενώ το άθροισμα οποιωνδήποτε ένδεκα διαδοχικών όρων είναι 1. Τότε θα έχουμε

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = -1$$

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = -1$$

$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_8 = -1$$

$$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_8 + a_7 = -1$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_8 + a_7 + a_6 = -1 \,.$$

Αφαιρώντας κάθε εξίσωση από την προηγούμενή της λαμβάνουμε

$$a_1 = a_8,\ a_2 = a_8,\ a_3 = a_7,\ a_4 = a_6.$$

Επίσης έχουμε

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_8 + a_7 + a_6 = 1$$

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_8 + a_7 + a_6 + a_5 = 1$$

$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_8 + a_7 + a_6 + a_5 + a_4 = 1.$$

από τις οποίες με αφαίρεση κάθε μιας από την προηγούμενή της λαμβάνουμε

$$a_1 = a_5 \quad \text{και} \quad a_2 = a_4.$$

Επομένως η ακολουθία θα έχει τη μορφή

$$a_1, a_1, a_3, a_1, a_1, a_1, a_3, a_1, a_1, a_3, a_1, a_1, a_1, a_3, a_1, a_1,$$

όπου το άθροισμα οποιωνδήποτε επτά διαδοχικών όρων είναι $5a_1 + 2a_3 = -1$ και το άθροισμα οποιωνδήποτε ένδεκα διαδοχικών όρων είναι $8a_1 + 3a_3 = 1$, οπότε έχουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} 5a_1 + 2a_3 &= -1 \\ 8a_1 + 3a_3 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Άρα είναι $a_1 = 5, a_3 = -13$, οπότε έτσι προκύπτει η ακολουθία που έχουμε ήδη αναφέρει.

Παρατήρηση

Οι αριθμοί -1 και 1 θεωρήθηκαν για λόγους απλούστευσης των πράξεων. Αν αντί αυτών θεωρούσαμε τους ακέραιους $a < 0$ και $b > 0$, αντιστοίχως, τότε πάλι το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} 5a_1 + 2a_3 &= a \\ 8a_1 + 3a_3 &= b \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

έχει ακέραιες λύσεις, αφού η ορίζουσα D του πίνακα του είναι -1.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω n δεδομένος ακέραιος, $n > 2$ και έστω V_n το σύνολο των ακεραίων $1 + kn$, $k = 1, 2, \ldots$. Ένας αριθμός $m \in V_n$ λέγεται μη αναλύσι-

μος (indecomposable) στο V_n, αν δεν υπάρχουν αριθμοί $p, q \in V_n$ τέτοιοι ώστε $pq = m$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $r \in V_n$ ο οποίος μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο μη αναλύσιμων στοιχείων στο V_n με περισσότερους από έναν τρόπους. [Γινόμενα που διαφέρουν μόνο ως προς τη διάταξη των παραγόντων να θεωρηθούν ως ίδια].

Λύση

Το σύνολο $V_n = \{u : u > 1 \text{ και } u = 1(\bmod n)\}$.

Το V_n είναι αλγεβρική δομή (ο συνήθης πολλαπλασιασμός) αφού τα στοιχεία του, που από τον ορισμό τους χαρακτηρίζονται από τις σχέσεις

$$u \equiv 1(\bmod n) \text{ και } u > 1,$$

έχουν την ιδιότητα ότι το γινόμενο οποιωνδήποτε δύο από αυτά είναι στοιχείο του V_n, δηλαδή το σύνολο V_n είναι **κλειστό** ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού, αφού

$$(1+k_1 n)\cdot(1+k_2 n) = 1 + (k_1 + k_2 + k_1 k_2 n),$$

με $k_1 + k_2 + k_1 k_2 n \in \mathbb{Z}^*$.

Τα μη αναλύσιμα στοιχεία του V_n παίζουν το ρόλο των πρώτων αριθμών στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Η ίδια μέθοδος που χρησιμοποιείται για την ανάλυση ενός φυσικού αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την απόδειξη της ανάλυσης ενός στοιχείου του V_n σε γινόμενο μη αναλύσιμων στοιχείων του V_n. Αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε στο πρόβλημά μας είναι το ότι, σε αντίθεση με τους φυσικούς αριθμούς, η παραγοντοποίηση σε μη αναλύσιμα στοιχεία του V_n δεν είναι μονοσήμαντη.

Έστω $a = n-1$, $b = 2n-1$ και ορίζουμε το r ως εξής

$$r = (a^2)(b^2) = (ab)(ab). \tag{1}$$

Επειδή $a \equiv b \equiv -1(\bmod n)$, έχουμε ότι $a, b \notin V_n$, ενώ $a^2, ab, b^2 \in V_n$, αφού $a^2 \equiv ab \equiv b^2 \equiv 1(\bmod n)$.

Θα δείξουμε ότι το a^2 είναι μη αναλύσιμο στο V_n. Πράγματι, αν το a^2 ήταν αναλύσιμο στο V_n θα υπήρχαν $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ έτσι ώστε

$$a^2 = (1+k_1 n)(1+k_2 n)$$

$$a^2 = 1+(k_1+k_2)n + k_1 k_2 n^2$$

$$a^2 > n^2 = (a+1)^2,$$

που είναι άτοπο.

Επιπλέον, ο μη αναλύσιμος αριθμός a^2 δεν είναι διαιρέτης του ab, αφού

$$\frac{ab}{a^2} = \frac{b}{a} = \frac{2n-1}{n-1} = 2 + \frac{1}{n-1} \notin \mathbb{Z},$$

δεδομένου ότι $n > 2$.

Επομένως η εξίσωση (1) οδηγεί σε δύο διαφορετικές παραγοντοποιήσεις του r σε μη αναλύσιμα στοιχεία του V_n, αφού ανεξάρτητα από το αν είναι ή όχι τα b^2 και ab αναλύσιμα στοιχεία, ο παράγοντα a^2 δεν μπορεί να είναι ένας από τους παράγοντες του ab.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση

$$\mathbf{f(\theta) = 1 - a\sigma\upsilon\nu\theta - b\eta\mu\theta - A\sigma\upsilon\nu 2\theta - B\eta\mu 2\theta,}$$

όπου a, b, A, B είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Να αποδείξετε ότι, αν ισχύει $f(\theta) \geq 0$ για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$, τότε θα ισχύει

$$\mathbf{a^2 + b^2 \leq 2 \text{ και } A^2 + B^2 \leq 1.}$$

Λύση

Έστω $\sqrt{a^2+b^2} = r$. Τότε $\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1$, οπότε υπάρχει γωνία α τέτοια ώστε

$$\frac{a}{r} = \sigma\upsilon\nu\alpha \text{ και } \frac{b}{r} = \eta\mu\alpha.$$

Έτσι έχουμε

$$a\sigma\upsilon\nu\theta+b\eta\mu\theta=r\left(\frac{a}{r}\sigma\upsilon\nu\theta+\frac{b}{r}\eta\mu\theta\right)$$
$$=r\left(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\alpha\eta\mu\theta\right)$$
$$=r\sigma\upsilon\nu(\theta-\alpha).$$

Ομοίως, αν θέσουμε

$$\sqrt{A^2+B^2}=R \quad \text{και} \quad \frac{A}{R}=\sigma\upsilon\nu2\beta,\ \frac{B}{R}=\eta\mu2\beta,$$

θα έχουμε

$$A\sigma\upsilon\nu2\theta+B\eta\mu2\theta=R\left(\frac{A}{R}\sigma\upsilon\nu2\theta+\frac{B}{R}\eta\mu2\theta\right)$$
$$=R\left(\sigma\upsilon\nu2\beta\sigma\upsilon\nu2\theta+\eta\mu2\beta\eta\mu2\theta\right)$$
$$=R\sigma\upsilon\nu2(\theta-\beta).$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω η $f(\theta)$ γράφεται

$$f(\theta)=1-r\sigma\upsilon\nu(\theta-\alpha)-R\sigma\upsilon\nu2(\theta-\beta). \tag{1}$$

Για $\theta=\alpha+\frac{\pi}{4}$, και $\theta=\alpha-\frac{\pi}{4}$ από την (1), λαμβάνουμε τις ισότητες:

$$f\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{r}{\sqrt{2}}-R\sigma\upsilon\nu2\left(\alpha-\beta+\frac{\pi}{4}\right). \tag{2}$$

$$f\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{r}{\sqrt{2}}-R\sigma\upsilon\nu2\left(\alpha-\beta-\frac{\pi}{4}\right). \tag{3}$$

Αν είναι $r>\sqrt{2}$, τότε $1-\frac{r}{\sqrt{2}}<0$, και επειδή

$$2\left(\alpha-\beta+\frac{\pi}{4}\right)-2\left(\alpha-\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\pi,$$

τα $\sigma\upsilon\nu2\left(\alpha-\beta+\frac{\pi}{4}\right),\sigma\upsilon\nu2\left(\alpha-\beta-\frac{\pi}{4}\right)$ θα έχουν αντίθετα πρόσημα και μία από τις παραστάσεις

$$R\sigma\upsilon\nu2\left(\alpha-\beta+\frac{\pi}{4}\right),\ R\sigma\upsilon\nu2\left(\alpha-\beta-\frac{\pi}{4}\right)$$

θα είναι θετική, θα έχουμε ότι το δεξιό μέλος μιας εκ των εξισώσεων (2), (3) θα είναι αρνητικό, οπότε και μία τουλάχιστον από τις τιμές $f\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ θα είναι αρνητική, το οποίο αντίκειται στην υπόθεση ότι $f(\theta)\geq 0$ για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$.

Επομένως θα είναι $r^2=a^2+b^2\leq 2$.

Ομοίως βρίσκουμε τις τιμές της f στα β και $\beta+\pi$,

$$f(\beta)=1-r\sigma\upsilon\nu(\beta-\alpha)-R \tag{4}$$

και

$$f(\beta+\pi)=1-r\sigma\upsilon\nu(\beta-\alpha+\pi)-R. \tag{5}$$

Αν είναι $R>1$, τότε $1-R<0$ και επειδή

$$(\beta-\alpha+\pi)-(\beta-\alpha)=\pi,$$

με το ίδιο σκεπτικό όπως παραπάνω, καταλήγουμε σε άτοπο.

Επομένως είναι $R^2=A^2+B^2\leq 1$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Έστω a και b είναι θετικοί ακέραιοι. Όταν ο a^2+b^2 διαιρείται με το $a+b$, το πηλίκο είναι q και το υπόλοιπο είναι r. Να βρείτε όλα τα ζεύγη (a,b) που είναι τέτοια ώστε $q^2+r=1977$.

Λύση

Δίνεται

$$a^2+b^2=q(a+b)+r,\quad 0\leq r<a+b \tag{1}$$

και

$$q^2+r=1977 \tag{2}$$

Έτσι έχουμε

$$q^2\leq 1977=q^2+r<q^2+a+b \tag{3}$$

και

$$a^2+b^2=q(a+b)+r<(q+1)(a+b), \tag{4}$$

οπότε θα είναι και

$$2ab < (q+1)(a+b), \quad (5)$$

αφού $2ab \le a^2 + b^2$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των (4) και (5) λαμβάνουμε

$$(a+b)^2 < 2(q+1)(a+b)$$

ή $a+b < 2q+2$ ή τελικά $a+b \le 2q+1$.

Τότε από την (3) λαμβάνουμε

$$q^2 \le 1977 < q^2 + 2q + 1 = (q+1)^2. \quad (6)$$

Ο μοναδικός ακέραιος που ικανοποιεί τις ανισότητες (6) είναι $q = 44$, οπότε προκύπτει από την (2) ότι $r = 41$. Έτσι από την (1) έχουμε

$$a^2 + b^2 = 44a + 44b + 41, \text{ ή}$$

$$(a-22)^2 + (b-22)^2 = 1009. \quad (7)$$

Έχοντας στο μυαλό μας τα τετράγωνα ακεραίων μέχρι το $22^2 = 484$, ότι αυτά καταλήγουμε σε 0, 1, 4, 9, 6, 5 και τις διαφορές τους από το 1009, καταλήγουμε ότι η μοναδική αναπαράσταση του 1009 σε άθροισμα τετραγώνων είναι η

$$15^2 + 28^2 = 1009,$$

οπότε θα έχουμε

$$|a-22| = 15, |b-22| = 28 \text{ ή } |a-22| = 28, |b-22| = 15$$

$$\Leftrightarrow a - 22 = \pm 15, b - 22 = \pm 28 \text{ (τέσσερις περιπτώσεις)}$$

$$\text{ή } a - 22 = \pm 28, b - 22 = \pm 15 \text{ (τέσσερις περιπτώσεις)},$$

$$\Leftrightarrow (a,b) = (37,50) \text{ ή } (a,b) = (7,50) \text{ ή } (a,b) = (50,37) \text{ ή } (a,b) = (50,7).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Έστω $f(n)$ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των θετικών ακεραίων και με τιμές στο ίδιο σύνολο. Να αποδείξετε ότι, αν

$$f(n+1) > f(f(n))$$

για κάθε θετικό ακέραιο n, τότε

$$f(n) = n, \text{ για κάθε } n.$$

Λύση

Θα δείξουμε πρώτα ότι θα είναι $f(1)=1$.

Κατ' αρχήν αν υποθέσουμε ότι ισχύει $f(k)\neq 1$ για κάθε $k\in\mathbb{N}^*$, τότε μπορούμε να έχουμε

$$f(n+1)>f(f(n))=f(n_1)>f(f(n_1-1))$$
$$=f(n_2)>\cdots=f(n_j)>f(f(n_j-1))>\cdots,$$

όπου σύμφωνα με την υπόθεση ότι $f(k)\neq 1$, για κάθε $k\in\mathbb{N}^*$, θα είναι $n_j>1$ για κάθε n_j, $j=1,2,\ldots$ Έτσι έχουμε κατασκευάσει μία φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών με άπειρους όρους, που είναι αδύνατο. Επομένως το 1 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

Επιπλέον έχουμε

$$f(k)>f(f(k-1))>0,\ \text{για κάθε } k\in\mathbb{N}^*,\ k\geq 2,$$

οπότε θα ισχύει

$$f(k)>1,\ \text{για κάθε } k\in\mathbb{N}^*,\ k>1.$$

Επομένως θα πρέπει $f(1)=1$ και $f(2)>f(1)=1$.

Με το ίδιο σκεπτικό αποδεικνύουμε ότι η τιμή $f(2)$ είναι η ελάχιστη τιμή της f, όταν το πεδίο ορισμού περιορίζεται στο σύνολο $\{2,3,4,\ldots\}$ και έτσι καταλήγουμε τελικά στις ανισότητες

$$1=f(1)<f(2)<f(3)<\cdots \tag{1}$$

Επειδή ισχύει $f(n)\geq 1$, για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$, θα είναι και

$$f(n)\geq n,\ \text{για κάθε } n\in\mathbb{N}^*. \tag{2}$$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $k\in\mathbb{N}^*$ που είναι τέτοιο ώστε $f(k)>k$, τότε θα έχουμε

$$f(k)\geq k+1$$
$$f(f(k))\geq f(k+1),\ [\text{f γνησίως αύξουσα λόγω (1)}]$$

που αντίκειται στην υπόθεση του προβλήματος.

Επομένως θα ισχύει $f(n)=n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$.



$20^η$ Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1978

Τόπος Διοργάνωσης:	Ρουμανία (Βουκουρέστι)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	Jon Cuculescu (Παν. Βουκουρεστίου)
Συμμετοχή:	17 χώρες με 8 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες Συμμετοχές:	Τουρκία
Μέγιστη Βαθμολογία:	40 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες:	Ρουμανία (237), Η.Π.Α. (225), Ηνωμ. Βασίλειο (201), Βιετνάμ (200), Τσεχοσλοβακία (195), Δυτική Γερμανία (184), Βουλγαρία (182), Γαλλία (179).
Η Ελληνική ομάδα:	δεν πήρε μέρος

Οι χώρες της Ανατολικής Γερμανίας, Ουγγαρίας και Σοβιετικής Ένωσης δεν συμμετείχαν για πολιτικούς λόγους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω m, n θετικοί ακέραιοι με m < n. Τα τρία τελευταία δεκαδικά ψηφία του 1978^m είναι τα ίδια με τα τρία τελευταία δεκαδικά ψηφία του 1978^n. Βρείτε τα m, n ώστε το άθροισμα m + n να λαμβάνει την ελάχιστη δυνατή τιμή.

Λύση

Αφού έχουμε την ισότητα των τριών τελευταίων δεκαδικών ψηφίων των 1978^m, 1978^n πρέπει η διαφορά $1978^n - 1978^m$ να είναι πολλαπλάσιο του 1000, δηλαδή

$$1978^m(1978^{n-m}-1) = \text{πολ. } 1000 = \text{πολ } 8 \cdot 125.$$

Άρα πρέπει το 8 να διαιρεί το 1978^m, οπότε $m \geq 3$ και επιπλέον πρέπει το 125 να διαιρεί το $1978^{n-m} - 1$. Από το θεώρημα του Euler έχουμε $1978^{\varphi(125)} \equiv 1 (\text{mod } 125)$ και $\varphi(125) = 125 - 25 = 100$, οπότε θα έχουμε

$1978^{100} \equiv 1(\bmod 125)$. Έτσι για την ισοτιμία $1978^r \equiv 1(\bmod 125)$ το μικρότερο r θα πρέπει να είναι διαιρέτης του 100, αφού αν δεν ήταν τότε το υπόλοιπο διαιρούμενο με το 100 θα έδινε μικρότερο r. Έτσι ελέγχουμε τις εξής τιμές 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100. Παρατηρούμε γρήγορα ότι το μικρότερο s για την ισοτιμία $1978^s \equiv 1(\bmod s)$ είναι 4, οπότε πρέπει r = πολ. 4. Μένουν λοιπόν για εξέταση οι αριθμοί 4, 20, 100. Έχουμε
$1978^2 \equiv 109 \ (\bmod 125)$, οπότε $1978^4 \equiv 6(\bmod 125)$ και $1978^{20} \equiv 26(\bmod 125)$. Άρα το μικρότερο r είναι 100, οπότε η λύση στο πρόβλημα είναι m=3 και n=103.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Το P είναι ένα σημείο μέσα σε μια σφαίρα. Τρεις αμοιβαίως κάθετες ημιευθείες από το P τέμνουν τη σφαίρα στα σημεία U, V και W. Το Q υποδηλώνει την κορυφή διαγωνίως απέναντι από το P στο παραλληλεπίπεδο που προσδιορίζεται από τα PU, PV, PW. Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του Q για όλες τις δυνατές τριάδες τέτοιων ημιευθειών από το P.

Λύση

Έστω M το κέντρο του παραλληλεπιπέδου, O το κέντρο της σφαίρας και P το εσωτερικό της σημείο. Από το τρίγωνο OAW έχουμε

$$OA^2 + R^2 = 2OM^2 + \frac{AW^2}{2} \Leftrightarrow OA^2 + R^2 = 2OM^2 + \frac{b^2 + c^2 + \alpha^2}{2}, \qquad (1)$$

ενώ από το τρίγωνο OAP έχουμε

$$OA^2 + d^2 = 2OT^2 + \frac{PA^2}{2} \Leftrightarrow OA^2 + d^2 = 2OT^2 + \frac{b^2 + c^2}{2},$$

με $OT^2 = R^2 - \frac{b^2 + c^2}{2}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $O\overset{\Delta}{T}V$ έχουμε $TV = \frac{UV}{2}$ και $TV^2 = \frac{UV^2}{4}$. Άρα τελικά θα έχουμε:

$$OA^2 + d^2 = 2R^2 \qquad (2).$$

Αν από την (1) αφαιρέσουμε την (2) λαμβάνουμε

$$R^2 - d^2 = 2OM^2 + \frac{b^2 + c^2 + \alpha^2}{2} - 2R^2 \Leftrightarrow 2OM^2 = 3R^2 - d^2 - \frac{b^2 + c^2 + \alpha^2}{2} \quad (3).$$

Επιπλέον από το τρίγωνο PAW έχουμε

$$2PM^2 + \frac{b^2 + c^2 + \alpha^2}{2} = \alpha^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow 2PM^2 = \frac{b^2 + c^2 + \alpha^2}{2} \quad (4).$$

Από τις (3) και (4) με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$2OM^2 + 2PM^2 = 3R^2 - d^2 \Leftrightarrow OM^2 + PM^2 = \frac{3R^2 - d^2}{2}.$$

Άρα το M γράφει σφαίρα κέντρου H, όπου το H είναι μέσον του PO, και ακτίνας $x = \frac{\sqrt{3R^2 - 2d^2}}{2}$ (από Θ. διαμέσων στο $\overset{\Delta}{PMO}$). Επομένως η κορυφή Q θα γράφει σφαίρα κέντρου O και ακτίνας $\sqrt{3R^2 - 2d^2}$.

Σχήμα 76

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Το σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών είναι η ένωση δύο υποσυνόλων $\{f(1), f(2), f(3), \ldots\}$, $\{g(1), g(2), g(3), \ldots\}$, όπου $f(1) < f(2) < f(3) < \ldots$, και $g(1) < g(2) < g(3) < \ldots$ και $g(n) = f(f(n)) + 1$, για

$n = 1, 2, 3, \ldots$ Να προσδιορίστε το $f(240)$.

Λύση

Έστω $F = \{f(1), f(2), f(3), \ldots\}$, $G = \{g(1), g(2), g(3), \ldots\}$, $N_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Είναι $f(1) \geq 1$, έτσι $f(f(1)) \geq 1$ οπότε $g(1) \geq 2$. Έτσι το 1 δεν ανήκει στο G, οπότε πρέπει να ανήκει στο F. Θα πρέπει να είναι το μικρότερο στοιχείο του F και έτσι $f(1) = 1$, οπότε $g(1) = 2$. Δεν μπορούμε να έχουμε ποτέ διαδοχικούς ακεραίους n και n + 1 στο G, διότι αν $g(m) = n+1$, τότε $f(f(m)) = g(m) - 1 = n$ και έτσι το n είναι στο F και στο G, άτοπο. Ιδιαίτερα το 3 πρέπει να είναι στο F, και έτσι $f(2) = 3$.

Υποθέτουμε ότι $f(n) = \kappa$, οπότε $g(n) = f(\kappa) + 1$. Έτσι $|N_{f(\kappa)+1} \cap G| = n$. Αλλά $|N_{f(\kappa)+1} \cap F| = \kappa$, οπότε $n + \kappa = f(\kappa) + 1$ ή $f(\kappa) = n + \kappa - 1$, οπότε $g(n) = n + \kappa$. Έτσι το $n + \kappa + 1$ πρέπει να είναι στο F, οπότε $f(\kappa + 1) = n + \kappa + 1$. Επομένως όταν δίνεται η τιμής της f στο n, έστω $f(n) = \kappa$, τότε μπορούμε να βρούμε την τιμή της f στο κ και το $\kappa + 1$.

Χρησιμοποιώντας το κ + 1 κάθε φορά, βρίσκουμε διαδοχικά $f(2) = 3$, $f(4) = 6$, $f(7) = 11$, $f(12) = 19$, $f(20) = 32$, $f(33) = 53$, $f(54) = 87$, $f(88) = 142$, $f(143) = 231$, $f(232) = 375$, πράγμα που δεν βοηθάει και πολύ. Προσπαθώντας πάλι με το κ, έχουμε: $f(3) = 4$, $f(4) = 6$, $f(6) = 9$, $f(9) = 14$, $f(14) = 22$, $f(22) = 35$, $f(35) = 56$, $f(56) = 90$, $f(90) = 145$, $f(145) = 234$, $f(146) = 236$.

Και πάλι δεν είναι σωστό, οπότε πρέπει να προσπαθήσουμε ακόμα λίγο, χρησιμοποιώντας το $\kappa + 1$ οπότε θα έχουμε τελικά: $f(91) = 147$, $f(148) = 239$, $f(240) = 388$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{ABC}$ (AB = AC). Θεωρούμε κύκλο εφαπτόμενο εσωτερικά στον περιγεγραμμένο κύκλο και ταυτόχρονα στις AB, AC, στα P, Q αντίστοιχα. Δείξτε ότι το μέσο του PQ ταυτίζεται με το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο.

Λύση

Το μέσο M του PQ ανήκει, προφανώς, στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$. Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι το M ανήκει και στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$. Έστω ότι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο

στο R. Αφού $P\hat{R}Q$ είναι εγγεγραμμένη και $A\hat{P}Q$ η υπό της χορδής και εφαπτομένης στο P, PA θα έχουμε $P\hat{R}Q = A\hat{P}Q = A\hat{B}C$ ($PQ \parallel BC$). Το PBRM είναι εγγεγραμμένο τετράπλευρο αφού $P\hat{B}R = P\hat{M}R = 90^\circ$. Άρα $P\hat{B}M = P\hat{R}M = \frac{P\hat{R}Q}{2} = \frac{A\hat{B}C}{2}$.

Σχήμα 77

Σχόλιο: Η ύπαρξη του κύκλου που εφάπτεται εσωτερικά στον περιγεγραμμένο κύκλο και ταυτόχρονα στις AB, AC είναι γεγονός, αφού πρόκειται για εγγεγραμμένο κύκλο στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AST}$ όπου ST η εφαπτομένη ευθεία στον περιγεγραμμένο κύκλο με S σημείο της ευθείας AB και T σημείο της ευθείας AC.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

$\{a_\kappa\}$ είναι μία ακολουθία διακεκριμένων θετικών ακέραιων αριθμών. Να αποδείξετε ότι για όλους τους θετικούς ακέραιους ισχύει

$$\sum_{\kappa=1}^{n} \frac{a_\kappa}{\kappa^2} \geq \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{1}{\kappa}$$

Λύση

Χρησιμοποιούμε ένα γενικό αποτέλεσμα αναδιάταξης αριθμών:

Δεδομένων των $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$ και $c_1 \leq c_2 \leq ... \leq c_n$ αν $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

είναι μια μετάθεση του συνόλου $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, τότε

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \sum_{i=1}^{n} c_i b_i .$$

Για την απόδειξη αυτού, υποθέτουμε ότι $i < j$, αλλά $\alpha_i > \alpha_j$. Τότε εναλλάσσοντας το α_i και α_j δεν αυξάνεται το άθροισμα, γιατί $(\alpha_i - \alpha_j)(\beta_i - \beta_j) \geq 0$ και έτσι $\alpha_i\beta_i + \alpha_j\beta_j \geq \alpha_j\beta_i + \alpha_i\beta_j$. Με μια τέτοια σειρά εναλλαγών μετατρέπουμε το σύνολο $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ στο σύνολο $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$.

Έτσι δεν αυξάνουμε το άθροισμα θεωρώντας μια μετάθεση των a_κ έτσι ώστε να ισχύει $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, αφού επιπλέον είναι και διαφορετικοί ανά δύο. Τότε όμως θα ισχύει $a_\kappa \geq \kappa$, για κάθε $\kappa = 1, 2, \ldots, n$, οπότε θα έχουμε

$$\sum_{\kappa=1}^{n} \frac{a_\kappa}{\kappa^2} \geq \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{\kappa}{\kappa^2} = \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{1}{\kappa} .$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

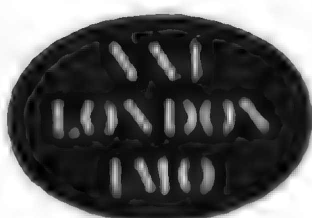
Μία διεθνής εταιρεία έχει τα μέλη της από έξι διαφορετικές χώρες. Ο κατάλογος των μελών έχει 1978 ονόματα, αριθμημένα 1, 2, 3, ..., 1978. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα μέλος του οποίου ο αριθμός να είναι το άθροισμα των αριθμών δύο μελών της δικής του χώρας, ή δύο φορές ο αριθμός ενός μέλους από την ίδια του τη χώρα.

Λύση

Καταρχήν υπενθυμίζουμε την αρχή του Dirichlet, ότι δηλαδή αν $\mu \cdot \nu + 1$ αντικείμενα, με $\nu \geq 1$ τοποθετηθούν σε μ διακεκριμένες θέσεις τότε υπάρχει τουλάχιστον μία θέση από αυτές που περιέχει $\mu + 1$ τουλάχιστον αντικείμενα (δες ΕΥΚΛΕΙΔΗ 34Β' – 1999 σελ. 28)

Έχουμε 6 χώρες. Έχω $1978 > 6.329 + 1$. Από την αρχή του Dirichlet τουλάχιστον 330 μέλη κατάγονται από την ίδια χώρα, έστω την C_1. Έστω οι αριθμοί των μελών αυτών έχουν τη διάταξη $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{330}$. Ας πάρουμε τις 329 διαφορές $\alpha_2 - \alpha_1$, $\alpha_3 - \alpha_1$, ..., $\alpha_{330} - \alpha_1$. Εάν κάποια από αυτές είναι στο C_1, τότε ισχύει το ζητούμενο. Ας υποθέσουμε ότι είναι όλες στις άλλες πέντε χώρες. Τουλάχιστον 66 πρέπει να κατάγονται από την ίδια χώρα, έστω την C_2. Γράφουμε τα 66 μέλη της C_2 διατεταγμένα ως

$\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_{66}$. Τώρα από τις 65 διαφορές $\beta_2 - \beta_1$, $\beta_3 - \beta_1, \ldots, \beta_{66} - \beta_1$, εάν κάποια είναι στο C_2 τότε ισχύει το ζητούμενο. Αλλά η κάθε διαφορά ισούται με τη διαφορά δύο από τα αρχικά α_i, οπότε αν είναι μέσα στο C_1 πάλι ισχύει το ζητούμενο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι όλες οι διαφορές ανήκουν στις άλλες τέσσερις χώρες. Τουλάχιστον 17 πρέπει να κατάγονται από την ίδια χώρα, έστω την C_3 . Γράφουμε τα 17 μέλη ως $c_1 < c_2 < \ldots < c_{17}$. Τώρα, αν από τις 16 διαφορές $c_2 - c_1$, $c_3 - c_1, \ldots, c_{17} - c_1$ είναι κάποια από αυτές στο C_3 τότε ισχύει το ζητούμενο. Επειδή η κάθε διαφορά ισούται με τη διαφορά δυο β_i, αν κάποια από αυτές είναι στο C_2, πάλι ισχύει το ζητούμενο. Κάθε διαφορά επίσης ισούται με τη διαφορά δύο α_i, οπότε αν κάποια από αυτές είναι στο C_1, τότε πάλι ισχύει το ζητούμενο. (Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα $c_2 - c_1$ όπως πριν. Υποθέτουμε ότι $\beta_n = \alpha_j - \alpha_1$, $\beta_m = \alpha_\kappa - \alpha_1$. Τότε $c_i - c_1 = \beta_n - \beta_m = \alpha_j - \alpha_\kappa$, όπως απαιτείται). Έτσι, ας υποθέσουμε ότι είναι όλοι στις άλλες τρεις χώρες. Τουλάχιστον 6 θα πρέπει να κατάγονται από την ίδια χώρα, έστω την C_4. Κοιτάμε τις 5 διαφορές και συμπεραίνουμε με τον ίδιο τρόπο ότι τουλάχιστον 3 πρέπει να κατάγονται από το C_5 . Τώρα οι 2 διαφορές πρέπει να είναι και οι δύο στο C_6 και η διαφορά τους πρέπει να είναι σε ένα από τα C_1 , $C_2, \ldots, C_6$ δίνοντάς μας το ζητούμενο αποτέλεσμα.



21^{η} Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1979

Τόπος Διοργάνωσης: Ηνωμ. Βασίλειο – Β. Ιρλανδία (Λονδίνο)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών: J.F. Fletcher (Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης)
Συμμετοχή: 23 χώρες με 8 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες Συμμετοχές: Βραζιλία, Ισραήλ, Λουξεμβούργο
Μέγιστη Βαθμολογία: 40 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες: Σοβ. Ένωση (267), Ρουμανία (240), Δυτ. Γερμανία (235), Ηνωμ. Βασίλειο (218), Η.Π.Α. (199), Αν. Γερμανία (180), Τσεχοσλοβακία (178), Ουγγαρία (176).

Η Ελληνική ομάδα συμμετείχε με τους μαθητές: Δ. Αντιβάχη, Π. Αυγουστίνο, Α. Κούγκουλο, Γ. Κουνδουράκη, Ι. Λυκοτραφίτη, Ι. Νικολόπουλο, Α. Σταματέλο και Β. Περαντώνη. Ο Αρχηγός της ομάδας ήταν ο κ. Ιωάννης Μερμήγκης και ο υπαρχηγός ο κ. Θεόδωρος Εξαρχάκος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω ότι το m και το n είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί έτσι ώστε: $\frac{m}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$. Να αποδείξετε ότι το m διαιρείται από το 1979.

Λύση

Έστω $A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{1319}$ και $B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1318}$. Τότε έχουμε

$\frac{m}{n} = A - B$ (ξεχωρίζουμε θετικούς – αρνητικούς όρους)

$= (A + B) - 2B$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1319}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{659}\right)$$

$$=\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\ldots+\frac{1}{1319},$$

και παρατηρούμε ότι $660+1319=1979$, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{1}{660}+\frac{1}{1319}=\frac{1979}{(660\cdot 1319)},\ \frac{1}{661}+\frac{1}{1318}=\frac{1979}{(661\cdot 1318)} \text{ κλπ.}$$

Άρα θα έχουμε

$$\frac{m}{n}=\left(\frac{1}{660}+\frac{1}{1319}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{989}+\frac{1}{990}\right)$$

$$=\frac{1979}{660\cdot 1319}+\frac{1979}{661\cdot 1318}+\cdots+\frac{1979}{989\cdot 990}$$

$$=\frac{1979\cdot n_0}{660\cdot 661\cdots 1319},$$

όπου ο n_0 είναι θετικός ακέραιος.

Από την παραπάνω ισότητα προκύπτει ότι

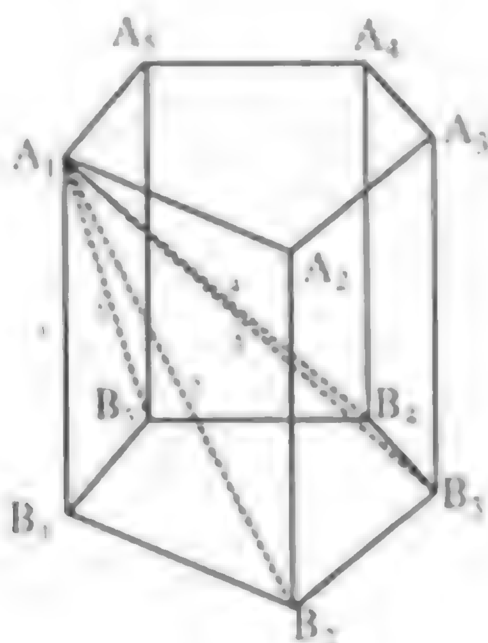
$$1979nn_0=660\cdot 661\cdots 1318\cdot m,$$

από την οποία, αφού ο 1979 είναι πρώτος και δεν διαιρεί κανέναν από τους αριθμούς 660, 661, ..., 1318, έχουμε ότι $1979\,|\,m$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται ένα πρίσμα με άνω και κάτω έδρες τα πεντάγωνα $A_1A_2A_3A_4A_5$ και $B_1B_2B_3B_4B_5$. Κάθε πλευρά των δύο πενταγώνων και κάθε ένα από τα 25 ευθύγραμμα τμήματα A_iB_j είναι χρωματισμένα κόκκινα ή πράσινα. Κάθε τρίγωνο του οποίου οι κορυφές είναι και κορυφές του πρίσματος και του οποίου οι πλευρές έχουν όλες χρωματιστεί, έχει δύο πλευρές διαφορετικού χρώματος. Αποδείξτε ότι όλες οι 10 πλευρές της πάνω και της κάτω έδρας έχουν το ίδιο χρώμα.

Λύση



Σχήμα 78

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι όλα τα A_i έχουν το ίδιο χρώμα. Αν όχι, τότε υπάρχει μία κορυφή, ονομάστε την A_1, με ακμές A_1A_2, A_1A_5 του αντίθετου χρώματος. Τώρα θεωρείτε τις πέντε ακμές A_1B_i. Τουλάχιστον τρεις από αυτές πρέπει να έχουν το ίδιο χρώμα. Υποθέτουμε ότι είναι πράσινο το χρώμα και ότι A_1A_2 είναι επίσης πράσινο. Έστω ότι οι τρεις ακμές είναι A_1B_i, A_1B_j, A_1B_k. Έπειτα θεωρώντας τα τρίγωνα A_1A_2Bi, A_1A_2Bj, $A_1A_2B\kappa$, οι τρεις ακμές A_2B_i, A_2B_j, A_2B_k πρέπει να είναι όλες κόκκινες. Δύο από τις B_i, B_j, B_k πρέπει να είναι προσκείμενες, αλλά αν η ακμή που προκύπτει είναι κόκκινη, έχουμε ένα κατακόκκινο τρίγωνο με A_2 ενώ αν είναι πράσινη, έχουμε ένα καταπράσινο τρίγωνο με A_1, άτοπο.

Έτσι τα A_i είναι όλα το ίδιο χρώμα. Ομοίως, τα Bi είναι όλα το ίδιο χρώμα. Παραμένει να δείξουμε ότι τα A_i και B_i έχουν το ίδιο χρώμα. Έστω ότι τα A_i είναι πράσινα και τα B_i είναι κόκκινα. Τώρα αιτιολογούμε όπως πριν ότι 3 από τις 5 ακμές A_1B_i πρέπει να έχουν το ίδιο χρώμα. Αν είναι κόκκινες, τότε όπως πριν 2 από τα 3 B_i πρέπει να είναι προσκείμενα και αυτό δίνει ένα κατακόκκινο τρίγωνο με τρίτη κορυφή το A_1. Έτσι, 3 από τις 5 ακμές A_1Bi πρέπει να είναι πράσινες. Ομοίως, 3 από τις 5 ακμές A_2B_i πρέπει να είναι πράσινες. Επομένως πρέπει να υπάρχει ένα B_i που να βρίσκεται και στα δύο σύνολα και σχηματίζει ένα καταπράσινο τρίγωνο με τις κορυφές A_1 και A_2, άτοπο.

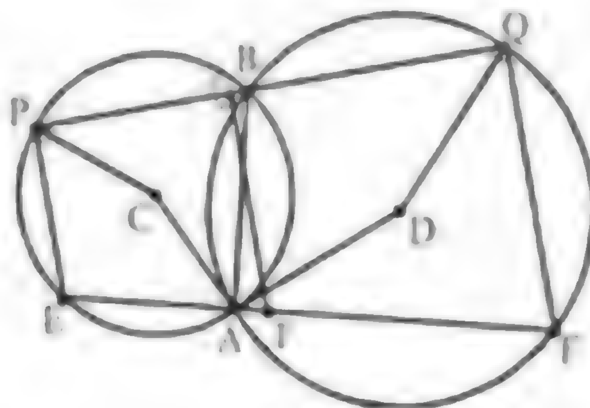
Άρα τα A_i και B_i έχουν όλα το ίδιο χρώμα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω δύο τεμνόμενοι κύκλοι του αυτού επιπέδου. Το A είναι το ένα από τα σημεία τομής. Με αφετηρία το A ξεκινούν ταυτόχρονα δύο σημεία κινούμενα με σταθερή ταχύτητα, το καθένα κατά μήκος του δικού

του κύκλου με την ίδια φορά. Τα δύο σημεία επιστρέφουν στο A ταυτόχρονα μετά από μία περιστροφή. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα σταθερό σημείο T το επιπέδου έτσι ώστε τα δύο σημεία να ισαπέχουν πάντα από το T.

Λύση



Σχήμα 79

Έστω E σημείο του κύκλου K_1 και F σημείο του κύκλου K_2, ώστε $EF \perp AB$ (B το δεύτερο σημείο τομής των κύκλων). Έστω ότι το κινούμενο σημείο του κύκλου K_1 είναι στο P και το αντίστοιχο του κύκλου K_2, έστω ότι είναι στο Q. Τότε

$$A\hat{B}P = \frac{A\hat{C}P}{2} = \frac{A\hat{D}Q}{2} = A\hat{F}Q.$$

Άρα θα έχουμε

$$A\hat{B}Q = 180^\circ - A\hat{F}Q = 180^\circ - A\hat{B}P,$$

οπότε τα σημεία P, A, B θα είναι συνευθειακά.

Επίσης, $B\hat{P}E = 180^\circ - B\hat{A}E = 90^\circ$ (βαίνει σε ημικύκλιο) και $B\hat{Q}F = 180^\circ - B\hat{A}F = 90^\circ$. Επομένως οι κάθετες στο PQ στα άκρα του τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα EF στα άκρα του. Άρα η κάθετος στο PQ στο μέσο του συναντά το EF στο μέσο του. Έτσι το P και Q ισαπέχουν από το μέσο του EF.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται ένα επίπεδο (κ), ένα σημείο P του επιπέδου (κ) και ένα σημείο Q που δεν ανήκει στο επίπεδο (κ). Βρείτε όλα τα σημεία R του επιπέδου (κ), που είναι τέτοια ώστε ο λόγος $\frac{QP + PR}{QR}$ να λαμβάνει τη μέγιστη δυνατή τιμή.

Λύση

Θα παραθέσουμε πρώτα δύο βοηθητικές προτάσεις:

Λήμμα 1: Έστω επίπεδο (κ) και ένας κύκλος που ανήκει σε αυτό (O, R). Θεωρούμε σημείο που δεν ανήκει στο (κ), έστω A. Αν M είναι σημείο που κινείται στον κύκλο (κ), βρείτε τη θέση του ώστε το AM να είναι:

i) μέγιστο, ii) ελάχιστο

Σχήμα 80

Απόδειξη

i) Έστω $AB \perp (\kappa)$ με $B \not\equiv O$. Είναι προφανές ότι:

AM μέγιστο (αντ. ελάχιστο)$\Leftrightarrow$ BM μέγιστο (αντ. ελάχιστο).

Επειδή ισχύει $|BO - R| \leq BM \leq BO + R$, θα έχουμε ότι:

$$BM \text{ ελάχιστο } \Leftrightarrow M \equiv \Sigma_1$$

$$BM \text{ μέγιστο } \Leftrightarrow M \equiv \Sigma_2$$

ii) Αν $B \equiv O$ τότε το AM είναι σταθερό, αφού $AM^2 = AB^2 + R^2$.

Λήμμα 2: Έστω γωνία $x\hat{O}y < 90^\circ$. Θεωρούμε σταθερό σημείο A της Ox. Να προσδιοριστεί η θέση σημείου M της Oy ώστε $\frac{MO}{MA}$ να είναι το μέγιστο δυνατό.

Απόδειξη

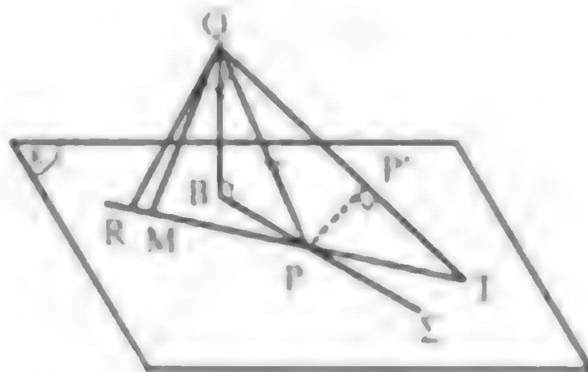
Θεωρώ $MM' \perp x'x$. Καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης του M το $\overset{\Delta}{OMM'}$ παραμένει όμοιο προς εαυτόν αφού είναι πάντοτε ορθογώνιο με σταθερή την $\hat{O}$. Άρα $\frac{OM}{MM'} = \lambda$, όπου λ σταθερή τιμή ($\lambda > 1$). Επομένως,

$OM = \lambda \cdot MM'$. Έχουμε, λοιπόν, την αναζήτηση του M, ώστε $\frac{\lambda \cdot MM'}{MA}$ μέγιστο ή ισοδύναμα $\frac{MM'}{MA}$ μέγιστο, το οποίο συμβαίνει όταν το M΄ ταυτίζεται με το A.



Σχήμα 81

Έστω T ένα τυχαίο σημείο του (κ), ώστε PT = PQ, οπότε PQ + PR = TR. Από το ισοσκελές τρίγωνο το $\frac{TR}{RQ}$ γίνεται μέγιστο αν $R \equiv M$, όπου M σημείο της ευθείας PT και $MQ \perp QT$. Για να γίνει ο λόγος $\frac{MT}{MQ} = \frac{RT}{RQ}$ μέγιστος ή ισοδύναμα $\frac{PQ}{PP'}$ μέγιστος, αρκεί PP΄ ελάχιστο, δηλαδή αρκεί QT μέγιστο, δηλαδή το T ταυτίζεται με το Σ όπου PΣ = PT = PQ με $AB \perp (\kappa)$ και Σ στην αντικείμενη ημιευθεία της PB (δες Λήμμα (α)). Άρα το R ταυτίζεται με το συμμετρικό του Σ ως προς το P (για τη χρησιμοποίηση του προβλήματος (α), ας θεωρήσουμε κύκλο κέντρου P και ακτίνας QP, οπότε PΣ = PT = QP)



Σχήμα 82

Προφανώς, αν $B \equiv P$ τότε τα ζητούμενα σημεία είναι εκείνα του κύκλου κέντρου P και ακτίνας PQ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Βρείτε όλους τους πραγματικούς αριθμούς α για τους οποίους υπάρχουν μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 που επαληθεύουν το σύστημα:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = a$$
$$x_1 + 2^3x_2 + 3^3x_3 + 4^3x_4 + 5^3x_5 = a^2$$
$$x_1 + 2^5x_2 + 3^5x_3 + 4^5x_4 + 5^5x_5 = a^3$$

Λύση

Αν $a \neq 0$ πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί a^2, την δεύτερη εξίσωση επί $-2a$, την τρίτη επί 1 και τις προσθέτουμε κατά μέλη οπότε λαμβάνουμε

$$a^2\sum_{\kappa=1}^{5}\kappa x_\kappa - 2a\sum_{\kappa=1}^{5}\kappa^3 x_\kappa + \sum_{\kappa=1}^{5}\kappa^5 x_\kappa = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\kappa=1}^{5}\kappa x_\kappa\left(a^2 - 2a\kappa^2 + \kappa^4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\kappa=1}^{5}\kappa x_\kappa \cdot \left(\kappa^2 - a\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1^2 - a\right)^2 x_1 + \left(2^2 - a\right)^2 x_2 + \left(3^2 - a\right)^2 x_3 + \left(4^2 - a\right)^2 x_4 + \left(5^2 - a\right)^2 x_5 = 0$$

Επειδή οι πραγματικοί αριθμοί x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 είναι μη αρνητικοί, το αριστερό μέλος της τελευταίας ισότητας είναι άθροισμα μη αρνητικών όρων. Επομένως, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με το σύστημα (ως προς a)

$$\left(\kappa^2 - a\right)^2 \cdot x_\kappa = 0, \ \kappa = 1,2,3,4,5,$$

το οποίο έχει τις λύσεις:

$a = 1$, αν $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$, ή

$a = 4$, αν $x_3 = x_4 = x_5 = x_1 = 0$, ή

$a = 9$, αν $x_4 = x_5 = x_1 = x_2 = 0$, ή

$a = 16$, αν $x_5 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$, ή

$a = 25$, αν $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Επιπλέον το $a = 0$, είναι λύση, αν $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

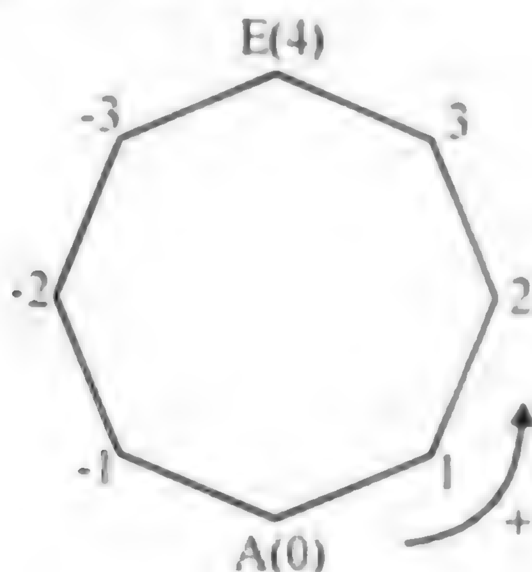
Έστω ότι το Α και Ε είναι αντίθετες κορυφές ενός οκταγώνου. Ένας βάτραχος ξεκινάει από τη γωνία Α. Από οποιαδήποτε γωνία εκτός της Ε πηδάει προς μια από τις δύο προσκείμενες γωνίες. Όταν φτάνει στην Ε, σταματά. Έστω ότι το a_n είναι ο αριθμός των διακεκριμένων διαδρομών n ακριβώς αλμάτων που καταλήγουν στο Ε. Να αποδείξετε ότι:

$$a_{2n-1} = 0 \text{ και } a_{2n} = \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^{n-1} - \left(2-\sqrt{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{2}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Λύση

Ο βάτραχος που ξεκινάει από το Α με 4 διαδοχικά άλματα προς τα εμπρός καταλήγει στην κορυφή Ε. Αν σε κάποια κορυφή κάνει κάποιο άλμα προς τα πίσω, θα καταλήξει τελικά στην κορυφή Ε σε 6 ή 8 ή γενικότερα σε 2n άλματα, δηλαδή σε άρτιο αριθμό αλμάτων.

Άρα θα έχουμε $a_{2n-1} = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.



Σχήμα 83

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε μια αναδρομική σχέση για τον a_{2n}. Αριθμούμε τις κορυφές του οκταγώνου, όπως στο παραπάνω σχήμα. Όσες διαδρομές με n ακριβώς άλματα υπάρχουν από το Α προς το Ε μέσω των κορυφών 1, 2, 3, άλλες τόσες υπάρχουν και μέσω των κορυφών –1, –2, –3. Έτσι, αν ονομάσουμε V_{2n} τον αριθμό των διαδρομών από το Α στο Ε μέσω των κορυφών 1, 2, 3, που έχουν n ακριβώς άλματα, τότε θα έχουμε:

$$\alpha_{2n} = 2V_{2n},\ n = 2,3,\ldots,$$

και θα ασχοληθούμε μόνο με διαδρομές θετικής φοράς.

Είναι φανερό ότι από κάθε διαδρομή από το Α προς το Ε με 2n ακριβώς άλματα με 2 επιπλέον άλματα, ένα πίσω και ένα εμπρός, μπορεί να προκύψει μία διαδρομή με $2n+2$ άλματα. Αυτό μπορεί να γίνει στις κορυφές 0, 1, 2 και 3, οπότε από κάθε διαδρομή με 2n άλματα προκύπτουν συνολικά 4 διαδρομές με $2n+2$ άλματα. Όμως με την παραπάνω διαδικασία είναι δυνατόν από διαφορετικές διαδρομές με 2n άλματα μπορούν να προκύψουν κοινές διαδρομές με $2n+2$ άλματα. Αυτές είναι πλήθους $2V_{2n-2}$, αφού από κάθε μία διαδρομή με $2n-2$ άλματα μπορούν να προκύψουν 2 διαδρομές με $2n+2$ άλματα που είναι κοινές με τις προηγούμενες. Αυτές είναι οι προκύπτουσες με 2 διαδοχικά άλματα πίσω και στη συνέχεια με 2 διαδοχικά άλματα εμπρός, με αρχή τις κορυφές 2 και 3. Έτσι έχουμε την αναδρομική σχέση

$$V_{2n+2} = 4V_{2n} - 2V_{2n-2},\ n = 2,3,\ldots,$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$\alpha_{2n+2} = 4\alpha_{2n} - 2\alpha_{2n-2},\ n = 2,3,\ldots,$$

ή ισοδύναμα

$$\alpha_{2n+4} = 4\alpha_{2n+2} - 2\alpha_{2n},\ n = 1,2,\ldots,$$

η οποία είναι αναδρομική σχέση δεύτερης τάξης. Εύκολα βρίσκουμε ότι $\alpha_4 = 2$ [οι διαδρομές (1, 2, 3, 4), (-1, -2, -3, 4)] και $\alpha_2 = 0$.

Αν θέσουμε $x_n = \alpha_{2n},\ n = 1,2,\ldots,$ τότε θα έχουμε

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - 2x_n,\ n = 1,2,\ldots,$$

με $x_1 = 0,\ x_2 = 2$, η οποία έχει χαρακτηριστική εξίσωση

$$\omega^2 - 4\omega + 2 = 0$$

με ρίζες $\omega_1 = 2+\sqrt{2}$ ή $\omega_2 = 2-\sqrt{2}$. Έτσι ο γενικός όρος της ακολουθίας x_n μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$x_n = c_1\left(2+\sqrt{2}\right)^n + c_2\left(2-\sqrt{2}\right)^n,\ n = 1,2,\ldots,$$

από την οποία με χρήση των τιμών $x_1 = 0$ και $x_2 = 2$ έχουμε

$$\left.\begin{cases} c_1\left(2+\sqrt{2}\right)+c_2\left(2-\sqrt{2}\right)=0 \\ c_1\left(2+\sqrt{2}\right)^2+c_2\left(2-\sqrt{2}\right)^2=2 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} c_1 &= \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \\ c_2 &= -\frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \end{aligned}\right\}.$$

Άρα έχουμε τελικά

$$\alpha_{2n} = x_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(2+\sqrt{2}\right)^{n-1} - \left(2-\sqrt{2}\right)^{n-1}\right], \ n = 1, 2, \dots$$



22$^{\eta}$ Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1981

Τόπος Διοργάνωσης:	Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής (Ουάσιγκτον)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	Καθηγητής S. Greitzer (Rutgers Univ.)
Συμμετοχή:	27 χώρες με 8 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες Συμμετοχές:	Αυστραλία, Καναδάς, Κολομβία, Μεξικό, Τυνησία, Βενεζουέλα.
Μέγιστη Βαθμολογία:	42 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες:	Η.Π.Α. (314), Δυτ. Γερμανία (312), Ηνωμ. Βασίλειο (301), Αυστρία (290), Βουλγαρία (287), Πολωνία (259), Καναδάς (249), Γιουγκοσλαβία (246).

Η Ελληνική ομάδα συμμετείχε και ήταν 22$^{\eta}$ στη τελική βαθμολογία.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

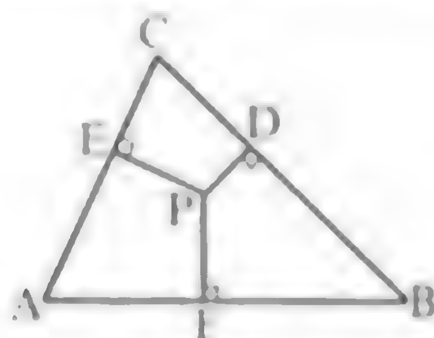
Το P είναι ένα σημείο μέσα στο τρίγωνο ABC. Τα D, E, F είναι τα ίχνη των καθέτων από το P στις ευθείες BC, CA, AB αντίστοιχα. Βρείτε όλα τα P για τα οποία το άθροισμα $\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$ γίνεται ελάχιστο.

Λύση

Έχουμε PD·BC + BE·CA + PF·AB = 2(ABC). Τώρα χρησιμοποιούμε την ανισότητα του Cauchy με

$$x_1=\sqrt{(PD\cdot BC)},\ x_2=\sqrt{(PE\cdot CA)},\ x_3=\sqrt{(PF\cdot AB)}\ \text{και}$$

$$y_1=\sqrt{\left(\frac{BC}{PD}\right)},\ y_2=\sqrt{\left(\frac{CA}{PE}\right)},\ y_3=\sqrt{\left(\frac{AB}{PF}\right)}.$$



Σχήμα 84

Έχουμε

$$\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\cdot\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)\geq\left(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(ABC)\cdot\left(\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}\right)\geq(BC+CA+AB)^2.$$

Άρα το ελάχιστο του αθροίσματος $\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$ προκύπτει όταν στην παραπάνω σχέση ισχύει η ισότητα. Αυτό συμβαίνει όταν οι λόγοι $\frac{x_i}{y_i}$, $i=1,2,3$ είναι ίσοι, δηλαδή όταν $PD=PE=PF$, που αυτό σημαίνει ότι το P πρέπει να είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Θεωρούμε r τέτοιο ώστε $1\leq r\leq n$ και όλα τα υποσύνολα με r στοιχεία του συνόλου {1, 2, ..., n}. Κάθε υποσύνολο έχει ένα ελάχιστο στοιχείο. Έστω ότι F(n, r) είναι ο αριθμητικός μέσος αυτών των ελάχιστων στοιχείων. Να αποδείξετε ότι:

$$F(n,r)=\frac{(n+1)}{(r+1)}$$

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε το γνωστό σύμβολο των συνδυασμών n ανά r

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Προφανώς έχουμε

$$\binom{n}{r}F(n,r)=\binom{n-1}{r-1}\cdot 1+\binom{n-2}{r-1}\cdot 2+\cdots+\binom{r-1}{r-1}\cdot(n-r+1) \qquad (1)$$

[Ο πρώτος όρος εκφράζει τη συμβολή από υποσύνολα με μικρότερο στοιχείο το 1, ο δεύτερος όρος με μικρότερο στοιχείο το 2 κλπ.]

Έστω ότι το δεύτερο μέλος της (1) είναι $g(n,r)$.

Τότε, χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\binom{n-i}{r-1}-\binom{n-i-1}{r-2}=\binom{n-i-1}{r-1},$$

βρίσκουμε ότι

$$g(n,r)-g(n-1,\ r-1)=g(n-1,r)$$

η οποία ισχύει και για $r=1$, αν πάρουμε $g(n,0)=n+1=\binom{n+1}{1}$.

Όμως έχουμε

$$g(n,1)=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=\binom{n+1}{2}.$$

Έτσι τώρα ακολουθεί μια εύκολη επαγωγή, από την οποία προκύπτει

$$g(n,r)=\binom{n+1}{r+1},$$

οπότε θα έχουμε

$$f(n,r)=\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}}=\frac{n+1}{r+1}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Προσδιορίστε τη μέγιστη τιμή του αθροίσματος m^2+n^2, όπου τα m, n είναι ακέραιοι αριθμοί από τους 1, 2, 3,..., 1981 που επαληθεύουν την ισότητα $(n^2-m\cdot n-m^2)^2=1$.

Βοηθητικές γνώσεις

Ακολουθία του Fibonacci ονομάζεται η ακολουθία που ορίζεται ως εξής: $x_1=x_2=1$, με $x_\nu=x_{\nu-1}+x_{\nu-2}$ $\forall\ \nu\in\mathbb{N}-\{0,1,2\}$ έχει χαρακτηριστική εξίσωση την $\varphi^2=\varphi+1$ με ρίζες τις $\varphi_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}2}{2}$. Τελικά έχουμε $x_\nu=\dfrac{\sqrt{5}}{5}(\varphi_1^{\ \nu}-\varphi_2^{\ \nu})$. Έχει τις εξής ιδιότητες:

1) $x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu = x_{\nu+2} - 1, \forall \nu \in \mathbb{N} - \{0\}$

2) $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\nu^2 = x_\nu \cdot x_{\nu-1}, \forall \nu \in \mathbb{N} - \{0\}$

3) $x_3 + x_6 + \cdots + x_{3\nu} = \frac{x_{3\nu+2} - 1}{2}, \forall \nu \in \mathbb{N} - \{0\}$

4) Έστω $\mu \in \{2, 3, 4, \ldots\}$ και $\nu \in \mathbb{N} - \{0\}$ τότε $x_{\mu+\nu} = x_{\mu-1}x_\nu + x_\mu x_{\nu+1}$.

5) Έστω $\mu, \nu \in \mathbb{N} - \{0\}$ και $\mu \mid \nu$, τότε $x_\mu \mid x_\nu$.

6) Δύο διαδοχικοί όροι της είναι αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους.

7) Αν $\mu, \nu \in \mathbb{N} - \{0\}$ και $(\mu, \nu) = \delta$, τότε $(x_\mu, x_\nu) = x_\delta$.

8) Αν x_ν, $x_{\nu+1}$, $x_{\nu+2}$ είναι τρεις διαδοχικοί όροι της, τότε ισχύει ότι: $x^2_{\nu+1} - x_\nu \cdot x_{\nu+1} - x^2_\nu = (-1)^\nu$

9) Ο όρος της x_ν είναι ο πλησιέστερος ακέραιος προς τον ν-οστό όρο γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο τον $\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ και λόγο $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Λύση

Δίνοντας μικρές τιμές στις m, n καταλαβαίνουμε ότι οι λύσεις του $|n^2 - n \cdot m - m^2| = 1$ είναι διαδοχικοί όροι της ακολουθίας του Fibonacci. Έστω μία λύση (n, m) με n > m. Παρατηρούμε ότι (m + n, n) είναι μία άλλη λύση. Άρα από (2, 1) έχουμε (3, 2), (5, 3), (8, 5), (13, 8), (21, 13), (34, 21), (55, 34), (89, 55), (144, 89), (233, 144), (377, 233), (610, 377), (987, 610), (1597, 987), (2584, 1597). Έστω τώρα από τη λύση (n, m) με n > m και ας δοκιμάσουμε το ζεύγος $(n, n-m)$.

Τότε $m^2 - m(n - m) - (n - m)^2 = m^2 + m \cdot n - n^2 = 1$ ή -1, οπότε έχουμε επαλήθευση της εξίσωσης.

Έστω, επίσης, m > 1, οπότε m > n - m (Αν $m \le n - m$, τότε $n \ge 2m$

και $n(n - m) \ge 2m^2 \Rightarrow n^2 - n \cdot m - m^2 \ge m^2 > 1$).

Άρα με δεδομένη τη λύση n > m με m > 1 έχουμε και τη λύση $(m, n-m)$ με m > n - m. Η διαδικασία αυτή θα τελειώσει σε μία λύση (n,

1) με n > 1. Αλλά η μόνη τέτοια λύση είναι (2, 1). Η αρχική λύση θα είναι στην ακολουθία (2, 1), (3, 2), ..., (2584, 1597), ...

Τελικά η μέγιστη τιμή είναι η $1597^2 + 987^2$, αφού 2584 > 1981.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

α) Για ποιο n > 2 υπάρχει σύνολο n διαδοχικών θετικών ακεραίων αριθμών, έτσι ώστε ο μεγαλύτερος αριθμός στο σύνολο να είναι διαιρέτης του ελάχιστου κοινού πολλαπλασίου των υπολοίπων n – 1 αριθμών;

β) Για ποιο n > 2 υπάρχει ακριβώς ένα σύνολο, που να έχει αυτή την ιδιότητα;

Λύση

α) n = 3 δεν είναι δυνατό. Γιατί, αν υποθέσουμε ότι ο x είναι ο μεγαλύτερος αριθμός στο σύνολο, τότε ο x δεν μπορεί να είναι διαιρετός από το 3 ή από οποιονδήποτε μεγαλύτερο πρώτο αριθμό, οπότε πρέπει να είναι δύναμη του 2. Αλλά, δεν μπορεί να είναι δύναμη του 2, γιατί $2^m - 1$ είναι περιττό και $2^m - 2$ δεν είναι θετικός ακέραιος αριθμός διαιρετός από το 2^m.

Για το $\kappa \geq 2$, το σύνολο $\{2\kappa-1, 2\kappa, ..., 4\kappa-2\}$ δίνει n = 2κ.

Για το $\kappa \geq 3$, το σύνολο $\{2\kappa-5, 2\kappa-4, \ldots, 4\kappa-6\}$ δίνει πάλι $n = 2\kappa$.

Για το $\kappa \geq 2$, το σύνολο $\{2\kappa-2, 2\kappa-3, \ldots, 4\kappa-2\}$ δίνει $n = 2\kappa + 1$.

Για το $\kappa \geq 4$, το σύνολο $\{2\kappa-6, 2\kappa-5, \ldots, 4\kappa-6\}$ δίνει πάλι $n = 2\kappa+1$.

Έτσι έχουμε τουλάχιστον ένα σύνολο για κάθε $n \geq 4$.

β) Επίσης, έχουμε τουλάχιστον δύο σύνολα για κάθε $n \geqslant 4$ εκτός ίσως από το n = 4, 5, 7. Για το 5 μπορούμε να πάρουμε ως δεύτερο σύνολο: $\{8, 9, 10, 11, 12\}$ και για το 7 μπορούμε να πάρουμε $\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Μένει να εξετάσουμε την περίπτωση για n = 4. Υποθέτουμε ότι x είναι ο μεγαλύτερος αριθμός σ' ένα σύνολο $\{x, x-1, x-2, x-3\}$ με n = 4. Το x δεν μπορεί να είναι διαιρετό από το 5 ή από οποιονδήποτε μεγαλύτερο πρώτο αριθμό, επειδή τότε οι αριθμοί x – 1, x – 2, x – 3 δεν διαιρούνται με ο 5 ή το μεγαλύτερο πρώτο. Επιπλέον, το x δεν μπορεί να είναι διαιρετό από το 4, γιατί τότε x – 1 και x – 3 θα είναι περιττοί, και x – 2 διαιρετό μόνο από το 2 (όχι το 4). Ομοίως, δεν μπορεί να είναι διαιρετό από το 9.

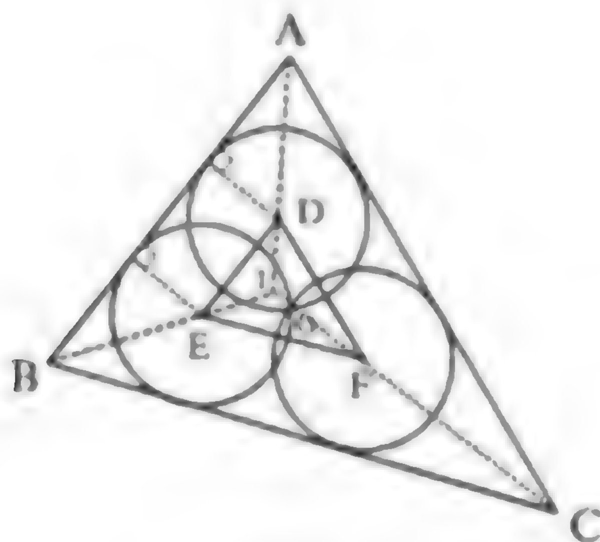
Άρα πρέπει $x \in \{1, 2, 3, 6\}$. Όμως επίσης πρέπει $x \geq 4$, το οποίο αποκλείει τις τρεις πρώτες τιμές. Έτσι, η μόνη λύση για το n = 4 είναι αυτή που

έχουμε ήδη βρει, δηλαδή το σύνολο $\{3,4,5,6\}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Τρεις κύκλοι ίσων ακτίνων έχουν κοινό σημείο O και ευρίσκονται μέσα σε δεδομένο τρίγωνο. Ο κάθε ένας κύκλος εφάπτεται σε ένα ζεύγος πλευρών του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι το κέντρο του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου, του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου και το O βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Λύση



Σχήμα 85

Έστω ότι το τρίγωνο είναι το ABC. Έστω ότι το κέντρο του κύκλου που εφάπτεται στις AB και BC είναι το D, το κέντρο του κύκλου που εφάπτεται στις AB και BC είναι το E και το κέντρο του κύκλου που εφάπτεται στις AC και BC είναι το F. Οι κύκλοι με κέντρα D και E έχουν την ίδια ακτίνα, οπότε τα D και E ισαπέχουν από την AB και $DE \parallel AB$. Ομοίως $DF \parallel AC$ και $EF \parallel BC$. Είναι σαφές ότι το τρίγωνο $\overset{\Delta}{ABC}$ είναι ομοιόθετο προς το $\overset{\Delta}{DEF}$ με κέντρο ομοιοθεσίας το έκκεντρο I (σημείο τομής των διχοτόμων). Και επιπλέον DI, FI, EI διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{EDF}$, $\widehat{DFE}$, $\widehat{FED}$ αντιστοίχως. Το I λειτουργεί ως κέντρο συμμετρίας οπότε τα αντίστοιχα σημεία P του $\overset{\Delta}{ABC}$ και P΄ του $\overset{\Delta}{DEF}$ βρίσκονται σε μία ευθεία με το I έτσι ώστε ο $\frac{PI}{P'I}$ να είναι σταθερός λόγος. Όμως, από υπόθεση, $OD = OE = OF$, οπότε το O θα είναι περίκεντρο του $\overset{\Delta}{DEF}$. Επομένως το O θα ανήκει στην

ίδια ευθεία με το I και το κέντρο του περιγεγραμμένου περί το $\overset{\Delta}{ABC}$ κύκλου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Η συνάρτηση f(x, y) ικανοποιεί τις ισότητες

$$f(0, y) = y + 1,\ f(x + 1, 0) = f(x, 1),\ f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$$

για όλους τους μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς x, y. Βρείτε την τιμή f(4,1981).

Λύση

Έχουμε: $f(1, n) = f(0, f(1, n - 1)) = 1 + f(1, n - 1)$.

Έτσι $f(1, n) = n + f(1, 0) = n + f(0, 1) = n + 2$.

Επίσης, $f(2, n) = f(1, f(2, n - 1)) = f(2, n - 1) + 2$.

Έτσι, $f(2, n) = 2n + f(2, 0) = 2n + f(1, 1) = 2n + 3$.

Επίσης, $f(3, n) = f(2, f(3, n - 1)) = 2f(3, n - 1) + 3$.

Έστω $u_n = f(3, n) + 3$. Τότε $u_n = 2u_{n-1}$.

Επίσης, $u_0 = f(3, 0) + 3 = f(2, 1) + 3 = 8$.

Έτσι $u_n = 2^{n+3}$ και $f(3, n) = 2^{n+3} - 3$.

Έχουμε ακόμη: $f(4, n) = f(3, f(4, n - 1)) = 2^{f(4, n-1)+3} - 3$,
από την οποία προκύπτουν οι τιμές

$$f(4,0) = f(3,1) = 2^4 - 3 = 2^{2^2}$$

$$f(4,1) = 2^{f(4,0)+3} - 3 = 2^{2^4} - 3 = 2^{2^{2^2}} - 2$$

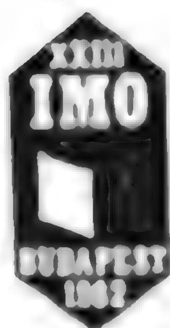
$$f(4,2) = 2^{f(4,1)+3} - 3 = 2^{2^{2^4}} - 3$$

....

$f(4,1981) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}} - 3$, με 1984 διπλά στον όρο $2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$.

Γενικότερα, θα έχουμε

$f(4,n) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}} - 3$, με $n + 3$ διπλά στον όρο $2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$.



$23^η$ Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1982

Τόπος Διοργάνωσης:	Ουγγαρία (Βουδαπέστη)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	A. Csaszor (Παν. Βουδαπέστης)
Συμμετοχή:	30 χώρες με 4 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες Συμμετοχές:	Κουβέϊτ
Μέγιστη Βαθμολογία:	40 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες:	Δυτ. Γερμανία (145), Σοβ. Ένωση (137), Αν. Γερμανία (136), Βιετνάμ (133), Ουγγαρία (125), Τσεχοσλοβακία (115), Φινλανδία (113), Βουλγαρία (108).

Η Ελληνική ομάδα πήρε μέρος με τους μαθητές Λ. Πάλκο, Ι. Δανδάλη, Σ. Σμυρνάκη και Γ. Σταμούλη και ήταν $23^η$ στην τελική βαθμολογία.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Η συνάρτηση f(n) ορίζεται στους θετικούς ακέραιους και παίρνει μη αρνητικές ακέραιες τιμές. Επιπλέον f(2) = 0, f(3) > 0, f(9999) = 3333 και για όλα τα m, n είναι $f(m+n)-f(m)-f(n)=0$ ή 1. Να προσδιορίσετε το f(1982).

Λύση

Θυμίζουμε ότι το ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αριθμού α είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι ίσος ή μικρότερος από τον αριθμό α. Συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του α ως $[\alpha]$ και ισχύει ότι

$$[\alpha]\le \alpha<[\alpha]+1.$$

Έχουμε, για παράδειγμα, $[3,16]=3$, $[5]=5$, $[6,99]=6$, και $[-3,21]=-4$

Θα αποδείξουμε ότι $f(n)=\left[\frac{n}{3}\right]$, για κάθε θετικό ακέραιο $n \leq 9999$.

Για $m=n=1$, από την υπόθεση προκύπτει ότι $f(2)-2f(1)=0$ ή 1. Επειδή είναι $f(2)=0$, θα έχουμε $f(1)=0$ ή $f(1)=-\frac{1}{2}$ (απορρίπτεται).

Άρα είναι $f(1)=0$.

Για $m=2, n=1$, λαμβάνουμε $f(3)-f(2)-f(1)=0$ ή 1, από την οποία, αφού $f(3)>0$, $f(2)=0=f(1)$, προκύπτει ότι $f(3)=1$.

Επιπλέον έχουμε

$$f(3n+3)-f(3n)-f(3)=0 \text{ ή } 1$$

$$f(3n+3)\geq f(3n)+f(3)=f(3n)+1,$$

οπότε με επαγωγή μπορούμε να αποδείξουμε ότι $f(3n)\geq n$, για κάθε θετικό ακέραιο n.

Πράγματι, έχουμε $f(3\cdot 1)=f(3)=1\geq 1$ και αν υποθέσουμε ότι $f(3\kappa)\geq \kappa$, τότε $f(3(\kappa+1))=f(3\kappa+3)\geq f(3\kappa)+1\geq \kappa+1$.

Επιπλέον, αν υποθέσουμε ότι για κάποιο κ ισχύει $f(3\kappa)>\kappa$, τότε ομοίως θα αποδείξουμε ότι $f(3m)>m$, για κάθε $m>\kappa$. Όμως $f(9999)=f(3\cdot 3333)=3333$. Επομένως η ανισότητα $f(3\kappa)>\kappa$, δεν μπορεί να ισχύει για κάποιο $\kappa\leq 3333$.

Επομένως, θα ισχύει: $f(3n)=n$, για κάθε θετικό ακέραιο $n\leq 3333$.

Έχουμε ακόμη για $n\leq 3333$, ότι

$$f(3n+1)=f(3n)+f(1)+(0 \text{ ή } 1)=n \text{ ή } n+1, \tag{1}$$

αλλά και

$$\begin{aligned} 3n+1=f(9n+3) &\geq f(6n+2)+f(3n+1) \\ &\geq f(3n+1)+f(3n+1)+f(3n+1) \\ &=3\cdot f(3n+1), \text{ δηλαδή} \end{aligned}$$

$$f(3n+1)\leq \frac{3n+1}{3}<n+1. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει $f(3n+1)=n$ και εργαζόμενοι ομοίως βρίσκουμε ότι $f(3n+2)=n$, οπότε $f(1982)=660$ και γενικότερα

$f(n)=\left[\frac{n}{3}\right]$, για $n \le 9999$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

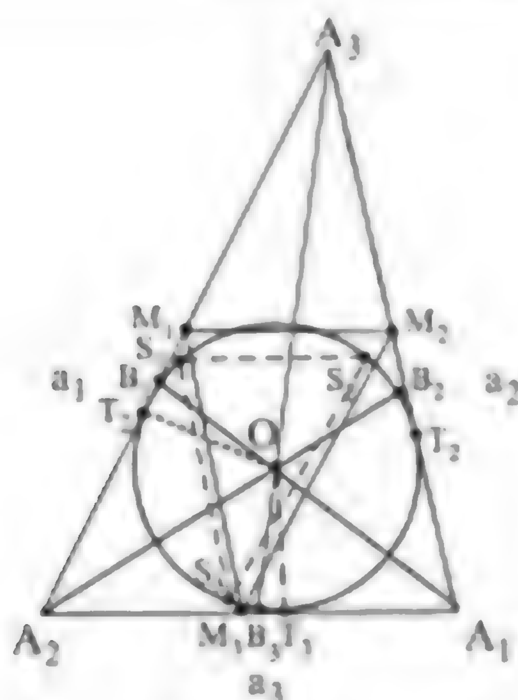
Έστω $A_1A_2A_3$ (A_i με $i=1,2,3$) μη ισοσκελές τρίγωνο με πλευρές a_1, a_2, a_3 (a_i με $i=1,2,3$) με a_i αντικείμενη πλευρά στην κορυφή A_i. Έστω επίσης M_i το μέσο της πλευράς a_i και T_i το σημείο επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου με την πλευρά a_i. Έστω, τέλος, S_i το συμμετρικό του T_i ως προς την εσωτερική διχοτόμο της γωνίας A_i. Να δειχθεί ότι οι ευθείες M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 συντρέχουν.

Μια βασική σκέψη

Αφού τα M_i σχηματίζουν τρίγωνο, όπως επίσης και τα S_i με $i=1,2,3$ τότε η πιθανότητα τα M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 να συντρέχουν δυνατόν να είναι συμπέρασμα της πιθανής περίπτωσης τα τρίγωνα $M_1M_2M_3$ και $S_1S_2S_3$ να είναι όμοια (υπό την στενή έννοια) με τις αντίστοιχες – ομόλογες πλευρές να ορίζουν ζεύγη παράλληλων ευθειών, οπότε το ζητούμενο σημείο είναι το κέντρο της ομοιοθεσίας.

Λύση:

Έστω ότι το B_i είναι τα σημεία της τομής των εσωτερικών διχοτόμων των γωνιών A_i με τις αντικείμενες πλευρές. Έστω ότι η $\hat{A}_1$ είναι η μεγαλύτερη γωνία, ακολουθούμενη από τη $\hat{A}_2$. Τότε το T_2 βρίσκεται ανάμεσα στο A_1 και B_2, το T_3 βρίσκεται ανάμεσα στο A_1 και B_3, αφού ισχύει $O\hat{B}_2A_1 = 180° - \hat{A}_1 - \hat{A}_2/2 = \hat{A}_3 + \hat{A}_2/2$. Αλλά $\hat{A}_3 + \hat{A}_2/2 < \hat{A}_1 + \hat{A}_2/2$ και το άθροισμά τους είναι $180°$, οπότε $A_3 + A_2/2 < 90°$. Άρα το T_2 βρίσκεται ανάμεσα στο A_1 και B_2 και ομοίως και για τα υπόλοιπα.



Σχήμα 86

Έστω το O είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου. Τότε:

$$T_1\hat{O}S_2 = T_1\hat{O}T_2 - 2\,T_2\hat{O}B_2 = 2\left(\hat{A}_3 + \hat{A}_2/2\right) - \hat{A}_3 = \hat{A}_2 + \hat{A}_3 .$$

Ομοίως έχουμε ότι γωνία $T_1\hat{O}S_3 = \hat{A}_2 + \hat{A}_3$, οπότε $S_2S_3 // A_2A_3$.

Έχουμε ακόμη ότι:

$$\begin{aligned} T_3\hat{O}S_2 &= 360^\circ\ T_3\hat{O}T_1 - T_1\hat{O}S_2 \\ &= 360^\circ - \left(180^\circ - \hat{A}_2\right) - \left(\hat{A}_2 + \hat{A}_3\right) \\ &= 180^\circ - A_3 \\ &= \hat{A}_1 + \hat{A}_2 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3\hat{O}S_1 &= T_3\hat{O}T_1 + 2\ T_1\hat{O}B_1 \\ &= 180^\circ - \hat{A}_2 + 2(90^\circ - O\hat{B}_1T) \\ &= 360^\circ - \hat{A}_2 - 2\left(\hat{A}_3 + \hat{A}_1/2\right) \\ &= 2\left(\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3\right) - \hat{A}_2 - 2\hat{A}_3 - \hat{A}_1 \\ &= \hat{A}_1 + \hat{A}_2 \end{aligned}$$

Επομένως θα έχουμε $T_3\hat{O}S_2 = T_3\hat{O}S_1$, οπότε θα είναι και $S_1S_2 // A_1A_2$.

Ομοίως μπορούμε να αποδείξουμε ότι $S_1S_3 // A_1A_3$.

Έτσι έχουμε ότι τα τρίγωνα $S_1S_2S_3$, $A_1A_2A_3$ είναι όμοια και επιπλέον γίνονται ομοίως προσανατολισμένα με στροφή $180°$. Άρα τα τρίγωνα $S_1S_2S_3$ και $M_1M_2M_3$ είναι όμοια και ομοίως προσανατολισμένα, οπότε οι ευθείες M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 που ορίζονται από ομόλογες κορυφές τους συντρέχουν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Θεωρούμε τις άπειρες ακολουθίες $\{x_n\}$ θετικών πραγματικών αριθμών έτσι ώστε $x_0 = 1$ και $x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τέτοια ακολουθία υπάρχει ένα $n \geqslant 1$ έτσι ώστε:

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3,999$$

β) Να βρείτε μια τέτοια ακολουθία για την οποία:

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4, \text{ για όλα τα } n.$$

Λύση

α) Αν θέσουμε $\frac{x_{i-1}}{x_i} = a_i$, $i = 1, 2, \dots$, επειδή ισχύει $a_i + \frac{2}{a_i} \geq 2\sqrt{2}$ για κάθε $i = 1, 2, \dots$ και $x_0 = 1$, θα έχουμε

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \\ &= \frac{1}{x_1} + x_1 \cdot \frac{x_1}{x_2} + x_2 \cdot \frac{x_2}{x_3} + \cdots + x_{n-1} \frac{x_{n-1}}{x_n} \\ &= a_1 + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_1 a_2} + \cdots + \frac{a_n}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} \\ &= a_1 + \frac{1}{a_1}\left[a_2 + \frac{1}{a_2}\left[a_3 + \cdots + \frac{1}{a_{n-2}}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right)\cdots\right]\right] \end{aligned}$$

$$\geq a_1 + \frac{1}{a_1}\left[a_2 + \frac{1}{a_2}\left[a_3 + \cdots + \left(a_{n-2} + \frac{2\sqrt{2}}{a_{n-2}}\right)\cdots\right]\right]$$

$$\geq a_1 + \frac{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots\sqrt{2}}}}{a_1} \geq 2\sqrt{2\sqrt{2\cdots\sqrt{2}}} = \beta_n .$$

Η ακολουθία β_n ικανοποιεί την σχέση $\beta_{n+1} = 2\sqrt{\beta_n}$, $n = 1,2,\ldots$ με $\beta_1 = 2\sqrt{2}$ και είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη, οπότε συγκλίνει. Πράγματι, για $n = 1$ έχουμε $\beta_2 > \beta_1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2\sqrt{2}} > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 8\sqrt{2} > 8$, ισχύει.

Αν υποθέσουμε ότι $\beta_\kappa > \beta_{\kappa-1}$, τότε $\beta_{\kappa+1} > \beta_\kappa \Leftrightarrow 2\sqrt{\beta_\kappa} > 2\sqrt{\beta_{\kappa-1}}$ $\Leftrightarrow \beta_\kappa > \beta_{\kappa-1}$, οπότε σύμφωνα με την αρχή της τελείας επαγωγής ισχύει $\beta_{n+1} > \beta_n$ για κάθε $n = 1,2,\ldots$. Ομοίως με επαγωγή αποδεικνύεται εύκολα και ότι $\beta_n \leq 4$ για κάθε $n = 1,2,\ldots$. Αν $\omega = \lim_{n\to+\infty} \beta_n$, τότε θα είναι και $\lim_{n\to+\infty} \beta_{n+1} = \omega$, οπότε θα έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \beta_{n+1} = 2\sqrt{\lim_{n\to+\infty} \beta_n} \Leftrightarrow \omega = 2\sqrt{\omega} \Leftrightarrow \omega = 4 ,$$

αφού η ρίζα $\omega = 0$ απορρίπτεται γιατί πρέπει $\lim_{n\to+\infty} \beta_n > 0$.

Άρα έχουμε αποδείξει ότι $S_n \geq \beta_n$, για κάθε $n = 1,2,\ldots$ και ότι $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = 4$. Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα και για το $\varepsilon_0 = 10^{-3}$, θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ έτσι ώστε για κάθε $n > n_0$ να ισχύει

$$|\beta_n - 4| < 10^{-3} \text{ ή } 3,999 < \beta_n < 4,001 ,$$

οπότε για κάθε $n > n_0$ θα ισχύει και ότι

$$S_n \geq \beta_n > 3,999 .$$

β) Αρκεί να θεωρήσουμε την ακολουθία $x_n = \frac{1}{2^n}$, η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις του προβλήματος και ισχύει

$$S_n = 2^1 + 2^0 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} = 2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) = 4 - \frac{1}{2^{n-2}} < 4,$$

για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να αποδείξτε ότι, αν ο n είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός τέτοιος ώστε η εξίσωση $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$ να έχει μια λύση (x, y) στους ακέραιους τότε έχει τουλάχιστον τρεις τέτοιες λύσεις. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει λύσεις στους ακέραιους για $n = 2891$.

Λύση

Εάν (x, y) είναι μια λύση, τότε το ίδιο είναι και η $(y - x, -x)$, αλλά και η $(-y, x - y)$ είναι επίσης λύση. Αν οι δύο πρώτες είναι ίδιες τότε $y = -x$, και $x = y - x = -2x$, οπότε $x = y = 0$, που είναι αδύνατον, αφού $n > 0$. Ομοίως, για οποιοδήποτε άλλο ζευγάρι από τις παραπάνω λύσεις ισχύει το ίδιο.

Για $n = 2891$ έχουμε $2891 \equiv 2 \pmod 9$ και δεν υπάρχει λύση της ισοτιμίας $x^3 - 3xy^2 + y^3 \equiv 2 \pmod 9$. Πράγματι, δύο κύβοι είναι ο καθένας -1, 0 ή 1, (mod 9) και ο άλλος όρος είναι 0, 3 ή 6, (mod 9), οπότε η μόνη λύση είναι να έχουμε τους κύβους με 1 και -1 (mod 9) και ο άλλος όρος ισοϋπόλοιπος με 0. Αλλά ο άλλος όρος δεν μπορεί να είναι ισοϋπόλοιπος με το 0, εκτός κι αν ένας από τους x, y είναι πολλαπλάσιος του 3, οπότε και ο κύβος του είναι ισοϋπόλοιπος με 0, και όχι με 1 ή -1 (mod 9).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Οι διαγώνιοι AC και CE του κανονικού εξαγώνου ABCDEF χωρίζονται από τα εσωτερικά σημεία M και N αντίστοιχα, έτσι ώστε

$$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r.$$

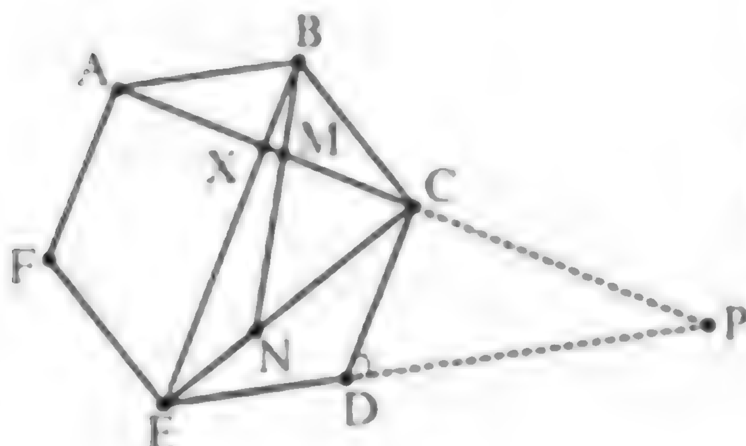
Να προσδιορίσετε το r, αν τα B, M και N είναι συνευθειακά.

Λύση

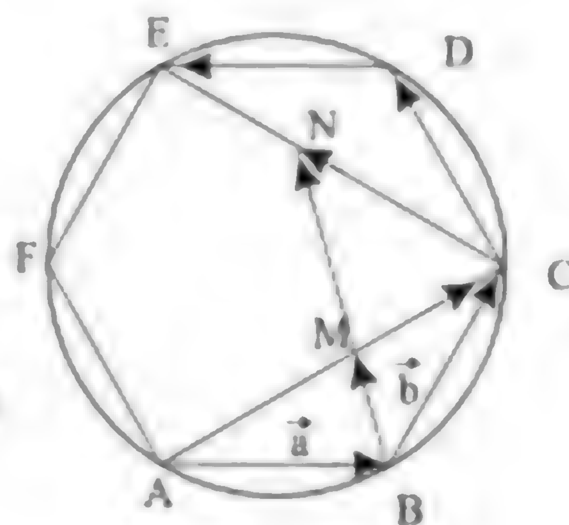
Από το τρίγωνο ECX (Σχ. 87) και το θεώρημα Μενελάου έχουμε

$\frac{CM}{MX}\cdot\frac{XB}{BE}\cdot\frac{EN}{NC}=-1$, οπότε $\frac{(1-r)}{\left(r-\frac{1}{2}\right)}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1-r}{r}=-1$.

Άρα θα είναι $r=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.



Σχήμα 87



Σχήμα 88

Εξήγηση: Βλέπουμε ότι $\widehat{DCP}=90^\circ$ και $\widehat{CPD}=30^\circ$.

Άρα: $DP=2CD=2AB\Rightarrow EP=3AB\Rightarrow$
$\frac{XB}{XE}=-\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{XB}{EX}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{XB}{EB}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{XB}{BE}=-\frac{1}{4}$.

2ος τρόπος

Θα χρησιμοποιήσουμε διανύσματα στο επίπεδο του κανονικού εξαγώνου, (σχ. 88).

Έστω $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, οπότε θα έχουμε $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{DE}=-\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{b}-\vec{a}$ και $\overrightarrow{CE}=\vec{b}-2\vec{a}$. Από την υπόθεση δίνεται ότι $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=r$, οπότε θα έχουμε $\overrightarrow{AM}=r\overrightarrow{AC}=r\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ και $\overrightarrow{CN}=r\overrightarrow{CE}=r\left(\vec{b}-2\vec{a}\right)$.

Επειδή τα σημεία B, M και N είναι συνευθειακά, θα υπάρχει πραγματικός αριθμός μ τέτοιοιος ώστε

$$\overrightarrow{BM}=\mu\cdot\overrightarrow{BN} \qquad (1)$$

Έχουμε όμως

$$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=r\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\vec{a}$$

$$\overline{BN} = \overline{BC} + \overline{CN} = \vec{b} + r\left(\vec{b} - 2\vec{a}\right),$$

οπότε η σχέση (1) γίνεται

$$r\left(\vec{a} + \vec{b}\right) - \vec{a} = \mu\vec{b} + \mu r\left(\vec{b} - 2\vec{a}\right) \Leftrightarrow (r - 1 + 2r\mu)\vec{a} + (r - \mu - r\mu)\vec{b} = \vec{0},$$

από την οποία, αφού τα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι μη συγγραμμικά, προκύπτει το σύστημα

$$r - 1 + 2r\mu = 0$$

$$r - \mu - r\mu = 0,$$

από το οποίο προκύπτει ότι $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $r = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (απορρίπτεται), δηλαδή $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Έστω ότι το S είναι ένα τετράγωνο με πλευρές μήκους 100. Έστω ότι το L είναι μια τεθλασμένη γραμμή στο S που δεν συναντά τον εαυτό της και που αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$ με $A_0 \neq A_n$. Να υποθέσετε ότι για κάθε σημείο P στα σύνορα του S υπάρχει ένα σημείο της L σε απόσταση από το P όχι μεγαλύτερη από $\frac{1}{2}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο σημεία X και Y του L έτσι ώστε η απόσταση ανάμεσα στο X και το Y να μην είναι μεγαλύτερη από 1 και το μήκος του τμήματος του L που βρίσκεται ανάμεσα στο X και το Y δεν είναι μικρότερο από 198.

Λύση

Έστω ότι το τετράγωνο είναι A΄B΄C΄D΄. Πρέπει να βρούμε σημεία της L κοντά σε ένα διακεκριμένο σημείο το A΄D΄ αλλά σε οποιαδήποτε πλευρά μιας κίνησης προς το B΄. Λέμε ότι η L προσεγγίζει ένα σημείο P΄ στην περίμετρο του τετραγώνου εάν υπάρχει ένα σημείο P της L με $PP' \leq \frac{1}{2}$. Λέμε ότι η L προσεγγίζει το P΄ πριν το Q΄ εάν υπάρχει ένα σημείο P στην L το οποίο να είναι κοντύτερα στο A_0 (το σημείο εκκίνησης του L) από οποιοδή-

ποτε άλλο σημείο Q με $QQ' \le \frac{1}{2}$.

Έστω ότι το A΄ είναι η πρώτη κορυφή του τετραγώνου που έχει προσεγγίσει την L. Επομένως η L πρέπει να προσεγγίσει και το B΄ και το D΄. Ας υποθέσουμε ότι προσεγγίζει το B΄ πρώτα. Έστω ότι το B είναι το πρώτο σημείο στην L με $BB' \le \frac{1}{2}$. Μπορούμε τώρα να διαιρέσουμε την L σε δύο τμήματα L_1, το ίχνος από το A_0 στο B, και L_2, το ίχνος από το B στο A_n.

Πάρτε το X΄ να είναι το σημείο πάνω στο A΄D΄ κοντύτερα στο D΄ το οποίο έχει προσεγγισθεί από το L_1. Έστω ότι το X είναι το αντίστοιχο σημείο στο L_1. Τώρα κάθε σημείο πάνω στο X΄D΄ πρέπει να προσεγγισθεί από το L_2 (και το X΄D΄ δεν είναι κενό, γιατί ξέρουμε ότι το D΄ έχει προσεγγισθεί από το L αλλά όχι από το L_1). Έτσι λοιπόν λόγω του «Συμπαγούς» το ίδιο το X΄ πρέπει να προσεγγισθεί από το L_2. Πάρτε το Y να είναι αντίστοιχο σημείο στο L_2. Τότε $XY \le XX' + X'Y \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Επίσης $BB' \le \frac{1}{2}$, οπότε $XB \ge X'B' - XX' - BB' \ge X'B' - 1 \ge A'B' - 1 = 99$. Ομοίως το $YB \ge 99$, οπότε θα είναι η προβολή $XY \ge 198$.



24^{η} Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1983

Τόπος Διοργάνωσης: Γαλλία (Παρίσι)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών: C. Houzel (Παν/μιο Παρισίων)
Συμμετοχή: 32 χώρες με 6 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες Συμμετοχές: Ισπανία, Μαρόκο
Μέγιστη Βαθμολογία: 42 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες: Δυτ. Γερμανία (212), Η.Π.Α. (171), Ουγγαρία (170), Σοβ. Ένωση (169), Ρουμανία (161), Βιετνάμ (148), Ολλανδία (143), Τσεχοσλοβακία (142).

Η Ελληνική ομάδα πήρε μέρος με τους μαθητές Σ. Γαρουφαλίδη (χάλκινο μετάλλιο) Β. Ταμπάκη, Γ. Παναγόπουλο, Μ. Αναγνώστου, Γ. Παπά και ήταν 17^{η} στην τελική βαθμολογία. Ο μαθητής μας Σ. Γαρουφαλίδης τιμήθηκε με ειδικό δίπλωμα για την εξαίρετη λύση που έδωσε σε μία από τις ασκήσεις. Αρχηγός της ομάδας ήταν ο κ. Γεώργιος Κολέτσος και υπαρχηγός ο κ. Δημήτρης Κοντογιάννης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Βρείτε όλες τις συναρτήσεις f που ορίζονται στο σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών, που παίρνουν θετικές πραγματικές τιμές και ικανοποιούν τις σχέσεις:

(i) $f\left(xf\left(y\right)\right)=y\cdot f\left(x\right)$ **για κάθε x, y και**

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=0$.

Λύση

Αν θέσουμε $y=x>0$ στην ισότητα $f\left(xf\left(y\right)\right)=yf\left(x\right)$ λαμβάνουμε ότι

$f(xf(x)) = xf(x)$, οπότε διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν $z > 0$ με την ιδιότητα $f(z) = z$. Για αυτά τα z έχουμε

$$f(z^2) = f(z \cdot z) = f(zf(z)) = z \cdot f(z) = z^2 \text{ [υπόθεση (i)]}$$

και με επαγωγή εύκολα αποδεικνύουμε ότι

$$f(z^n) = z^n, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

Επιπλέον από την υπόθεση (i) έχουμε

$$z = f(z) = f(1 \cdot z) = f(1 \cdot f(z)) = zf(1),$$

και επειδή είναι $z > 0$, προκύπτει ότι $f(1) = 1$. Έτσι έχουμε και

$$zf\left(\frac{1}{z}\right) = f\left(\frac{1}{z}f(z)\right) = f\left(\frac{1}{z} \cdot z\right) = f(1) = 1,$$

οπότε θα είναι

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z}.$$

Με επαγωγή εύκολα αποδεικνύουμε ότι

$$f\left(\frac{1}{z^n}\right) = \frac{1}{z^n}, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*. \quad (2)$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι θα είναι $z = 1$.

Αν είναι $z > 1$, τότε $\lim\limits_{n \to +\infty} z^n = +\infty$, ενώ από την υπόθεση (ii) πρέπει να έχουμε

$$\lim_{n \to \infty} f(z^n) = 0,$$

οπότε από την (1), αν πάρουμε όρια, προκύπτει $0 = \infty$, άτοπο.

Ομοίως, αν $0 < z < 1$, τότε $\frac{1}{z} > 1$ και μέσω της (2) καταλήγουμε σε άτοπο, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση.

Άρα πρέπει να έχουμε $z = 1$ και $xf(x) = 1$, για κάθε $x > 0$, οπότε

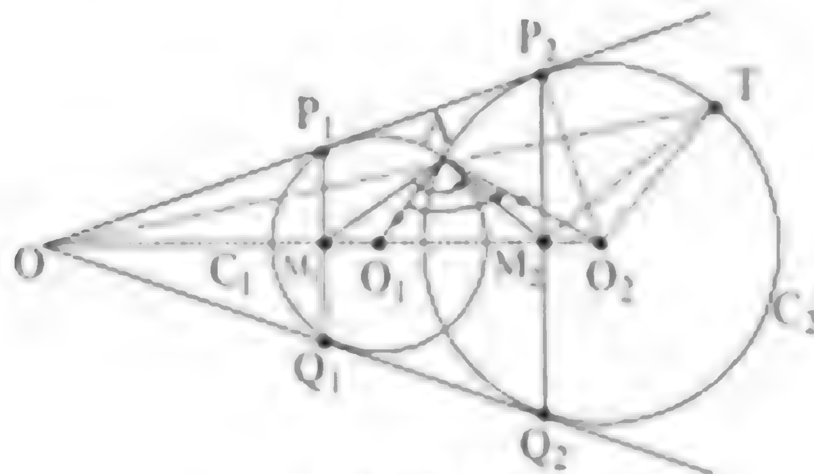
$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

η οποία εύκολα διαπιστώνουμε ότι επαληθεύει και τις δύο υποθέσεις του προβλήματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Έστω ότι το A είναι ένα από τα δύο σημεία τομής δύο άνισων συνεπίπεδων κύκλων C_1 και C_2, με κέντρα O_1, O_2 αντιστοίχως. Η μία από τις κοινές εφαπτόμενες των δύο κύκλων εφάπτεται του C_1 στο P_1 και του C_2 στο P_2 ενώ η άλλη εφάπτεται του C_1 στο Q_1 και του C_2 στο Q_2. Έστω ότι M_1 είναι το μέσο του P_1Q_1 και το M_2 του P_2Q_2. Δείξτε ότι $O_1\hat{A}O_2 = M_1\hat{A}M_2$.

Λύση



Σχήμα 89

Έστω T το σημείο τομής της OA με τον κύκλο C_2 με $T \neq A$. Το σημείο τομής O των εξωτερικών εφαπτομένων των δύο κύκλων είναι κέντρο ομοιοθεσίας λόγου $\dfrac{OO_1}{OO_2}$ και αφού οι ομοιόθετες ακτίνες είναι παράλληλες, τα τρίγωνα M_1AO_1 και M_2TO_2 είναι όμοια, οπότε

$$M_1\hat{A}O_1 = M_2\hat{T}O_2 \qquad (1)$$

Επιπλέον έχουμε

$$OA \cdot OT = OP_2^2 \text{ [δύναμη του O ως προς τον } C_2\text{]}$$

$$OP_2^2 = OM_2 \cdot OO_2, \text{ [από ορθ. τρίγωνο } OP_2O_2\text{]}$$

οπότε το τετράπλευρο ATO_2M_2 είναι εγγράψιμο και

$$M_2\hat{A}O_2 = M_2\hat{T}O_2 \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\begin{aligned} M_1\hat{A}M_2 &= M_1\hat{A}O_1 + O_1\hat{A}M_2 \\ &= M_2\hat{T}O_2 + O_1\hat{A}M_2 \ [\text{λόγω } (1)] \\ &= M_2\hat{A}O_2 + O_1\hat{A}M_2 \ [\text{λόγω } (2)] \\ &= O_1\hat{A}O_2 . \end{aligned}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω ότι a, b και c είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, οι οποίοι ανά δύο δεν έχουν κοινό διαιρέτη μεγαλύτερο από το 1. Να αποδείξετε ότι $2abc - ab - bc - ca$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που δεν μπορεί να γραφεί ως $xbc + yca + zab$, όπου x, y, z είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί.

Λύση

Θα αποδείξουμε πρώτα μία βοηθητική πρόταση.

Λήμμα: Αν a, b, c είναι θετικοί ακέραιοι ανά δύο πρώτοι μεταξύ τους, τότε $bc - b - c$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος, ο οποίος δεν μπορεί να γραφεί ως $mb + nc$, όπου m, n είναι μη αρνητικοί ακέραιοι.

Απόδειξη: Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι το σύνολο $\{0, c, 2c, \ldots, (b-1)c\}$ είναι ένα πλήρες σύνολο υπολοίπων $\bmod b$, οπότε αν θεωρήσουμε κάποιο $r > br - b - c = (b-i)c - b$, το θα είναι

$$r \equiv nc \pmod{b}, \text{ για κάποιο } n \in \{0, 1, \ldots, b-1\}.$$

Όμως είναι και $r > nc - b$, οπότε θα ισχύει $r - nc = \text{πολ.}(b)$, δηλαδή

$$r = nc + mb, \text{ για κάποιο ακέραιο } m \geq 0,$$

οπότε κάθε ακέραιος μεγαλύτερος του $bc - b - c$ μπορεί να γραφεί ως $mb + nc$ με m, n μη αρνητικούς ακέραιους.

Θεωρούμε τώρα τον αριθμό $bc - b - c = (b-1)c - b$, οπότε έχουμε

$bc-b-c\equiv(b-1)c\,(\bmod b)$, ενώ ο $bc-b-c$ δεν είναι ισοϋπόλοιπος με τους αριθμούς nc, $0\le n<b-1$.

Επομένως αν ήταν $bc-b-c=mb+nc$, για κάποιους αρνητικούς ακέραιους m, n, τότε θα είχαμε $(bc-b-c)-nc=\pi o\lambda.(b)$, οπότε θα ήταν και $n\ge b-1$. Τότε όμως

$$bc-b-c=mb+nc\ge nc\ge(b-1)c=bc-b>bc-b-c,\ (\text{άτοπο}).$$

Το σύνολο $\{0,bc,2bc,\ldots,(a-1)bc\}$ είναι ένα πλήρες σύνολο υπολοίπων $\bmod a$, οπότε αν θεωρήσουμε κάποιο $N>2abc-ab-bc-ca$, τότε θα είναι

$$N\equiv xbc\,(\bmod a),\ \text{για κάποιο } x\in\{0,1,\ldots,a-1\}.$$

Όμως έχουμε ακόμη ότι

$$N-xbc>2abc-ab-bc-ca-(a-1)bc$$

$$=abc-ab-ca$$

$$=a(bc-b-c)=\pi o\lambda.(a),$$

δηλαδή έχουμε βρει ότι

$$N-xbc=ka,\ \text{με } k>bc-b-c.$$

Άρα, λόγω του Λήμματος, μπορούμε να βρούμε μη αρνητικούς ακέραιους y και z έτσι ώστε $k=zb+yc$, οπότε θα έχουμε

$$N-xbc=(zb+yc)a\Leftrightarrow N=xbc+yca+zab.$$

Θα τελειώσουμε αποδεικνύοντας ότι για αριθμό $N=2abc-ab-bc-ca$ δεν υπάρχουν μη αρνητικοί ακέραιοι x, y, z έτσι ώστε $N=xbc+yca+zab$.

Πράγματι, έχουμε $N+bc=(2bc-b-c)a$, οπότε θα είναι

$$N\equiv -bc\,(\bmod a). \tag{1}$$

Έτσι, αν ίσχυε η ισότητα $N=xbc+yca+zab$, τότε θα είχαμε

$$N\equiv xbc\,(\bmod a), \tag{2}$$

οπότε από τις (1) και (2), αφού $(a,b)=1=(a,c)=(a,b,c)$, θα προέκυπτε ότι $a/(x+1)$, οπότε $x+1\ge a$, αφού a, x μη αρνητικοί ακέραιοι, δηλαδή

$x \geq a-1$. Ομοίως μπορούμε να έχουμε και ότι $y \geq b-1$ και $z \geq c-1$, οπότε

$$N = xbc + yca + zab \geq (a-1)bc + (b-1)ca + (c-1)ab$$

$$= 3abc - ab - bc - ca$$

$$= abc + N > N, \text{ άτοπο.}$$

Παρατήρηση

Για το τελευταίο θα μπορούσαμε να εργασθούμε και ως εξής:

Αν είχαμε $N = 2abc - ab - bc - ca = xbc + yca + zab$, $x, y, z \geq 0$, τότε

$$bc(x+1) + ca(y+1) + ab(z+1) = 2abc, \qquad (3)$$

με $x+1 \geq 1$, $y+1 \geq 1$, $z+1 \geq 1$. Επειδή έχουμε $(a,b) = 1 = (a,c)$, από την (3) προκύπτει ότι $a \mid (x+1)$, οπότε $a \leq x+1$. Ομοίως λαμβάνουμε και ότι $b \leq y+1$ και $c \leq z+1$, οπότε θα έχουμε

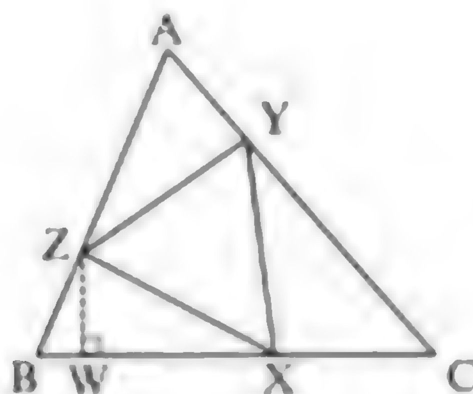
$$3abc = abc + abc + abc \leq bc(x+1) + ca(y+1) + ab(z+1) = 2abc,$$

που είναι άτοπο, αφού οι a, b, c είναι θετικοί ακέραιοι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Έστω ότι το ABC είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο και το E το σύνολο όλων των σημείων που περιέχονται στα τρία τμήματα AB, BC και CA (συμπεριλαμβανομένων των A, B και C). Να εξετάσετε αν, για κάθε διαμέριση του E σε δύο ξένα υποσύνολα, τουλάχιστον ένα από τα δύο υποσύνολα περιέχει τις κορυφές ενός ορθογωνίου τριγώνου.

Λύση



Σχήμα 90

Θα αποδείξουμε ότι το ζητούμενο ισχύει.

Έστω μία διαμέριση του συνόλου E των σημείων των πλευρών του τριγώνου ABC σε δύο υποσύνολα E_1 και E_2. Τότε θα είναι $E_1 \cup E_2 = E$ και $E_1 \cap E_2 = \varnothing$.

Θεωρούμε τα σημεία X, Y, Z πάνω στις πλευρές BC, CA και AB, αντιστοίχως, έτσι ώστε

$$\frac{BX}{BC} = \frac{CY}{CA} = \frac{AZ}{AB} = \frac{2}{3}.$$

Σύμφωνα με την αρχή της περιστεροφωλιάς, δύο από τα σημεία X, Y, Z θα ανήκουν σε ένα από τα δύο υποσύνολα. Έστω ότι $X, Y \in E_1$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι και το τρίγωνο XYZ είναι ισόπλευρο και ότι $YX \perp BC$, $YZ \perp CA$ και $XZ \perp AB$, οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

(i) Αν κάποιο σημείο W΄ του BC, διάφορο του X, ανήκει στο σύνολο E_1, τότε ορίζεται ορθογώνιο τρίγωνο YXW΄ από σημεία του E_1.

(ii) Αν όλα τα σημεία του BC, εκτός από το X, ανήκουν στο E_2, τότε αν $ZW \perp BC$, τότε τα B και W ανήκουν στο E_2, οπότε αν και $Z \in E_2$, τότε ισχύει το ζητούμενο. Αν $Z \notin E_2$, τότε $Z \in E_1$. Όμως $ZY \perp CA$, οπότε αν κάποιο σημείο της CA, διάφορο του Y, ανήκει στο E_1, τότε ισχύει το ζητούμενο. Αν όλα τα σημεία της CA, εκτός του Y ανήκουν στο E_2, τότε θα έχουμε στο E_2 όλα τα σημεία των πλευρών BC και CA, εκτός των X και Y. Τότε όμως θα έχουμε ορθογώνιο τρίγωνο από σημεία του E_2, για παράδειγμα, αν M είναι το μέσον της πλευράς BC, τότε το τρίγωνο ABC είναι ορθογώνιο.

Άρα το ζητούμενο ισχύει σε κάθε περίπτωση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Είναι πιθανόν να διαλέξουμε 1983 θετικούς ακέραιους αριθμούς, όλους μικρότερους ή ίσους από το 10^5, έτσι ώστε οποιοιδήποτε τρεις από αυτούς να μην είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου;

Λύση

Θεωρούμε το σύνολο Σ_n όλων των αριθμών οι οποίοι όταν γράφονται ως προς το σύστημα αρίθμησης με βάση το 3 δεν έχουν το ψηφίο 2 και έχουν συνολικά n ψηφία. Για παράδειγμα, ένα στοιχείο του Σ_n είναι ο

αριθμός

$$\langle 11\cdots 1\rangle_3 = 3^0 + 3^1 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right).$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν τρία στοιχεία $x, y, z \in \Sigma_n$ που αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Τότε $x + z = 2y$. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 2y έχει ως ψηφία το 0 και το 2 ως προς βάση το 3, ενώ το ίδιο συμβαίνει και για το άθροισμα $x + z$, μόνον όταν $x = z$, που είναι άτοπο, αφού οι x, z είναι διαφορετικοί μεταξύ τους.

Επομένως οι αριθμοί x, y, z του Σ_n δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Επειδή για τα στοιχεία του Σ_n χρησιμοποιούμε μόνο τα ψηφία 0 και 1, το πλήθος των στοιχείων του Σ_n θα είναι 2^n, δηλαδή όσες είναι οι διατάξεις με επανάληψη των 2 ανά n. Ο μεγαλύτερος αριθμός του Σ_n είναι ο $\langle 11\cdots 1\rangle_3$, δηλαδή αυτός που έχει όλα τα ψηφία του ίσα με 1. Έτσι, αν πάρουμε $n = 11$, θα έχουμε

$$2^{11} = 2048 > 1983,$$

αριθμούς στο Σ_n από τους οποίους ο μεγαλύτερος είναι ο

$$\frac{1}{2}\left(3^{11} - 1\right) = 88573 < 10^5.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Έστω ότι a, b και c είναι τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου. Να αποδείξετε ότι

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

Να προσδιορίσετε πότε ισχύει η ισότητα.

Λύση (1ος τρόπος)

Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι είναι δυνατόν να βρούμε $x, y, z > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$y + z = a,\ z + x = b,\ x + y = c,$$

αφού το σύστημα των τριών εξισώσεων έχει μοναδική λύση

$$(x, y, z) = \left(\frac{b+c-a}{2}, \frac{c+a-b}{2}, \frac{a+b-c}{2}\right)$$

με $x, y, z > 0$, λόγω του ότι οι αριθμοί a, b, c είναι τα μήκη πλευρών τριγώνου.

Έτσι η ανισότητα του προβλήματος μετά από τις σχετικές αντικαταστάσεις και πράξεις γίνεται

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq xyz(x + y + z). \quad (1)$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Cauchy:

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) \geq \left(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\right)^2,$$

για τους μη αρνητικούς αριθμούς

$$a_1 = \sqrt{z}, a_2 = \sqrt{x}, a_3 = \sqrt{y}, b_1 = \sqrt{xy^3}, b_2 = \sqrt{yz^3}, b_3 = \sqrt{zx^3},$$

προκύπτει ότι

$$\left(xy^3 + yz^3 + zx^3\right)(x + y + z) \geq xyz(x + y + z)^2$$

$$\Leftrightarrow xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq xyz(x + y + z),$$

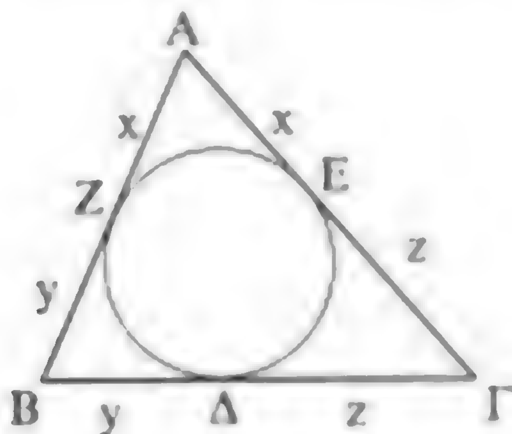
αφού $x + y + z > 0$.

Η ισότητα ισχύει αν, και μόνον αν,

$$\frac{xy^3}{z} = \frac{yz^3}{x} = \frac{zx^3}{y} \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow a = b = c.$$

Παρατήρηση

Γεωμετρικά οι αριθμοί x, y, z είναι τα μήκη των τμημάτων $AE = AZ = x$, $BZ = B\Delta = y$ και $\Gamma\Delta = \Gamma E = z$, όπου Δ, Ε, Ζ είναι τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ με $B\Gamma = a$, $\Gamma A = b$, $AB = c$.



Σχήμα 91

2^ος τρόπος

Το πρώτο μέλος της ζητούμενης ανισότητας μπορεί να γραφεί ως η παράσταση

$$\frac{1}{2}[(a+b-c)(a-b+c)(c-a)^2+(b+c-a)(b-c+a)(b-a)^2+$$

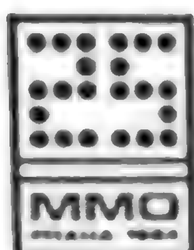
$$+(c+a-b)(c-a+b)(c-b)^2]\geq 0,$$

αφού για τις πλευρές a, b, c τριγώνου ισχύουν οι ανισότητες

$$a+b<c,\ a+c<b,\ b+c<a,\ b+a<c,\ c+a<b,\ c+b<a.$$

Η ισότητα ισχύει όταν

$$(c-a)^2=(b-a)^2=(c-b)^2=0\Leftrightarrow a=b=c.$$



25^{η} Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1984

Τόπος Διοργάνωσης: Τσεχοσλοβακία (Πράγα)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών: F. Zitek (Ακαδημία Επιστημών Πράγας)
Συμμετοχή: 34 χώρες με 6 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες Συμμετοχές: Κύπρος, Νορβηγία
Μέγιστη Βαθμολογία: 42 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες: Σοβ. Ένωση (235), Βουλγαρία (203), Ρουμανία (199), Ουγγαρία (195), Η.Π.Α. (195), Ηνωμένο Βασίλειο (169), Βιετνάμ (162), Αν. Γερμανία (161).

Η Ελληνική ομάδα: πήρε μέρος με τους μαθητές Α. Μελά (Αργυρό μετάλλιο), Θ. Αποστολάτο, Μ. Μυλωνάκη, Ε. Πανηγυράκη, Δ. Πολυμενάκο και Β. Βουζούκα ήταν 19^{η} στην τελική βαθμολογία. Αρχηγός της ομάδας ήταν ο Β. Γιαννακόπουλος και υπαρχηγός ο Δ. Κοντογιάννης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Αν x, y, z είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $x+y+z=1$, να αποδείξετε ότι

$$0 \le yz + zx + xy - 2xyz \le \frac{17}{27}.$$

Λύση

Για την πρώτη ανισότητα έχουμε

$$yz + zx + xy - 2xyz = yz - xyz + zx - xyz + xy = yz(1-x) + zx(1-y) + xy \ge 0,$$

αφού $x, y, z \ge 0$ και $x+y+z=1$, οπότε $1-x \ge 0$ και $1-y \ge 0$.

Για τη δεύτερη ανισότητα παρατηρούμε ότι ένας τουλάχιστον από τους

x, y, z θα είναι μικρότερος ή ίσος του $\frac{1}{3}$ και ένας τουλάχιστον θα είναι μεγαλύτερος ή ίσος του $\frac{1}{3}$. Έστω ότι $x \le \frac{1}{3} \le y$. Τότε θα είναι και $z \le \frac{1}{2}$. Έτσι θα έχουμε

$$\left(\frac{1}{3}-x\right)\left(y-\frac{1}{3}\right) \ge 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{9}-\frac{1}{3}(x+y)-xy \ge 0$$

$$\Leftrightarrow xy \le \frac{1}{3}\left(x+y-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}-z\right). \quad (1)$$

Χρησιμοποιώντας την (1) έχουμε

$$\begin{aligned} yz+zx+xy-2xyz &= z(x+y)+xy(1-2z) \\ &\le z(1-z)+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}-z\right)(1-2z) \\ &= \frac{1}{9}\left(-3z^2+2z+2\right) \le \frac{1}{9}\cdot\frac{7}{3}=\frac{7}{27}, \end{aligned}$$

αφού το τριώνυμο $-3z^2+2z+2$ έχει για $z=\frac{1}{3}$ μέγιστη τιμή $\frac{7}{3}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Βρείτε ένα ζεύγος θετικών ακέραιων αριθμών a, b έτσι ώστε ο αριθμός $ab(a+b)$ να μη διαιρείται με το 7, *αλλά* ο αριθμός $(a+b)^7-a^7-b^7$ να διαιρείται με το 7^7.

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} (a+b)^7-a^7-b^7 &= 7ab\left[\left(a^5+b^5\right)+3ab\left(a^3+b^3\right)+5a^2b^2(a+b)\right] \\ &= 7ab(a+b)\left(a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4\right) \\ &= 7ab(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)^2. \end{aligned}$$

Επειδή ο αριθμός $ab(a+b)$ δεν διαιρείται με το 7, αρκεί να προσδιορί-

σουμε τα a και b έτσι ώστε ο αριθμός a^2+ab+b^2 να διαιρείται με το 7^3. Τότε όμως πρέπει $a^2+ab+b^2 \geq 7^3$, οπότε

$$(a+b)^2 > a^2+ab+b^2 \geq 7^3 = 243,$$

δηλαδή πρέπει να ισχύει $a+b \geq 19$.

Με δοκιμές βρίσκουμε το ζεύγος $(a,b)=(18,1)$. Πράγματι, θεωρώντας $b=1$, τότε ζητάμε το a να είναι τέτοιο ώστε να

$$a^2+a+1=7^3 \cdot \lambda,$$

όπου λ θετικός ακέραιος. Για $\lambda=1$ έχουμε $a^2+a+1=343$ ή ισοδύναμα $a^2+a-342=0$ ή $(a-18)(a+19)=0$, από την οποία προκύπτει ότι $a=18$.

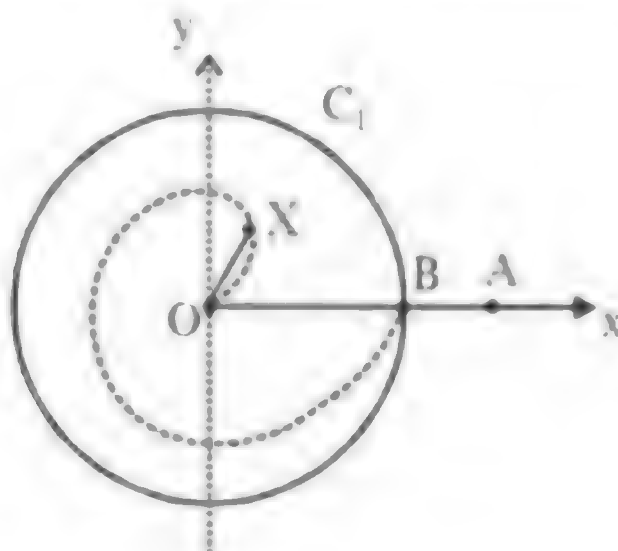
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνονται σημεία O και A στο επίπεδο. Κάθε σημείο στο επίπεδο είναι χρωματισμένο με ένα χρώμα από ένα σύνολο πεπερασμένου πλήθους χρωμάτων. Δεδομένου ενός σημείου X του επιπέδου, ο κύκλος $C(X)$ έχει κέντρο O και ακτίνα $OX+\dfrac{\hat{AOX}}{OX}$, όπου η γωνία $\hat{AOX}$ μετριέται σε ακτίνια στο διάστημα $[0,2\pi)$. Να αποδείξετε ότι μπορούμε να βρούμε ένα σημείο X, όχι πάνω στο OA, έτσι ώστε το χρώμα του να εμφανίζεται σε κάποιο σημείο του κύκλου $C(X)$.

Λύση

Έστω ότι το αποτέλεσμα είναι ψευδές. Θεωρούμε τυχαίο κύκλο $C_1(O,R)$ και συμβολίζουμε $\theta(X)$ το μέτρο σε ακτίνια της γωνίας AOX, $0 \leq \theta(X) < 2\pi$ και $r=OX$. Τότε

$$C(X) \equiv C_1 \Leftrightarrow OX+\frac{\theta(X)}{OX}=R \Leftrightarrow r+\frac{\theta(X)}{r}=R \Leftrightarrow r(R-r)=\theta(X).$$



Σχήμα 93

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X για τα οποία ο κύκλος $C(X)$ ταυτίζεται με τον κύκλο $C_1(O,R)$ είναι μία σπείρα (ελικοειδής καμπύλη) από το O μέχρι το σημείο τομής B του $C_1(O,R)$ με την OA.

Σύμφωνα με την υπόθεσή μας πρέπει κάθε σημείο αυτής της σπείρας να έχει διαφορετικό χρώμα από όλα τα χρώματα που εμφανίζουν τα σημεία του κύκλου $C_1(O,R)$.

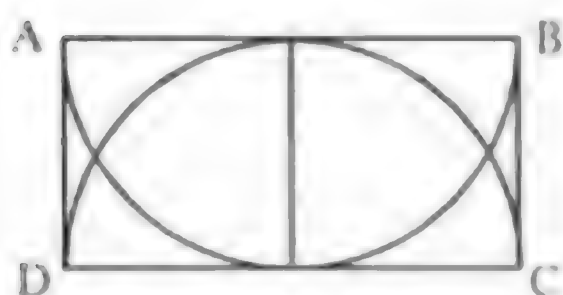
Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ακριβώς n χρώματα. Τότε θεωρώντας διαδοχικά κύκλους $C_2(O,R_2)$, $C_3(O,R_3)$,...,C_{n+1} (O,R_{n+1}) με $R_{n+1} < R_n < \cdots < R_2 < R$ σε καθέναν από αυτούς θα υπάρχει σημείο διαφορετικού χρώματος από αυτά των σημείων του C_1. Έτσι συνολικά βρίσκουμε ότι υπάρχουν $n+1$ χρώματα που είναι άτοπο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

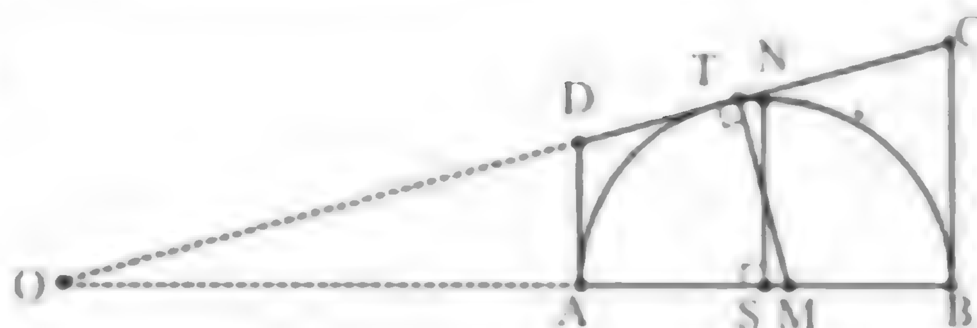
Έστω ότι ABCD είναι ένα κυρτό τετράπλευρο με την ευθεία CD εφαπτόμενη στον κύκλο με διάμετρο AB. Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι εφαπτόμενη στον κύκλο με διάμετρο CD αν, και μόνο αν, οι BC και AD είναι παράλληλοι.

Λύση

Αν AB και CD είναι παράλληλες, τότε η AB είναι εφαπτόμενη στον κύκλο στη διάμετρο CD αν, και μόνο αν, $AB = CD$, δηλαδή, αν, και μόνο αν, ABCD είναι παραλληλόγραμμο. Έτσι το αποτέλεσμα ισχύει στην περίπτωση αυτή, (Σχ. 94).



Σχήμα 94



Σχήμα 95

Υποθέτουμε ότι AB και CD τέμνονται στο O. Έστω ότι το M είναι το μέσο του AB και N το μέσο του CD. Έστω ότι το S είναι το ίχνος της καθέτου από το N στην AB και το T το ίχνος της καθέτου από το M στο CD. Από την υπόθεση έχομε MT = MA και τα τρίγωνα OMT, ONS είναι όμοια, οπότε θα ισχύει

$$\frac{OM}{MT}=\frac{ON}{NS},$$

από την οποία προκύπτει

$$\frac{OM-MT}{OM+MT}=\frac{ON-NS}{ON+NS}\Leftrightarrow\frac{OA}{OB}=\frac{ON-NS}{ON+NS}.$$

Επομένως, αν η AB εφάπτεται του κύκλου διαμέτρου CD, τότε θα έχουμε NS = ND = NC και $\frac{OA}{OB}=\frac{OD}{OC}$, οπότε θα έχουμε και $BC \parallel AD$.

Αντίστροφα, αν είναι $BC \parallel AD$, τότε θα έχουμε

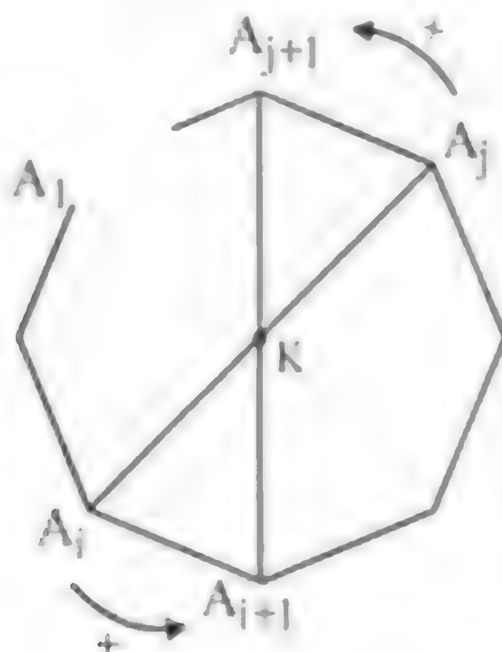
$$\frac{OD}{OC}=\frac{OA}{OB}\Rightarrow\frac{ON-ND}{ON+ND}=\frac{ON-NS}{ON+NS}\Rightarrow ND=NS$$

οπότε ο κύκλος διαμέτρου CD εφάπτεται της AB.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Έστω ότι το d είναι το άθροισμα των μηκών όλων των διαγωνίων ενός επιπέδου κυρτού πολυγώνου με $n > 3$ κορυφές. Έστω ότι p είναι η περίμετρος. Να αποδείξετε ότι: $n-3<\frac{2d}{p}<\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2$, όπου το $[x]$ συμβολίζει τον μεγαλύτερο ακέραιο που δεν υπερβαίνει το x, (δηλαδή είναι το ακέραιο μέρος του x).

Λύση



Σχήμα 96

Ονομάζουμε $A_1, A_2, \ldots, A_n$ τις διαδοχικές κορυφές του κυρτού πολυγώνου και έστω $A_{n+j} \equiv A_j$. Θεωρούμε τις διαγώνιους A_iA_j και $A_{i+1}A_{j+1}$ που έστω τέμνονται στο σημείο K. Τότε θα έχουμε από τη τριγωνική ανισότητα στα τρίγωνα KA_iA_{i+1} και KA_jA_{j+1}, ότι:

$$A_iA_j + A_{i+1}A_{j+1} > A_iA_{i+1} + A_jA_{j+1} \qquad (1)$$

Η ανισότητα (1) αληθεύει για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$, οπότε θεωρούμε τις n^2 ανισότητες που προκύπτουν από την (1) για όλα τα $i, j = 1, 2, \ldots, n$ και τις προσθέτουμε κατά μέλη. Τότε θα έχουμε στο πρώτο μέλος το τετραπλάσιο του αθροίσματος των μηκών όλων των διαγωνίων του πολυγώνου, ενώ στο δεύτερο μέλος προκύπτει $(n-3)$ φορές το διπλάσιο της περιμέτρου του πολυγώνου, δηλαδή έχουμε

$$4d > (n-3)\cdot 2p \Leftrightarrow n - 3 < \frac{2d}{p}.$$

Επιπλέον έχουμε, για $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $j \neq 1, i-1, i+1$

$$A_iA_j < A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2} + \cdots + A_{j-1}A_j \qquad (2)$$

και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1) Αν n περιττός, δηλαδή $n = 2k+1$, τότε θεωρούμε τις σχέσεις (2) για $j = i + r$, $r \leq k$, οπότε έχουμε

$$A_iA_{i+r} \leq A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2} + \cdots + A_{i+r-1}A_{i+r}, \; r = 2, \ldots, k$$

τις οποίες προσθέτουμε κατά μέλη οπότε λαμβάνουμε

$$A_iA_{i+2}+\cdots+A_iA_{i+k}<(k-1)A_iA_{i+1}+(k-1)A_{i+1}A_{i+2}+(k-2)A_{i+2}A_{i+3}+$$
$$+(k-3)A_{i+3}A_{i+4}+\cdots+1\cdot A_{i+k-1}A_{i+k}.$$

Αθροίζοντας τις παραπάνω ανισότητες κατά μέλη, για $i=1,2,\ldots$ λαμβάνουμε

$$d<\left[(k-1)+(1+2+\cdots+k-1)\right]p$$
$$=\left(\frac{k(k+1)}{2}-1\right)p$$
$$=\left[k(k+1)-2\right]\frac{p}{2}=\left\{\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2\right\}\frac{p}{2}.$$

2) Αν n άρτιος, δηλαδή $n=2k$, τότε έχουμε πάλι

$$A_iA_{i+r}<A_iA_{i+2}+\cdots+A_iA_{i+r},\ 2\le r\le k-1$$

$$A_iA_{i+k}<\frac{p}{2},$$

τις οποίες προσθέτουμε κατά μέλη, όπως προηγουμένως, για να λάβουμε

$$d<\left(k^2-2\right)\frac{p}{2}=\left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2\right)\frac{p}{2}.$$

Άρα σε κάθε περίπτωση προκύπτει η ανισότητα

$$\frac{2d}{p}<\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Έστω ότι a, b, c, d είναι περιττοί ακέραιοι αριθμοί έτσι ώστε $0<a<b<c<d$ και $ad=bc$. Να αποδείξετε ότι, αν για κάποιους ακέραιους k, m ισχύει $a+d=2^k$ και $b+c=2^m$, τότε $a=1$.

Λύση

Επειδή είναι $a<c$ και $d-c>0$, θα έχουμε $a(d-c)<c(d-c)$, οπότε

$bc-ac<c(d-c)\Leftrightarrow b-a<d-c\Leftrightarrow a+d>b+c\Leftrightarrow 2^k>2^m\Rightarrow k>m$.

Επιπλέον έχουμε

$bc = ad \Leftrightarrow b\left(2^m - b\right) = a\left(2^k - a\right) \Leftrightarrow b^2 - a^2 = 2^m\left(b - 2^{k-m}a\right)$.

Αλλά $b^2 - a^2 = (b+a)(b-a)$, και οι $(b+a)$ και $(b-a)$ δεν μπορεί και οι δύο να είναι διαιρετοί από το 4 (αφού a και b είναι περιττοί). Έτσι ο 2^{m-1} πρέπει να διαιρεί το $b+a$ ή $b-a$. Αλλά αν διαιρεί το $b-a$, τότε $b-a \geq 2^{m-1}$ και έτσι $b > 2^{m-1}$ και $c > 2^{m-1}$, οπότε $b+c > 2^m$, άτοπο. Άρα ο 2^{m-1} διαιρεί το $b+a$. Αν είναι $b+a \geq 2^m = b+c$, τότε $a \geq c$, άτοπο. Άρα $b+a = 2^{m-1}$. Έτσι έχουμε $b = 2^{m-1} - a$, $c = 2^{m-1} + a$, $d = 2^k - a$. Τώρα χρησιμοποιώντας την ισότητα $bc = ad$ έχουμε $2^k a = 2^{2m-2}$. Αλλά ο a είναι περιττός, οπότε πρέπει $a = 1$.



26$^{\eta}$ Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1985

Τόπος Διοργάνωσης:	Φινλανδία (Γιόουτσα – Ελσίνκι)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	Καθηγητής I. Laine (Joensuu)
Συμμετοχή:	38 χώρες με 6 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες Συμμετοχές:	Ιράν, Ισλανδία, Ταϊβάν.
Μέγιστη Βαθμολογία:	42 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες:	Ρουμανία (201), Η.Π.Α. (180), Ουγγαρία (168), Βουλγαρία (165), Βιετνάμ (144), Σοβ. Ένωση (140), Δ. Γερμανία (139), Αν. Γερμανία (136).

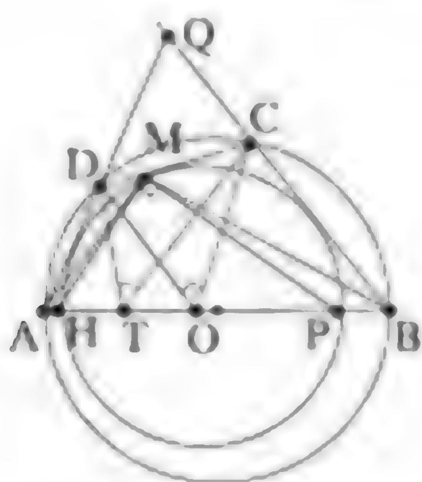
Η Ελληνική ομάδα πήρε μέρος με τους μαθητές Δ. Γουνόπουλο, Η. Τζερμιά (Αργυρό μετάλλιο), Β. Μισούλη (Χάλκινο μετάλλιο), Ι. Μαραντίδη, Ζ. Μπομπολάκη, Ι. Συνοδινό και ήταν 20$^{\eta}$ στην τελική βαθμολογία. Αρχηγός της ομάδας ήταν ο κ. Θεόδωρος Μπόλης και υπαρχηγός ο κ. Δημήτρης Κοντογιάννης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

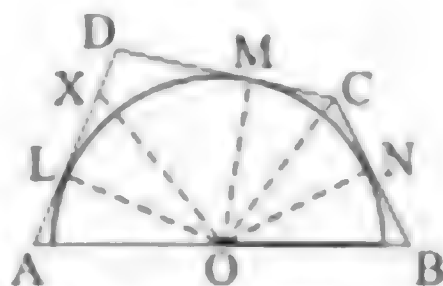
Ένας κύκλος έχει κέντρο στην πλευρά AB του εγγεγραμμένου τετράπλευρου ABCD του οποίου οι άλλες τρείς πλευρές είναι εφαπτόμενες στον κύκλο. Να αποδείξτε ότι $AD + BC = AB$.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Είναι προφανές ότι οι γωνίες $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ είναι οξείες. Έστω ΗΡ η διάμετρος του δεδομένου κύκλου, οπότε θα είναι $\hat{HMP} = 90^0$ και



Σχήμα 97



Σχήμα 98

$A\widehat{M}B > 90^\circ \Rightarrow AB > MB$ και $AB > MA$. Από το εγγράψιμο ABCD έχουμε: $Q\widehat{C}D = \widehat{A} < 90^\circ \Rightarrow MB > CB$. Τελικά AB > CB. Έστω T σημείο της AB ώστε BC = BT. Τότε $C\hat{T}B = \dfrac{180^\circ - \hat{B}}{2} = \dfrac{A\hat{D}C}{2}$ (από το εγγράψιμμο ABCD), οπότε $C\hat{T}P = O\hat{D}C$. Άρα OTCD (ή TOCD) εγγράψιμμο σε κύκλο και $D\hat{T}C = D\hat{O}C = 180^\circ - \dfrac{180^\circ - Q\hat{D}C}{2} - \dfrac{180^\circ - Q\hat{C}D}{2} = \dfrac{Q\hat{D}C + Q\hat{C}D}{2} = \dfrac{180^\circ - \hat{Q}}{2} =$

$$= \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}.$$

Άρα έχουμε

$$D\hat{T}A = 180^\circ - D\hat{T}C - B\hat{T}C = 180^\circ - \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2} - \frac{180^\circ - \hat{B}}{2} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}.$$

$$A\hat{D}T = 180^\circ - \hat{A} - D\hat{T}A = 180^\circ - \hat{A} - \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}.$$

Επομένως και το τρίγωνο ADT είναι ισοσκελές με AD = AT και επειδή BC = BT θα έχουμε: AD + BC = AB.

2ος Τρόπος

Έστω ότι ο κύκλος εφάπτεται τις AD, CD, BC στα σημεία L, M, N αντιστοίχως. Θεωρούμε το X στην ευθεία AD στην ίδια πλευρά του A όπως και του D, έτσι ώστε AX = AO, όπου O είναι το κέντρο του κύκλου. Τώρα τα τρίγωνα OLX και OMC είναι ίσα, γιατί OL = OM (ακτίνες του ίδιου κύ-

κλου), $O\hat{L}X = 90^\circ = O\hat{M}C$, και $O\hat{X}L = (180^\circ - A)/2 = \ = \frac{B\hat{C}M}{2} = O\hat{C}M$, αφού το ABCD είναι εγγεγραμμένο. Άρα θα έχουμε $LX = MC$, οπότε $OA = AL + MC$. Ομοίως, $OB = BN + MD$. Αλλά $MC = CN$ και $MD = DL$, αφού οι εφαπτόμενες από το ίδιο σημείο έχουν ίσα μήκη, οπότε θα έχουμε $AB = OA + OB = \ AL + LD + CN + NB = AD + BC$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Έστω ότι n και k είναι πρώτοι μεταξύ τους θετικοί ακέραιοι αριθμοί με $k < n$. Κάθε αριθμός στο σύνολο $M = \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ είναι χρωματισμένος μπλε ή άσπρος. Για κάθε i μέσα στο M και το i και το $n - i$ έχουν το ίδιο χρώμα. Για κάθε i μέσα στο M που δεν ισούται με το k, και το i και το $|i - k|$ έχουν το ίδιο χρώμα. Να αποδείξετε ότι όλοι οι αριθμοί στο M πρέπει να έχουν το ίδιο χρώμα.

Λύση:

Οι n και k είναι πρώτοι μεταξύ τους, οπότε οι αριθμοί, $0, k, 2k, \ldots, (n-1)k$ σχηματίζουν ένα πλήρες σύνολο από υπόλοιπα $\bmod n$. Έτσι οι αριθμοί k, 2k, ..., $(n-1)k$ είναι ισοϋπόλοιποι modn με τους αριθμούς 1, 2, .., $n-1$ με κάποια σειρά. Υποθέτουμε ότι το ik είναι ισοϋπόλοιπο με το r και το $(i+1)k$ είναι ισοϋπόλοιπο με το s. Τότε θα είναι $(i+1)k - ik = s - r + \pi o\lambda(n) \Leftrightarrow k = s - r + \pi o\lambda(n)$,και αφού k<n οι δυνατές περιπτώσεις είναι να έχουμε $k = s - r$ ή $k = s - r + n$, δηλαδή θα έχουμε $s = r + k$ ή $s = r + k - n$. Εάν $s = r + k$, τότε αμέσως έχουμε ότι $r = s - k$ και s έχουν το ίδιο χρώμα. Εάν $s = r + k - n$, τότε $r = n - (k - s)$, οπότε από την υπόθεση το r έχει το ίδιο χρώμα με το $k - s$ και το $k - s$ έχει το ίδιο χρώμα με το s. Έτσι σε οποιαδήποτε περίπτωση τα r και s έχουν το ίδιο χρώμα. Δίνοντας στο i τιμές από το 1 ως το $n - 2$, διαπιστώνουμε ότι όλοι οι αριθμοί του συνόλου M έχουν το ίδιο χρώμα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Για οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ με ακέραιους συντελεστές, ο αριθμός των περιττών συντελεστών συμβολίζεται με $o(P)$. Για $i = 0, 1, 2, \ldots$ έστω ότι $Q_i(x) = (1 + x)^i$. Να αποδείξετε ότι αν

$i_1, i_2, \ldots, i_n$ είναι ακέραιοι, τέτοιοι ώστε να επαληθεύουν τις σχέσεις $0 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_n$, τότε: $o(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \cdots + Q_{i_n}) \ge o(Q_{i_1})$.

Λύση

Αν το i είναι δύναμη του 2, τότε όλοι οι συντελεστές του Q_i είναι άρτιοι εκτός του πρώτου και του τελευταίου. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να το αποδείξουμε αυτό. Ο συντελεστής του x^r στο πολυώνυμο $Q_i(x)$ είναι $\binom{i}{r} = \frac{i!}{r!(i-r)!}$. Υποθέτουμε ότι $0 < r < i$. Τότε $\binom{i}{r} = \binom{i-1}{r-1} \cdot \frac{i}{r}$, όπου ο αριθμός $\binom{i-1}{r-1}$ είναι ακέραιος και από την υπόθεσή μας $i = 2^{\lambda} > r$, οπότε ο αριθμός $\binom{i}{r}$ είναι άρτιος.

Έστω ότι $Q = Q_{i_1} + \cdots + Q_{i_n}$. Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο i_n. Αν $i_n = 1$, τότε πρέπει να έχουμε $n = 2, i_1 = 0$ και $i_2 = 1$, οπότε $Q = 2 + x$, που έχει τον ίδιο αριθμό από περιττούς συντελεστές όπως το $Q_{i_1} = 1$. Υποθέτουμε ότι αυτό είναι αληθές για μικρότερες τιμές του i_n. Θεωρούμε το m δύναμη του 2 έτσι ώστε $m \le i_n < 2m$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις $i_1 \ge m$ και $i_1 < m$. Θεωρούμε πρώτα $i_1 \ge m$. Τότε $Q_{i_1} = (1+x)^m A$, $Q = (1+x)^m B$, όπου A και B έχουν βαθμό μικρότερο από το m. Επιπλέον, τα A και B είναι της ίδιας μορφής όπως το Q_{i_1} και Q (όλα τα i_j μειώνονται κατά m, οπότε έχουμε με επαγωγή ότι $o(A) \le o(B)$.

Επίσης $o(Q_{i_1}) = o((1+x)^m A) = o(A + x^m A) = 2o(A) \le 2o(B) = o(B + x^m B) = o((1+x)^m B) = o(Q)$, που αποδεικνύει το ζητούμενο για το i_n. Απομένει η περίπτωση με $i_1 < m$. Θεωρούμε το r έτσι ώστε $i_r < m < i_{r+1}$ και θέτουμε $A = Q_{i_1} + \cdots + Q_{i_r}$, $(1+x)^m B = Q_{i_{r+1}} + \cdots + Q_{i_n}$, έτσι ώστε A και B να έχουν βαθμό < m. Τότε

$$o(Q) = o(A + (1+x)^m B) = o(A + B + x^m B) = o(A + B) + o(B).$$

Ισχύει όμως ότι

$$o(A-B)+o(B) \geq o(A-B+B)=o(A),$$

επειδή ένας συντελεστής του A είναι περιττός μόνο αν ακριβώς ένας από τους αντίστοιχους συντελεστές του $A-B$ και B είναι περιττός. Αλλά $o(A-B)=o(A+B)$, επειδή οι αντίστοιχοι συντελεστές του $A-B$ και $A+B$ είναι είτε ίσοι ή της ίδιας ισοτιμίας. Επομένως $o(A+B)+o(B) \geq o(A)$. Αλλά $o(A) \geq o(Q_{i_1})$, (απόδειξη με επαγωγή), οπότε $o(B) \geq o(Q_{i_1})$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται ένα σύνολο M από 1985 διακεκριμένους ακέραιους θετικούς αριθμούς κανένας από τους οποίους δεν έχει πρώτο διαιρέτη μεγαλύτερο από 23. Να αποδείξετε ότι το M περιέχει ένα υποσύνολο 4 στοιχείων των οποίων το γινόμενο να είναι η τέταρτη δύναμη ενός ακέραιου αριθμού.

Λύση:

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σύνολο τουλάχιστον $3 \cdot 2^n + 1$ αριθμών των οποίων οι πρώτοι διαιρέτες είναι όλοι από ένα σύνολο με η στοιχεία. Έτσι κάθε αριθμός μπορεί να γραφτεί ως $p_1^{r_1} \ldots p_n^{r_n}$ για κάποιους μη-αρνητικούς ακέραιους r_i, όπου $\{p_1, \ldots, p_n\}$ είναι το σύνολο των πρώτων κοινών παραγόντων σε όλους τους αριθμούς. Ταξινομούμε κάθε r_i ως άρτιο ή περιττό. Αυτό μας δίνει 2^n περιπτώσεις αριθμών. Αλλά υπάρχουν περισσότεροι από $2^n + 1$ αριθμοί, οπότε δύο αριθμοί έχουν την ίδια ταξινόμηση και έτσι το γινόμενό τους είναι τέλειο τετράγωνο. Μετακινούμε αυτούς τους δύο αριθμούς και παρατηρούμε τους εναπομείναντες. Υπάρχουν ακόμα περισσότεροι από $2^n + 1$, οπότε βρίσκουμε κι άλλο ζευγάρι με την ίδια ταξινόμηση. Μπορούμε να επαναλάβουμε την διαδικασία μέχρι να βρούμε $2^n + 1$ ζευγάρια με γινόμενο τέλειο τετράγωνο. Όταν θα έχουμε μετακινήσει 2^n ζευγάρια, θα υπάρχουν ακόμα $2^n + 1$ αριθμοί εναπομείναντες, πράγμα που είναι αρκετό για να βρούμε το τελικό ζευγάρι. Αλλά τώρα μπορούμε να ταξινομήσουμε αυτά τα ζευγάρια σύμφωνα με το αν κάθε εκθέτης στην τετραγωνική ρίζα του γινομένου τους είναι άρτιος ή περιττός. Ομοίως θα βρούμε

δύο ζευγάρια με την ίδια ταξινόμηση. Το γινόμενο αυτών των τεσσάρων αριθμών είναι τώρα η τέταρτη δύναμη.

Εφαρμόζοντας αυτό στην υπόθεση που έχει δοθεί, υπάρχουν 9 πρώτοι μικρότεροι ή ίσοι με 23 (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23), οπότε χρειαζόμαστε τουλάχιστον $3.512+1=1537$ αριθμούς για να λειτουργήσει η παραπάνω διαδικασία και έχουμε 1985. Το κλειδί είναι να βρούμε την τέταρτη δύναμη σε δύο στάδια, βρίσκοντας πρώτα πολλά τετράγωνα. Αν προσπαθήσουμε να πάμε κατευθείαν στην τέταρτη δύναμη, αυτή η διαδικασία δεν θα λειτουργήσει (σίγουρα χρειαζόμαστε περισσότερους από 5 αριθμούς για να είμαστε βέβαιοι ότι θα βρούμε τέσσερις όπου το άθροισμα στο $0 \bmod 4$, και 5^9 είναι πάρα πολύ μεγάλο).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Ένας κύκλος κέντρου Ο περνάει από τις κορυφές Α και C του τριγώνου ABC και τέμνει τα τμήματα ΑΒ και BC πάλι σε διακεκριμένα σημεία Κ και Ν αντίστοιχα. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των ABC και KBN τέμνονται σε ακριβώς δύο διακεκριμένα σημεία Β και Μ. Να αποδείξετε ότι η γωνία ΟΜΒ είναι ορθή.

Λύση:

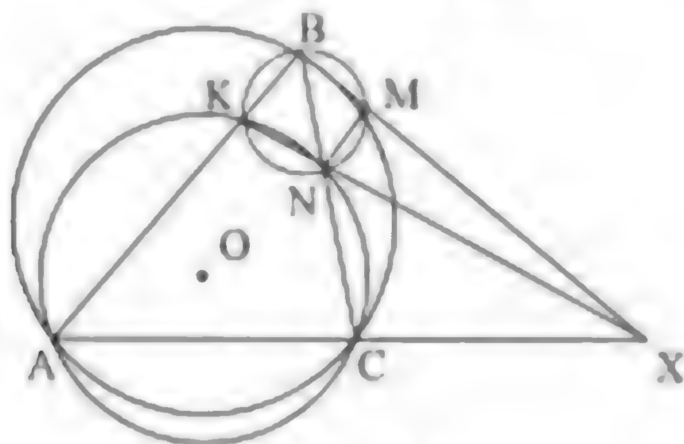
Οι τρεις ριζικοί άξονες των τριών κύκλων λαμβανομένων ανά δύο ΒΜ, ΝΚ και AC συντρέχουν. Έστω ότι το Χ είναι το σημείο της τομής. [Δεν μπορούν όλοι να είναι παράλληλοι, αλλιώς τα Β και Μ θα συμπίπτανε]. Το πρώτο βήμα είναι να δείξουμε ότι το XMNC είναι εγγράψιμο.

Ανάλογα με το σχήμα θα έχουμε :

$$X\hat{M}N = 180^\circ - X\hat{C}N \text{ ή } X\hat{M}N = 180^\circ - B\hat{M}N = 180^\circ - A\hat{K}N = 180^\circ - A\hat{C}N,$$

αφού από τα εγγράψιμα BMNK και ACNK έχουμε ότι

$$B\hat{M}N = A\hat{K}N = X\hat{C}N.$$



Σχήμα 99

Επομένως και το τετράπλευρο XMNC είναι εγγράψιμο, οπότε θα έχουμε:

$$XM \cdot XB = XK \cdot NX = XO^2 - ON^2$$
$$BM \cdot BX = BN \cdot BC = BO^2 - ON^2,$$

από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει

$$BO^2 - XO^2 = BX \cdot (BM - XM) = (BM + XM) \cdot (BM - XM) = BM^2 - XM^2.$$

Από την ισότητα $BO^2 - XO^2 = BM^2 - XM^2$ έχουμε ότι $OM \perp XB$ δηλαδή $O\hat{M}B = 90^\circ$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Για κάθε πραγματικό αριθμό x_1 κατασκευάζουμε την ακολουθία $x_1, x_2, \ldots$ θέτοντας

$$x_{n+1} = x_n\left(x_n + \frac{1}{n}\right), \text{ για κάθε } n = 1, 2, \ldots$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική τιμή του x_1 για την οποία ισχύει

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1, \text{ για κάθε } n = 1, 2, \ldots$$

Λύση

Θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε δύο ακολουθίες (a_n) και (b_n) έτσι ώστε να ισχύει

$$a_n < x_n < b_n, \; n = 1, 2, \ldots,$$

όπου η ακολουθία (a_n) θα είναι γνησίως αύξουσα, ενώ η ακολουθία (b_n) θα είναι γνησίως φθίνουσα.

Επειδή η ακολουθία (x_n) πρέπει να είναι γνησίως αύξουσα και με θετικούς όρους μικρότερους του 1, θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$x_{n+1} - x_n = x_n^2 + \frac{1}{n}x_n - x_n = x_n\left[x_n + \left(\frac{1}{n} - 1\right)\right] > 0,$$

για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, δηλαδή

$$1 - \frac{1}{n} < x_n < 1, \; n = 1, 2, \ldots.$$

Για κάθε θετικό ακέραιο n ορίζουμε τη συνάρτηση $f_n(x)$ ως εξής:

$$f_1(x)=x \text{ και } f_{n+1}(x)=f_n(x)\left[f_n(x)+\frac{1}{n}\right],\ n=1,2,\dots .$$

Τότε θα έχουμε

$$f_1(x_1)=x_1,\ f_2(x_1)=f_1(x_1)\left[f_1(x_1)+1\right]=x_1(x_1+1)=x_2$$

και αν υποθέσουμε ότι $f_k(x_1)=x_k$, τότε θα έχουμε

$$f_{k+1}(x_1)=f_k(x_1)\left[f_k(x_1)+\frac{1}{k}\right]=x_k\left(x_k+\frac{1}{k}\right)=x_{k+1}.$$

Επομένως για κάθε θετικό ακέραιο n θα ισχύει: $f_n(x_1)=x_n$, δηλαδή όταν δίνεται ο x_1 μέσω της συνάρτησης f_n ορίζεται ο x_n, $n=1,2,\dots$.

Ομοίως χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς το n, αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση $f_n(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,1]$, για κάθε $n=1,2,\dots$. Όμως έχουμε $f_n(0)=0$ και $f_n(1)>1$, για κάθε $n=1,2,\dots$.

Επομένως για κάθε $n=1,2,\dots$ υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί a_n, b_n με $0<a_n<b_n<1$ τέτοιοι ώστε να ισχύουν

$$f_n(a_n)=1-\frac{1}{n} \text{ και } f_n(b_n)=1,\ \text{για κάθε } n=1,2,\dots .$$

Έτσι ορίζονται δύο ακολουθίες (a_n), $n=1,2,\dots$ και (b_n), $n=1,2,\dots$, για τις οποίες έχουμε επιπλέον ότι

$$f_{n+1}(a_n)=f_n(a_n)\left[f_n(a_n)+\frac{1}{n}\right]=1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n+1}=f_{n+1}(a_{n+1})$$

$$f_{n+1}(b_n)=f_n(b_n)\left[f_n(b_n)+\frac{1}{n}\right]=1+\frac{1}{n}>1=f_{n+1}(b_{n+1}),$$

οπότε, λόγω του ότι η συνάρτηση $f_{n+1}(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, προκύπτει ότι

$$a_n<a_{n+1} \text{ και } b_n>b_{n+1},\ \text{για κάθε } n=1,2,\dots,$$

δηλαδή η ακολουθία (a_n), $n=1,2,\dots$ είναι γνησίως αύξουσα, ενώ η ακο-

λουθία (b_n), $n=1,2,\ldots$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Από τα προηγούμενα έχουμε

$$0<a_1<a_2<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots<b_{n+1}<b_n<\cdots<b_1<1, \qquad (1)$$

και επειδή το σύνολο $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots\}$ είναι φραγμένο άνω με άνω φράγμα κάθε b_n, $n=1,2,\ldots$, σύμφωνα με το αξίωμα της συνέχειας των πραγματικών αριθμών, θα υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα x_1 του συνόλου A, που συμβολίζεται με $\sup A=x_1$. Λόγω των ανισοτήτων (1) θα ισχύει:

$$a_n<x_1<b_n, \text{ για κάθε } n=1,2,\ldots,$$

οπότε θα είναι και

$$f_n(a_n)<f_n(x_1)<f_n(b_n),\ n=1,2,\ldots$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{n}<x_n<1,\ n=1,2,\ldots \qquad (2)$$

Επιπλέον θα έχουμε [λόγω της (2)]

$$x_{n+1}=x_n\left(x_n+\frac{1}{n}\right)>x_n\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)=x_n,\ n=1,2,\ldots,$$

οπότε τελικά θα ισχύει:

$$0<x_n<x_{n+1}<1, \text{ για κάθε } n=1,2,\ldots.$$

Μένει να αποδείξουμε ακόμη ότι ο αριθμός $x_1=\sup A$, που προσδιορίσαμε παραπάνω, είναι μοναδικός. Αυτό προκύπτει από το θεώρημα του κιβωτισμού ή θεώρημα των Cantor-Dedekind, για το οποίο όμως απαιτείται η επιπλέον υπόθεση ότι $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

Πράγματι έχουμε

$$f_n(b_n)-f_n(a_n)=b_n\left(b_n+\frac{1}{n}\right)-a_n\left(a_n+\frac{1}{n}\right)>b_n\left(a_n+\frac{1}{n}\right)-a_n\left(a_n+\frac{1}{n}\right)$$

$$=(b_n-a_n)\cdot\left(a_n+\frac{1}{n}\right)>b_n-a_n$$

αφού ισχύει ότι $a_n+\frac{1}{n}\geq 1$ ή $a_n\geq 1-\frac{1}{n}$. [Αν ίσχυε ότι $a_n<1-\frac{1}{n}$, τότε θα

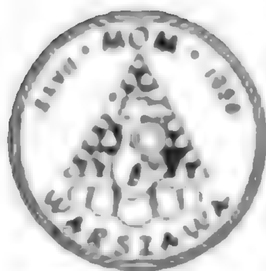
είχαμε $f_1(a_n) = a_n < 1 - \frac{1}{n}$ και αν υποθέσουμε ότι $f_k(a_n) < 1 - \frac{1}{n}$ για $k < n$, τότε προκύπτει ότι:

$$f_{k+1}(a_n) = f_k(a_n)\left[f_k(a_n) + \frac{1}{k}\right] < \left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) < 1 - \frac{1}{n}$$ δηλαδή θα ισχύει και $f_n(a_n) < 1 - \frac{1}{n}$, για κάθε n, που είναι άτοπο.]

Έτσι καταλήγουμε στις ανισότητες

$$0 < b_n - a_n \leq f_n(b_n) - f_n(a_n) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

και αφού $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, θα ισχύει και ότι $\lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$.



27η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα 1986

Τόπος Διοργάνωσης: Πολωνία (Βαρσοβία)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών: S. Balcerzyk (Παν/μιο Τορούν)
Συμμετοχή: 37 χώρες με 6 το πολύ μαθητές η καθεμία
Μέγιστη Βαθμολογία: 42 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες: Σοβ. Ένωση και Η.Π.Α. (203), Δ. Γερμανία (196), Ταϊβάν (177), Αν. Γερμανία (172), Ρουμανία (171), Ουγγαρία (168), Βουλγαρία (161).

Η Ελληνική ομάδα πήρε μέρος με τους μαθητές Χ. Ταμβάκη (Χάλκινο μετάλλιο), Δ. Κοντοκώστα, Θ. Θεοδοσόπουλο, Τ. Σταμκόπουλο (Χάλκινο μετάλλιο), Α. Πολίτη, Π. Βλάμο και ήταν 23η στην τελική βαθμολογία. Αρχηγός της ομάδας ήταν ο κ. Θεόδωρος Μπόλης και υπαρχηγός ο κ. Δημήτρης Κοντογιάννης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω d ένας θετικός ακέραιος διάφορος των 2, 5, 13. Να αποδείξετε ότι μπορούμε να βρούμε δύο διαφορετικούς αριθμούς $a, \beta \in \{2, 5, 13, d\}$ τέτοιους ώστε ο αριθμός $a\beta - 1$ να μην είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι οι αριθμοί 2d - 1, 5d - 1, 13d - 1 είναι όλοι τέλεια τετράγωνα, δηλαδή

$$2d - 1 = x^2, \quad 5d - 1 = y^2, \quad 13d - 1 = z^2$$

για κάποιους ακεραίους x, y, z.

Από την πρώτη σχέση έχουμε ότι ο x είναι περιττός, οπότε $x^2 \equiv 1 \pmod 8$ και $2d = x^2 + 1 \equiv 2 \pmod 8$. Άρα ο d είναι περιττός. Τότε όμως οι αριθμοί y, z είναι άρτιοι, οπότε μπορούμε να θέσουμε $y = 2\kappa$, $z = 2\lambda$ για δύο ακεραίους κ, λ. Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες από τις αρχικές σχέσεις, έχουμε:

$$z^2 - y^2 = 8d \quad \text{ή} \quad \lambda^2 - \kappa^2 = 2d \text{ ή } (\lambda - \kappa)(\lambda + \kappa) = 2d.$$

Επειδή οι αριθμοί $\lambda - \kappa$, $\lambda + \kappa$ είναι είτε και οι δύο άρτιοι είτε και οι δύο περιττοί, καταλήγουμε στο ότι ο d πρέπει να είναι άρτιος, που είναι άτοπο.

Έτσι κάποιος από τους αριθμούς $2d - 1$, $5d - 1$, $13d - 1$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Έστω ένα τρίγωνο $A_1A_2A_3$ και ένα σημείο P_0 στο ίδιο επίπεδο. Έστω $A_k = A_{k-3}$ για κάθε $k \geq 4$. Κατασκευάζουμε τα σημεία $P_1, P_2, P_3, \ldots$ έτσι ώστε το σημείο P_{k+1} να είναι η εικόνα του σημείου P_k μετά από μία στροφή κατά 120° σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού με κέντρο το A_k, για $k = 0, 1, 2, \ldots$. Αν $P_{1986} = P_0$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A_1A_2A_3$ είναι ισόπλευρο.

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι η σύνθεση τριών διαδοχικών τέτοιων στροφών είναι μία παράλληλη μετατόπιση.

Αυτό όμως σημαίνει ότι και 1986 τέτοιες στροφές αποτελούν μία παράλληλη μετατόπιση, αφού $1986 = 3 \cdot 662$. Επειδή $P_{1986} = P_0$, αυτό σημαίνει ότι η μετατόπιση είναι ίση με μηδέν. Κάτι τέτοιο όμως συμβαίνει μόνο όταν το τρίγωνο $A_1A_2A_3$ είναι ισόπλευρο. Θεωρούμε τους κύκλους $C_1(A_1, A_1A_2)$ και $C_2(A_3, A_3A_2)$ και σημεία $P \in C_1$, $Q \in C_2$ τέτοια ώστε η στροφή κατά 120° σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού γύρω από το A_1 να μεταφέρει το P στο A_2 και η αντίστοιχη στροφή γύρω από το A_3 να φέρνει το A_2 στο Q. Τότε οι διαδοχικές στροφές κατά 120° σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού γύρω από τα A_1, A_2, A_3 μεταφέρουν το P στο Q. Για να έχουμε μετατόπιση ίση με μηδέν, πρέπει $P \equiv Q$. Τότε

$$A_1\hat{A}_2A_3 = A_1\hat{A}_2P + A_3\hat{A}_2P = 30° + 30° = 60°$$

και

$$A_2P = 2A_1A_2\text{συν}30° = 2A_2A_3\text{συν}30°,$$

δηλαδή $A_1A_2 = A_2A_3$ οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Σε κάθε κορυφή ενός κανονικού πενταγώνου γράφουμε έναν ακέ-

ραιο, τέτοιον ώστε το άθροισμα όλων των αριθμών να είναι θετικός. Αν τρεις διαδοχικές κορυφές έχουν τους ακεραίους x, y, z (με αυτή τη σειρά) και y < 0 τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε τους αριθμούς x, y, z με τους x + y, -y, z + y, αντίστοιχα. Ακολουθούμε αυτή τη διαδικασία έως ότου να μην υπάρχει κανένας αριθμός μικρότερος από το μηδέν. Να εξετάσετε αν η διαδικασία αυτή πάντοτε τερματίζει μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Λύση

Έστω x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 οι αριθμοί με $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = S > 0$.
Θεωρούμε την παράσταση

$$F = \sum_{i=1}^{5} |x_i| + |x_i + x_{i+1}| + |x_i + x_{i+1} + x_{i+2}| + |x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}|$$

όπου ορίζουμε $x_6 = x_1$, $x_7 = x_2$, $x_8 = x_3$.

Ας υποθέσουμε ότι $x_3 < 0$ οπότε στο επόμενο βήμα θα έχουμε τους αριθμούς $(x_1, x_2 + x_3, -x_3, x_4 + x_3, x_5)$ και η παράσταση F θα έχει μία άλλη τιμή, F'.

Όμως έχουμε $F' - F = |S + x_3| - |S - x_3| < 0$, αφού $x_3 < 0$, οπότε $F' < F$, δηλαδή η τιμή της παράστασης F μικραίνει μετά από κάθε βήμα.

Όμως η F παίρνει ακέραιες και θετικές τιμές, οπότε η διαδικασία κάποτε θα τελειώσει μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Έστω Α, Β δύο διαδοχικές κορυφές ενός κανονικού n-γώνου ($n \geqslant 5$) με κέντρο Ο. Ένα τρίγωνο XYZ το οποίο είναι ίσο και αρχικά συμπίπτει με το ΟΑΒ, κινείται στο επίπεδο με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε τα σημεία Y, Z να βρίσκονται στην περιφέρεια του n-γώνου και το σημείο X να βρίσκεται στο εσωτερικό του. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του X.

Λύση

Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ότι (ΑΒ) = 2. Θεωρούμε το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το Α, άξονα xx' παράλληλο με την ΑΒ και τον ημιάξονα Αy να έχει κατεύθυνση προς το εσωτερικό το n-γώνου.

Ας υποθέσουμε ότι το Ζ κινείται κατά μήκος της ΑΒ με φορά από το Β στο Α. Θέτουμε $\varphi = \widehat{YZA}$, Μ το μέσο του ΑΒ και X(x, y) οι συντεταγμένες του σημείου X. Έχουμε:

$\widehat{XZY} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$, οπότε θα είναι $(XZ) = \left(\eta\mu\frac{\pi}{\eta}\right)^{-1}$ και

$$y = (XZ)\eta\mu\left(\varphi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = \eta\mu\varphi + \sigma\varphi\frac{\pi}{\nu}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi .$$

Επίσης, $(BY)\eta\mu\frac{2\pi}{n} = (YZ)\ \eta\mu\varphi = 2\eta\mu\varphi$ και $(MX) = \sigma\varphi\frac{\pi}{n}$, οπότε θα είναι

$$x = (MY)\ \sigma\upsilon\nu\varphi - (BY)\ \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{n} + (MX)\ \eta\mu\varphi$$

$$= \sigma\upsilon\nu\varphi + \left(\sigma\varphi\frac{\pi}{n} - 2\sigma\varphi\frac{2\pi}{n}\right)\eta\mu\varphi = \sigma\upsilon\nu\varphi + \varepsilon\varphi\frac{\pi}{n}\ \eta\mu\varphi = y\ \varepsilon\varphi\frac{\pi}{n}.$$

Συνεπώς, ο γεωμετρικός τόπος του X είναι ένα «αστέρι» που αποτελείται από n ευθύγραμμα τμήματα με κοινό άκρο το κέντρο O του n-γώνου.

Το σημείο X κινείται από το O προς το άλλο άκρο ενός ευθύγραμμου τμήματος, στη συνέχεια αντίστροφα πίσω προς το O, κατόπιν κατά μήκος ενός γειτονικού ευθυγράμμου τμήματος κλπ.

Επειδή $x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{\eta\mu^2\frac{\pi}{n}} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{n}}\right)\sigma\upsilon\nu^2\left(\varphi + \frac{\pi}{n}\right)$ το μήκος κάθε τέτοιου

τμήματος είναι $\frac{\left(1 - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{n}\right)}{\eta\mu\frac{\pi}{n}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{n}}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ τέτοιες ώστε: $f(2) = 0$, $f(x) \neq 0$ για κάθε $0 \leqslant x < 2$, $f(x\ f(y))\ f(y) = f(x + y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$.

Λύση

Είναι $f(x + 2) = f(x\ f(2))\ f(2) = 0$ για κάθε $x \geqslant 0$, άρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \geqslant 2$.

Έχουμε $f(y)\ f((2 - y)\ f(y)) = f(2) = 0$ για κάθε y με $y \geqslant 0$, $2 - y \geqslant 0$ δηλαδή για κάθε $0 \leqslant y < 2$ είναι $f(y)\ f((2 - y)\ f(y)) = 0$ ή $f((2 - y)\ f(y)) = 0$.

Άρα $(2 - y)\ f(y) \geqslant 2$ λόγω της δεύτερης δοσμένης σχέσης. Έτσι έχουμε

$$f(y) \geqslant \frac{2}{2 - y},\ \text{για}\ 0 \leqslant y < 2.$$

Ας υποθέσουμε ότι $f(y_0) > \frac{2}{2 - y_0}$ για κάποιο $0 \leqslant y_0 < 2$.

Έστω κ ο αριθμός για τον οποίο $f(y_0) = \frac{2}{2 - \kappa}$.

Προφανώς $y_0 < \kappa < 2$.

Έστω $x = 2 - \kappa > 0$. Τότε $f(x\, f(y_0)) = f(2) = 0$ άρα και $f(x + y_0) = f(x\, f(y_0))\, f(y_0) = 0$.

Όμως $x + y_0 = 2 - \kappa + y_0 < 2$, άτοπο, αφού $f(x) \neq 0$ για κάθε $0 \leqslant x < 2$.

Άρα δεν υπάρχει $0 \leqslant y_0 < 2$ τέτοιο ώστε η ανισότητα να είναι γνήσια, οπότε πρέπει $f(x) = \frac{2}{2 - x}$, $0 \leqslant x < 2$.

Έτσι, η μοναδική συνάρτηση που μπορεί να ικανοποιεί τις αρχικές σχέσεις είναι η

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{2 - x}, & 0 \leqslant x < 2 \\ 0, & x \geq 2 \end{cases}.$$

Πρέπει να επαληθεύσουμε ότι η παραπάνω συνάρτηση ικανοποιεί τους αρχικούς περιορισμούς. Προφανώς ισχύουν οι δύο πρώτοι. Για τον τρίτο παρατηρούμε ότι αν $y \geqslant 2$ τότε κάθε μέλος είναι μηδέν.

Αν $0 \leqslant y < 2$ τότε έχουμε $f(x\, f(y)) = f\left(\frac{2x}{2 - y}\right)$.

Αν $\frac{2x}{2 - y} \geqslant 2$, τότε $f\left(\frac{2x}{2 - y}\right) = 0$.

Όμως τότε $2x \geqslant 2\,(2 - y)$ ή $x + y \geqslant 2$, οπότε $f(x\, f(y)) = 0 = f(x + y)$.

Αν $\frac{2x}{2 - y} < 2$, τότε $x + y < 2$ και έχουμε

$$f\left(\frac{2x}{2 - y}\right) = \frac{2}{2 - \frac{2x}{2 - y}} = \frac{2 - y}{2 - y - x}, \text{ οπότε}$$

$$f(x\, f(y))\, f(y) = \frac{2 - y}{2 - y - x} \cdot \frac{2}{2 - y} = \frac{2}{2 - y - x} = f(x + y),$$

δηλαδή η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Θεωρούμε ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων στο επίπεδο, καθένα από τα οποία έχει ακέραιες συντεταγμένες. Είναι δυνατόν να χρωματίσουμε τα σημεία κόκκινα ή άσπρα με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε για κάθε ευθεία L παράλληλη με τους άξονες η διαφορά (κατά απόλυτη τιμή) μεταξύ του πλήθους των κόκκινων και άσπρων σημείων που βρίσκονται πάνω στην L να μην είναι μεγαλύτερη του 1;

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή για να αποδείξουμε ότι κάτι τέτοιο είναι δυνατό. Έστω n το πλήθος των σημείων. Για $n = 1$ είναι προφανές.

Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς μικρότερους του n.

Επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο P και το χρωματίζουμε κόκκινο. Στη συνέχεια ένα άλλο σημείο στην ίδια γραμμή με το P και το χρωματίζουμε άσπρο. Κατόπιν επιλέγουμε ένα άλλο σημείο στην ίδια στήλη με το καινούργιο σημείο και το χρωματίζουμε κόκκινο. Συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία έως ότου δεν υπάρχουν άλλα δυνατά σημεία είτε επιλέξαμε ένα σημείο στην ίδια στήλη με το P. (Η διαδικασία πάντα τελειώνει αφού έχουμε πεπερασμένο πλήθος σημείων). Έστω Q το τελευταίο σημείο που επιλέξαμε και S το σύνολο όλων των επιλεγμένων σημείων.

Αν το Q είναι στην ίδια στήλη με το P, τότε θα είναι άσπρο, αφού τα σημεία της ίδιας στήλης είναι κόκκινα και τα σημεία της ίδιας γραμμής άσπρα.

Κάθε γραμμή και στήλη περιέχει τώρα το ίδιο πλήθος κόκκινων και άσπρων σημείων του S.

Από την υπόθεση της επαγωγής μπορούμε να χρωματίσουμε τα υπόλοιπα $n-|S|$ σημεία ώστε να ικανοποιείται το ζητούμενο, και η προσθήκη των σημείων του $|S|$ δεν θα επηρεάσει την ιδιότητα αυτή.

Στην περίπτωση που το Q δεν είναι στην ίδια στήλη με το P, συνεχίζουμε από το P προς τα πίσω, δηλαδή διαλέγουμε ένα σημείο στην ίδια στήλη με το P και το χρωματίζουμε άσπρο. Κατόπιν διαλέγουμε ένα σημείο στην ίδια γραμμή με το καινούργιο σημείο και το χρωματίζουμε κόκκινο κλπ., έως ότου εξαντληθούν τα σημεία ή βρούμε ένα σημείο R που να αντιστοιχεί με το Q, δηλαδή να βρίσκεται στην ίδια γραμμή με το Q αν το Q χρωματίστηκε άσπρο ή να βρίσκεται στην ίδια στήλη με το Q αν το Q χρωματίστηκε κόκκινο. Έστω S το σύνολο όλων των χρωματισμένων σημείων ως τώρα.

Αν το R αντιστοιχεί με το Q τότε μπορούμε να ολοκληρώσουμε την επαγωγή όπως προηγουμένως. Διαφορετικά θα υπάρχει μία γραμμή ή στήλη που θα περιέχει το Q και κανένα αχρωμάτιστο σημείο. Το ίδιο θα συμβαίνει και για το R. Αυτές οι δύο ευθείες θα έχουν ένα παραπάνω άσπρο ή κόκκινο σημείο, ενώ όλες οι υπόλοιπες ευθείες έχουν το ίδιο πλήθος άσπρων ή κόκκινων σημείων. Αν χρωματίσουμε τα υπόλοιπα $n-|S|$ σημεία χρησιμοποιώντας την υπόθεση της επαγωγής, το ζητούμενο θα ισχύει, αφού καμία από τις δύο ευθείες με επιπλέον σημεία του S δεν έχει κάποιο σημείο που να μην ανήκει στο S.



28^{η} Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1987

Τόπος Διοργάνωσης:	Κούβα (Αβάνα)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	Καθηγητής M. Himenez Poso (Αβάνα)
Συμμετοχή:	42 χώρες με 6 το πολύ μαθητές [illegible]
Νέες Συμμετοχές:	Νικαράγουα, Παναμάς, Περού, Ουρουγουάη
Μέγιστη Βαθμολογία:	42 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες:	Ρουμανία (250), Δυτ. Γερμανία (248), Σοβ. Ένωση (235), Αν. Γερμανία (231), Η.Π.Α. (220), Ουγγαρία (218), Βουλγαρία (210), Ταϊβάν (200).

Η Ελληνική ομάδα πήρε μέρος με τους μαθητές Χ. Ταμβάκη (Χάλκινο μετάλλιο), Γ. Ιβρισιμιτζή (Χάλκινο μετάλλιο),Β. Κομπότη (Χάλκινο μετάλλιο), Δ. Κοντοκώστα (Χάλκινο μετάλλιο), Π. Βλάμο, Κ. Ζιάμα και ήταν 20^{η} στην τελική βαθμολογία. Αρχηγός της ομάδας ήταν ο κ. Θεόδωρος Μπόλης και υπαρχηγός ο Δημήτρης Κοντογιάννης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω $p_n(\kappa)$ το πλήθος των μεταθέσεων του συνόλου $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ που έχουν ακριβώς κ σταθερά σημεία ($\kappa \geqslant 0$, $n \geqslant 1$).

Να αποδείξετε ότι $\sum_{\kappa=0}^{n} \kappa\, p_n(\kappa) = n!$

Λύση

Το πλήθος των μεταθέσεων n αντικειμένων χωρίς κανένα σταθερό σημείο, σύμφωνα με την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού είναι:

$$p_n(0) = \binom{n}{0} n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)!$$

$$= n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Έτσι έχουμε

$$p_n(\kappa) = A \cdot B = \binom{n}{\kappa} \cdot p_{n-\kappa}(0) = \frac{n!}{\kappa!}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^{n-\kappa} \frac{1}{(n-\kappa)!}\right),$$

όπου A = πλήθος τρόπων επιλογής των κ σταθερών σημείων και B = πλήθος μεταθέσεων n - κ σημείων χωρίς σταθερά σημεία.

Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή:

Για n = 1 έχουμε

$$\sum_{\kappa=0}^{1} \kappa\, p_1(\kappa) = p_1(1) = 1 = 1!, \text{ δηλαδή ισχύει.}$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n \geqslant 1$. Τότε για n + 1 έχουμε

$$\sum_{\kappa=0}^{n+1} \kappa\, p_{n+1}(\kappa) = \sum_{\kappa=0}^{n+1} \frac{\kappa\,(n+1)!}{\kappa!}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \ldots + (-1)^{n-\kappa}\frac{1}{(n-\kappa)!} + (-1)^{n-\kappa+1}\frac{1}{(n-\kappa+1)!}\right)$$

$$= \sum_{\kappa=0}^{n+1} \frac{\kappa\,(n+1)!}{\kappa!}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \ldots + (-1)^{n-\kappa}\frac{1}{(n-\kappa)!}\right) + \sum_{\kappa=0}^{n+1} \frac{\kappa\,(n+1)!}{\kappa!}\,\frac{(-1)^{n-\kappa+1}}{(n-\kappa+1)!}$$

$$= \sum_{\kappa=0}^{n+1} \frac{\kappa\,(n+1)!}{\kappa!}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \ldots + (-1)^{n-\kappa}\frac{1}{(n-\kappa)!}\right) - (n+1) + 0 + \sum_{\kappa=1}^{n+1} \frac{\kappa\,(n+1)!}{\kappa!}\,\frac{(1-)^{n-\kappa+1}}{(n-\kappa+1)!}$$

$$= \sum_{\kappa=0}^{n+1} \frac{\kappa\,(n+1)!}{\kappa!}\, p_n(\kappa) - (n+1) + \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{(\kappa+1)(n+1)!}{(\kappa+1)!}\,\frac{(-1)^{n-\kappa}}{(n-\kappa)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{n!} \cdot n! - (n+1) + (n+1)\sum_{\kappa=0}^{n} \frac{n!}{\kappa!\,(n-\kappa)!}(-1)^{n-\kappa}$$

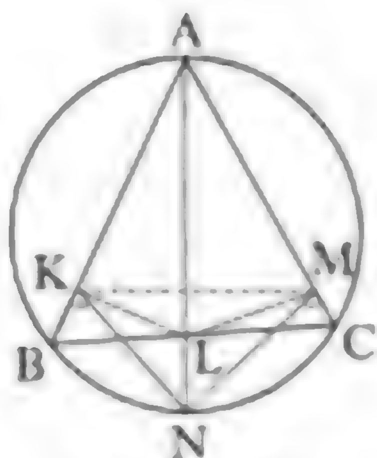
$$= (n+1)! - (n+1) + (n+1)(1-1)^n = (n+1)!$$

δηλαδή η σχέση ισχύει για n + 1, οπότε το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Σε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ABC η εσωτερική διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ τέμνει την BC στο L και τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου

ABC στο N. Από το L φέρουμε κάθετες προς τις AB, AC και έστω K, M τα ίχνη τους. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο AKNM και το τρίγωνο ABC έχουν ίσα εμβαδά.



Σχήμα 100

Λύση

Τα τρίγωνα AML και AKL είναι ίσα αφού έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και μία πλευρά κοινή, οπότε AK = AM, άρα η KM είναι κάθετη στην AN.

Έτσι έχουμε $(AKNM) = \frac{1}{2}(KM)(AN)$.

Το τετράπλευρο AMLK είναι εγγράψιμο (αφού έχει δύο γωνίες ορθές) σε κύκλο με διάμετρο AL, οπότε από το νόμο των ημιτόνων έχουμε $\frac{KM}{ημA} = AL$.

Τα τρίγωνα ABL και ANC είναι όμοια, αφού $\widehat{ABL} = \widehat{ANC}$ ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο, οπότε $\frac{AB}{AL} = \frac{AN}{AC}$.

Έχουμε διαδοχικά:

$$(ABC) = \frac{1}{2}(AB)(AC)ημA = \frac{1}{2}(AL)(AN)\,ημA = \frac{1}{2}(KM)(AN) = (AKNM).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$. Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο $k \geq 2$ υπάρχουν ακέραιοι $a_1, a_2, \dots, a_n$, όχι όλοι μηδέν τέτοιοι ώστε $|a_i| \leq k-1$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ και

$$\left|a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n\right| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

Λύση

Από την ανισότητα Cauchy-Schwartz έχουμε

$$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n| \le \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\cdot\sqrt{n}=\sqrt{n}.$$

Θεωρούμε όλες $\left(k^n\right)$ τις δυνατές τιμές της παράστασης

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,\ \text{όπου } a_i\in\{0,1,2,\ldots,k-1\}.$$

Κάθε τιμή θα ανήκει στο διάστημα $\left[0,(k-1)\sqrt{n}\right]$. Διαιρούμε αυτό το διάστημα σε k^n-1, οπότε από την αρχή της περιστεροφωλιάς θα υπάρχουν δύο τιμές που θα ανήκουν στο ίδιο υποδιάστημα. Αφαιρούμε τις δύο αυτές τιμές για να πάρουμε τις τιμές του $a_i\in\{0,\pm1,\ldots,\pm(k-1)\}$ και θα ισχύει

$$\left|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\right|\le\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f: $\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ τέτοια ώστε $f(f(n))=n+1987$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι αν $f(f(n))=n+\kappa$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ τότε ο κ πρέπει να είναι άρτιος.

(Στην περίπτωση αυτή έχουμε π.χ. $f(n)=n+\frac{\kappa}{2}$).

Έστω $f(m)=n$, όπου $m\equiv n(\mathrm{mod}\kappa)$.

Τότε θα αποδείξουμε ότι $f(m+\kappa t)=n+\kappa t$ και $f(n+\kappa t)=m+\kappa(t+1)$ για κάθε $t\in\mathbb{N}$.

Πράγματι, οι σχέσεις ισχύουν για $\kappa=1$, αφού $f(m)=n$ και $f(n)=f(f(m))=m+\kappa$.

Υποθέτουμε ότι ισχύουν για t και θα αποδείξουμε ότι ισχύουν για $t+1$.

Πράγματι έχουμε

$f(m+\kappa(t+1))=f(f(f(m+\kappa t)))=f(m+\kappa t)+\kappa=n+\kappa(t+1)$ και $f(n+\kappa(t+1))=f(f(f(n+\kappa t)))=f(n+\kappa t)+\kappa=m+\kappa(t+2)$

και η επαγωγή έχει ολοκληρωθεί.

Αν υποθέσουμε ότι $m<n$ τότε έχουμε $n=m+\alpha\kappa$ για κάποιον ακέραιο $\alpha>0$.

Όμως $m+\kappa=f(n)=f(m+\alpha\kappa)=n+\kappa\alpha$, άρα $m=n+\kappa(\alpha-1)\geqslant n$, άτοπο.

Όμοια, αν υποθέσουμε ότι $m \geqslant n$ τότε $m = n + ακ$ για κάποιον ακέραιο $α \geqslant 0$, και

$$n + κ = f(m + κ) = f(n + κ(α + 1)) = m + κ(α + 2),$$

δηλαδή $n = m + κ(α + 1) > m$, άτοπο.

Συνεπώς, αν $f(m) = n$, τότε οι m, n πρέπει να αφήνουν διαφορετικά υπόλοιπα modκ, δηλαδή οι κλάσεις ισοδυναμίας $m = 0, 1, 2, \ldots, κ - 1(\text{mod}κ)$ χωρίζονται σε ζεύγη (α, β) με $α \neq β$, τέτοια ώστε:

αν $x \equiv α(\text{mod}κ)$, τότε $f(x) \equiv β(\text{mod}κ)$και $x \equiv β(\text{mod}κ)$, οπότε $f(x) \equiv α(\text{mod}κ)$.

Κάτι τέτοιο όμως είναι δυνατό μόνο αν ο κ είναι άρτιος.

Συνεπώς, η ζητούμενη συνάρτηση δεν υπάρχει, αφού στην περίπτωσή μας $κ = 1987$, δηλαδή περιττός.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Έστω n ένας ακέραιος, $n \geqslant 3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν n σημεία του επιπέδου τέτοια ώστε η απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων να είναι άρρητη και το τρίγωνο που σχηματίζεται από οποιαδήποτε τριάδα σημείων να έχει μη-μηδενικό εμβαδόν.

Λύση

Έστω x_n το σημείο με συντεταγμένες (n, n^2) όπου $n = 1, 2, 3, \ldots$. Θα αποδείξουμε ότι η απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων είναι άρρητος αριθμός και ότι το τρίγωνο που σχηματίζουν οποιαδήποτε τρία σημεία έχει μη-μηδενικό ρητό εμβαδό.

Θεωρούμε τα σημεία x_m, x_n με $m < n$.

Τότε η απόστασή τους είναι ίση με $\sqrt{(n - m)^2 + (n^2 - m^2)^2} =$ $(n - m)\sqrt{1 + (n + m)^2}$ δηλαδή άρρητος αφού $(n + m)^2 < (n + m)^2 + 1 < (n + m + 1)^2$, οπότε $n + m < \sqrt{(n + m)^2 + 1} < n + m + 1$ και άρα η ρίζα δεν είναι ρητός.

Θεωρούμε τα σημεία $x_a = (a, a^2)$, $x_b = (b, b^2)$, $x_c = (c, c^2)$, $A = (c, b^2)$, $B = (b, a^2)$, $C = (c, a^2)$. Τότε $(x_a x_b x_c) = (x_a x_c C) - (x_a x_b B) - (x_b x_c A) - (x_b ACB) =$
$= \frac{1}{2}(c - a)(c^2 - a^2) - \frac{1}{2}(b - a)(b^2 - a^2) - \frac{1}{2}(c - b)(c^2 - b^2) - (c - b)(b^2 - a^2)$, δηλαδή ρητός.

Τέλος, επειδή τα σημεία ανήκουν στην καμπύλη $y = x^2$ ανά δύο δεν είναι συνευθειακά οπότε το παραπάνω εμβαδόν είναι πάντοτε μη-μηδενικό.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Έστω n ένας ακέραιος, $n \geqslant 2$. Αν ο αριθμός $κ^2 + κ + n$ είναι πρώτος

για όλους τους ακεραίους κ με $0 \leqslant \kappa \leqslant \sqrt{\frac{n}{3}}$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\kappa^2 + \kappa + n$ είναι πρώτος για κάθε ακέραιο κ με $0 \leqslant \kappa \leqslant n - 2$.

Λύση

Έστω $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ με $f(x) = x^2 + x + n$ και κ ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο ο $f(x)$ είναι σύνθετος.

Χρησιμοποιώντας αντιθετοαντστροφή, αρκεί να αποδείξουμε ότι, αν $\kappa \leqslant n - 2$, τότε επίσης $\kappa \leqslant \sqrt{\frac{n}{3}}$.

Έστω p ένας διαιρέτης του $f(\kappa) = \kappa^2 + \kappa + n$. Τότε προφανώς $p^2 \leqslant f(\kappa)$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

$p \leqslant \kappa$: Έστω $\kappa \equiv r \pmod{p}$, όπου $0 \leqslant r < p \leqslant \kappa$. Τότε όμως $f(\kappa) \equiv f(r) \pmod{p}$, δηλαδή $f(r) \equiv 0 \pmod{p}$, οπότε $f(r) = p$ ή $f(r)$ σύνθετος.

Η πρώτη περίπτωση αποκλείεται, αφού $p \leqslant \kappa \leqslant n - 2 < f(r)$ και η δεύτερη αποκλείεται επειδή $r < \kappa$ και ο κ είναι ο μικρότερος αριθμός με αυτή την ιδιότητα.

Έτσι πρέπει να έχουμε $p > \kappa$.

Κάνοντας πράξεις έχουμε $f(p - \kappa - 1) = p + 2p(p - \kappa - 1) + (f(\kappa) - p^2)$ που σημαίνει ότι $f(p - \kappa - 1) \equiv 0 \pmod{p}$ και $f(p - \kappa - 1) > p$.

Η πρώτη σχέση σημαίνει ότι είτε $f(p - \kappa - 1) = p$ ή $f(p - \kappa - 1)$ σύνθετος.

Η πρώτη περίπτωση αποκλείεται λόγω της τελευταίας ανισότητας, οπότε θα είναι ο $f(p - \kappa - 1)$ σύνθετος και $p - \kappa - 1 \geqslant \kappa$, αφού ο κ είναι ο μικρότερος αριθμός με $f(\kappa)$ σύνθετο.

Άρα έχουμε $p \geqslant 2\kappa + 1$, οπότε $4\kappa^2 + 4\kappa + 1 \leqslant p^2 \leqslant f(\kappa) = \kappa^2 + \kappa + n$.

Συνεπώς $3\kappa^2 < n \Rightarrow \kappa < \sqrt{\frac{n}{3}}$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.



$29^{η}$ Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1988

Τόπος Διοργάνωσης:	Αυστραλία (Καμπέρα)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	Καθηγητής R. Potts (Παν. Αδελαΐδας)
Συμμετοχή:	49 χώρες με 6 μαθητές η καθεμία
Νέες Συμμετοχές:	Ισημερινός, Χονγκ-Κονγκ, Ιρλανδία, Ν. Ζηλανδία, Ινδονησία, Αργεντινή, Φιλιππίνες, Ν. Κορέα, Σιγκαπούρη.
Μέγιστη Βαθμολογία:	42 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες:	Σοβ. Ένωση (217), Ρουμανία και Κίνα (201), Δυτ. Γερμανία (174), Βιετνάμ (166), Η.Π.Α. (153), Αν. Γερμανία (145), Βουλγαρία (144).

Η Ελληνική ομάδα πήρε μέρος με τους μαθητές Α. Οικονόμου (εύφημος μνεία), Χ. Αθανασιάδη (χάλκινο μετάλλιο), Π. Συμεωνίδη, Ε. Μουρούκο (εύφημος μνεία), Γ. Μιχάι και Δ. Σταθόπουλο (εύφημος μνεία). Αρχηγός της ομάδας ήταν ο κ. Θεόδωρος Μπόλης και υπαρχηγός ο κ. Δημήτρης Κοντογιάννης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Θεωρούμε δύο ομόκεντρους κύκλους στο επίπεδο με ακτίνες R και r, όπου R > r. Έστω P ένα σταθερό σημείο του μικρού κύκλου και B ένα μεταβλητό σημείο του μεγάλου κύκλου. Η ευθεία BP τέμνει τον μεγάλο κύκλο ξανά στο C. Η κάθετος της BP στο P τέμνει τον μικρό κύκλο ξανά στο A.

(Αν είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο P τότε $A \equiv P$).

(i) Να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης $AB^2 + BC^2 + CA^2$.

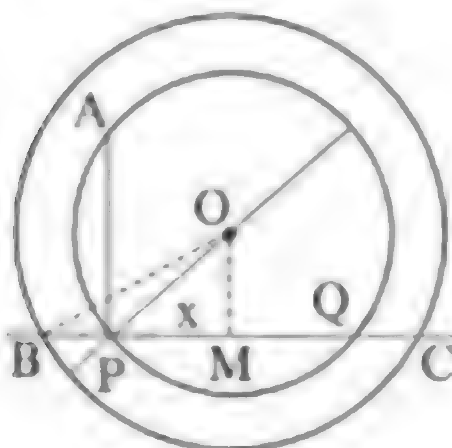
(ii) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου του BC.

Λύση

Έστω M το μέσο της BC και Q το δεύτερο σημείο τομής της BC με το μικρό κύκλο. Επειδή $\widehat{APQ} = 90^\circ$, η AQ είναι διάμετρος άρα $AQ = 2r$. Έστω $x = PM$.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε $AP^2 = 4r^2 - 4x^2$ και $BM^2 = R^2 - OM^2 = R^2 - (r^2 - x^2)$, οπότε:

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 + CA^2 &= (AP^2 + BP^2) + 4BM^2 + (AP^2 + PC^2) \\ &= 2AP^2 + 4BM^2 + (BM - x)^2 + (BM + x)^2 \\ &= 2AP^2 + 6BM^2 + 2x^2 \\ &= 2(4r^2 - 4x^2) + 6(R^2 - (r^2 - x^2)) \\ &= 6R^2 + 2r^2, \text{ ανεξάρτητο του x.} \end{aligned}$$



Σχήμα 101

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε στην περίπτωση που το M βρίσκεται μεταξύ του P και του B. Το μέσο M της BC είναι επίσης μέσο της PQ οπότε αν «σμικρύνουμε» το τμήμα PQ με κέντρο το P κατά $\frac{1}{2}$, το Q μεταφέρεται στο M (ομοιοθεσία).

Άρα ο γεωμετρικός τόπος του M είναι ο ομοιόθετος του μικρού κύκλου, δηλαδή ο κύκλος με διάμετρο OP.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Έστω n ένας θετικός ακέραιος και έστω $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ υποσύνολα ενός συνόλου B. Υποθέτουμε ότι:

(i) Κάθε A_i έχει ακριβώς 2n στοιχεία.

(ii) Η τομή οποιωνδήποτε δύο διαφορετικών υποσυνόλων A_i έ-

χει ακριβώς ένα στοιχείο.

(iii) Κάθε στοιχείο του B ανήκει σε τουλάχιστον δύο υποσύνολα A_i.

Για ποιες τιμές του n μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε στοιχείο του B έναν από τους αριθμούς 0, 1 έτσι ώστε σε κάθε υποσύνολο A_i ακριβώς n στοιχεία του να αντιστοιχούν στο 0;

Λύση

Η απάντηση είναι n = άρτιος.

Καταρχήν παρατηρούμε ότι καθένα από τα 2n στοιχεία του A_i ανήκει σε τουλάχιστον ένα άλλο υποσύνολο A_j λόγω της (iii). Όμως το άλλο υποσύνολο A_j δεν μπορεί να περιέχει περισσότερα από ένα στοιχεία του A_i λόγω της (ii). Επειδή υπάρχουν 2n υποσύνολα A_j, καθένα από αυτά θα περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο του A_i. Συνεπώς μπορούμε να αντικαταστήσουμε την (iii) με τη συνθήκη:

«Κάθε στοιχείο του B ανήκει σε ακριβώς δύο υποσύνολα A_i».

Άρα λοιπόν η κατανομή των στοιχείων του B στα υποσύνολα είναι ουσιαστικά μοναδική.

Ας ονομάσουμε (i, j) το στοιχείο του B που ανήκει στα υποσύνολα A_i, A_j.

Αν συμβολίσουμε με |B| το πλήθος των στοιχείων του B, τότε

$$|B| = \frac{1}{2}(\text{πλήθος των } A_i)(\text{πλήθος στοιχείων κάθε } A_i)$$

$$= \frac{1}{2}(2n+1)(2n) = n(2n+1)$$

Αν η αντιστοίχιση των στοιχείων στα 0, 1 είναι δυνατή, τότε, αν γράψουμε όλα τα στοιχεία για κάθε υποσύνολο τα οποία αντιστοιχούν στο 0, θα έχουμε γράψει επίσης $n(2n+1)$ στοιχεία από τα συνολικά $2n(2n+1)$. Όμως κάθε στοιχείο που γράψαμε θα υπάρχει δύο φορές (αφού ανήκει σε δύο διαφορετικά υποσύνολα) άρα $n(2n+1)$ = άρτιος οπότε $|B|$ = άρτιος δηλαδή το B πρέπει να έχει άρτιο πλήθος στοιχείων.

Θα αποδείξουμε ότι αν $|B|$ = άρτιος τότε μία τέτοια αντιστοιχία είναι δυνατή.

Επαγωγικά, για $n = 2$ ισχύει, αφού π.χ. μπορούμε να αντιστοιχίσουμε στο 0 τα στοιχεία $(1,2),(1,3),(2,4),(3,5),(4,5)$.

Υποθέτουμε ότι η υπόθεση ισχύει για n = άρτιο. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n+2$.

Για $n+2$, αντιστοιχίζουμε το 0 στα στοιχεία:

$(i,2n+2)$ και $(i,2n+3)$, για $i=1,2,\ldots,n+1$

$(i,2n+4)$ και $(i,2n+5)$, για $i=n+2,n+3,\ldots,2n+1$

$(2n+2,2n+4),(2n+3,2n+5),(2n+4,2n+5)$

Καθώς επίσης και στα στοιχεία που είχαν 0 για την περίπτωση n.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα μισά από τα στοιχεία του A_i, δηλαδή $n+2$, αντιστοιχούν στο 0.

- Για $i=1,2,\ldots,n+1$ το A_i έχει n στοιχεία που αντιστοιχούν στο 0 με $j \le 2n+1$ και επίσης τα στοιχεία $(i,2n+2)$ και $(i,2n+3)$ δηλ. $n+2$ συνολικά.
- Για $i=n+2,n+3,\ldots,2n+1$, το A_i έχει n στοιχεία που αντιστοιχούν στο 0 με $j \le 2n+1$ και επίσης τα $(i,2n+4)$, $(i,2n+5)$ δηλαδή $n+2$ συνολικά.
- Για $i=2n+2$, το A_i έχει τα $n+1$ στοιχεία $(i,2n+2)$, $i \le n+1$ και το στοιχείο $(2n+2,2n+4)$ δηλαδή $n+2$ συνολικά.
- Για $i=2n+3$, έχουμε $n+1$ στοιχεία $(i,2n+3)$, $i \le n+1$ και επίσης το $(2n+2,2n+5)$ δηλαδή $n+2$ συνολικά.
- Για $i=2n+4$, έχουμε n στοιχεία $(i,2n+4)$, $n+2 \le i \le 2n+1$ και επίσης τα $(2n+2,2n+4),(2n+4,2n+5)$ δηλαδή $n+2$ συνολικά.
- Τέλος, για $i=2n+5$, έχουμε n στοιχεία $(i,2n+5)$, $n+2 \le i \le 2n+1$ και επίσης τα $(2n+3,2n+5),(2n+4,2n+5)$, δηλαδή $n+2$ συνολικά.

Άρα σε κάθε περίπτωση το A_1 έχει τα μισά στοιχεία του να αντιστοιχούν στο 0 και η επαγωγή έχει ολοκληρωθεί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Η συνάρτηση f ορίζεται στους ακεραίους που είναι μεγαλύτεροι από το 0 ως εξής:

$$f(1) = 1$$
$$f(3) = 3$$
$$f(2n) = f(n)$$
$$f(4n + 1) = 2f(2n + 1) - f(n)$$
$$f(4n + 3) = 3f(2n + 1) - 2f(n)$$

για όλους τους αριθμούς $n \in \mathbb{Z},\ n \geq 1$.

Να προσδιορίσετε το πλήθος των αριθμών $n \leq 1988$ για τους οποίους $f(n) = n$.

Λύση

Δοκιμάζοντας μερικές τιμές του f(n) έχουμε τον πίνακα

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
f(n)	1	1	3	1	5	3	7	1	9	5	13	3	11	7	15	1	17

από τον οποίο παρατηρούμε ότι $f\left(2^{\kappa}\right)=1$, για $\kappa=0,1,2,3,4$, $f\left(2^{\kappa}+1\right)=2^{\kappa}+1$, $\kappa=1,2,3,4$ και $f\left(2^{\kappa}-1\right)=2^{\kappa}-1$, $\kappa=1,2,3,4$.

Θα αποδείξουμε ότι οι παραπάνω ισότητες αληθεύουν για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, η πρώτη σχέση ισχύει για κ= 0. Υποθέτοντας ότι η σχέση ισχύει για κ έχουμε

$$f\left(2^{\kappa+1}\right)=f\left(2\cdot 2^{\kappa}\right)=f\left(2^{\kappa}\right)=1.$$

Άρα η σχέση ισχύει για κάθε $\kappa \geq 0$.

Έχουμε ακόμη ότι $f(2^{\kappa} + 1) = 2^{\kappa} + 1$, αφού ισχύει ότι:

$$f\left(2^{\kappa}+1\right)=f\left(4\cdot 2^{\kappa-2}+1\right)=2f\left(2\cdot 2^{\kappa-2}+1\right)-f\left(2^{\kappa-2}\right)=2\left(2^{\kappa-1}+1\right)-1=2^{\kappa}+1$$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύουμε και ότι για κάθε κ=1,2, ... ισχύει

$$f(2^{\kappa} - 1) = 2^{\kappa} - 1.$$

Γράφοντας διάφορες τιμές του n και του f(n) στο δυαδικό σύστημα α-

ρίθμησης παρατηρούμε ότι αυτό που φαίνεται ότι κάνει η συνάρτηση f είναι το να μετατρέπει τον αριθμό στο δυαδικό σύστημα, να αντιστρέφει τα ψηφία του και τέλος να τον μετατρέπει πάλι στο δεκαδικό σύστημα.

Έτσι, για παράδειγμα, έχουμε

$$f(3) = f(11_2) = 11_2 = 3 \text{ και } f(13) = f(1101_2) = 1011_2 = 13, \text{ κλπ.}$$

Επομένως, αν στο δυαδικό σύστημα είναι

$$n = \overline{c_m c_{m-1} \cdots c_1 c_0}_{(2)} = \sum_{i=0}^{m} c_i \cdot 2^i,$$

όπου $c_1, c_2, \ldots, c_\kappa \in \{0,1\}$, τότε θα έχουμε:

$$f(n) = \overline{c_0 c_1 \cdots c_{m-1} c_m}_{(2)} = \sum_{i=0}^{m} c_i \cdot 2^{m-i}.$$

Τώρα πρέπει να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση που βρήκαμε είναι πράγματι η ζητούμενη. Κατ' αρχήν έχουμε $f(1) = 1$ και $f(3) = 3$, και ακόμη

$$f(2n) = f(10_2 \cdot <E>_2) = f(<E0>_2) = <0Z>_2 = f(n).$$

$$f(4n+1) = f(100_2 \cdot <E>_2 + 1) = f(<E01>_2) = <10Z>_2$$
$$= <1Z0>_2 - <Z>_2 = 2<1Z>_2 - <Z>_2 = 2f(2n+1) - f(n)$$

και

$$f(4n+3) = f(100_2 \cdot <E>_2 + 11_2) = f(<E11>_2) = <11Z>_2 =$$
$$= <1Z0>_2 + <1Z>_2 = <Z0>_2 = 2<1Z>_2 + <1Z>_2 - <Z0>_2 =$$
$$= 3f(2n+1) - 2f(n),$$

όπου Z ο αριθμός E με τα ψηφία του αντεστραμμένα (δηλαδή το πρώτο τελευταίο κλπ.)

Επειδή όμως οι τιμές της συνάρτησης f ορίζονται μοναδικά από τις αρχικές συνθήκες (1), η παραπάνω συνάρτηση είναι η ζητούμενη, (δηλαδή, η ζητούμενη συνάρτηση είναι μοναδική).

Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι εκείνοι οι οποίοι αν γράφουν στο δυαδικό σύστημα παραμένουν οι ίδιοι αν αντιστρέψουμε τα ψηφία τους. Υπάρχουν 92 τέτοιοι αριθμοί ως το $1988 = 11111000100_2$, τους οποίους μπορούμε εύκολα να γράψουμε ή να μετατρέψουμε.

Αυτό μπορούμε να το εξηγήσουμε ως εξής:

Επειδή είναι: $10^{10} = 1024 < 1988 < 2048 = 10^{11}$, οι ζητούμενοι αριθμοί στο δυαδικό σύστημα θα πρέπει να έχουν μέχρι 11 ψηφία και το πρώτο ψηφίο τους να είναι 1.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν το πλήθος των ψηφίων του ζητούμενου αριθμού είναι 2κ, τότε αυτός θα έχει τη μορφή

$$\overline{1c_{\kappa-1}\cdots c_2c_1c_2\cdots c_{\kappa-1}1}_{(2)}$$

με $c_1, c_2, \ldots, c_{\kappa-1} \in \{0,1\}$, οπότε θα υπάρχουν $2^{\kappa-1}$ τέτοιοι αριθμοί. Έτσι για $\kappa = 1, 2, \ldots, 5$ θα έχουμε συνολικά

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31 \text{ αριθμούς.}$$

- Αν το πλήθος των ψηφίων του ζητούμενου αριθμού είναι $2\kappa + 1$, τότε αυτός θα έχει τη μορφή

$$\overline{1c_{\kappa-1}\cdots c_2c_1c_2\cdots c_{\kappa-1}1}_{(2)}$$

με $c_1, c_2, \ldots, c_{\kappa-1} \in \{0,1\}$, οπότε θα υπάρχουν 2^{κ} τέτοιοι αριθμοί. Έτσι για $\kappa = 0, 1, \ldots, 4$ θα έχουμε $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$ αριθμούς, ενώ για $\kappa = 5$, πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι οι αριθμοί που ζητάμε είναι μικρότεροι του $1988 = \overline{11111000100}_{(2)}$, οπότε προκύπτουν 30 ακόμη αριθμοί και όχι $32 = 2^5$.

Άρα υπάρχουν συνολικά 92 τέτοιοι αριθμοί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να αποδείξετε ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών x που ικανοποιούν την ανισότητα:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} + \ldots + \frac{70}{x-70} \geqslant \frac{5}{4}$$

είναι μία ένωση ξένων μεταξύ τους διαστημάτων, με συνολικό μήκος 1988.

Λύση

Έστω $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + ... + \frac{70}{x-70}$.

Για κάθε n = 1, 2, ..., 70 η συνάρτηση $\frac{n}{x-n}$ είναι γνησίως φθίνουσα για $x \neq n$ και δεν ορίζεται στο x = n. Συνεπώς η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο σύνολο $A = \mathbb{R} - \{1, 2, 3, ..., 70\}$.

Επίσης σε καθένα από τα διαστήματα (n, n + 1), n = 1, ..., 69, η f(x) τείνει στο $+\infty$ καθώς $x \to n^+$ και $f(x) \to -\infty$ για $x \to (n+1)^-$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \frac{5}{4}$ έχει 69 ρίζες x_n στο διάστημα (1, 70) (μία σε κάθε διάστημα (n, n + 1)).

Έχουμε ακόμα f(x) < 0 για x < 1, ενώ στο διάστημα $(70, +\infty)$ η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα και $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ οπότε υπάρχει μία λύση $x_{70} \in (70, +\infty)$ τέτοια ώστε $f(x_{70}) = \frac{4}{5}$.

Συνεπώς $f(x) \geq \frac{5}{4}$, αν, και μόνο αν, $x \in (1, x_1] \cup (2, x_2] \cup ... \cup (70, x_{70}]$, δηλαδή είναι ένωση ξένων μεταξύ τους διαστημάτων.

Το συνολικό μήκος τους είναι

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 2) + ... + (x_{70} - 70) = (x_1 + x_2 + ... + x_{70}) - (1 + 2 + ... + 70).$$

Τα x_i είναι οι ρίζες του πολυωνύμου που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε την ισότητα

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + ... + \frac{70}{x-70} = \frac{5}{4} \text{ με } (x-1)(x-2) ... (x-70).$$

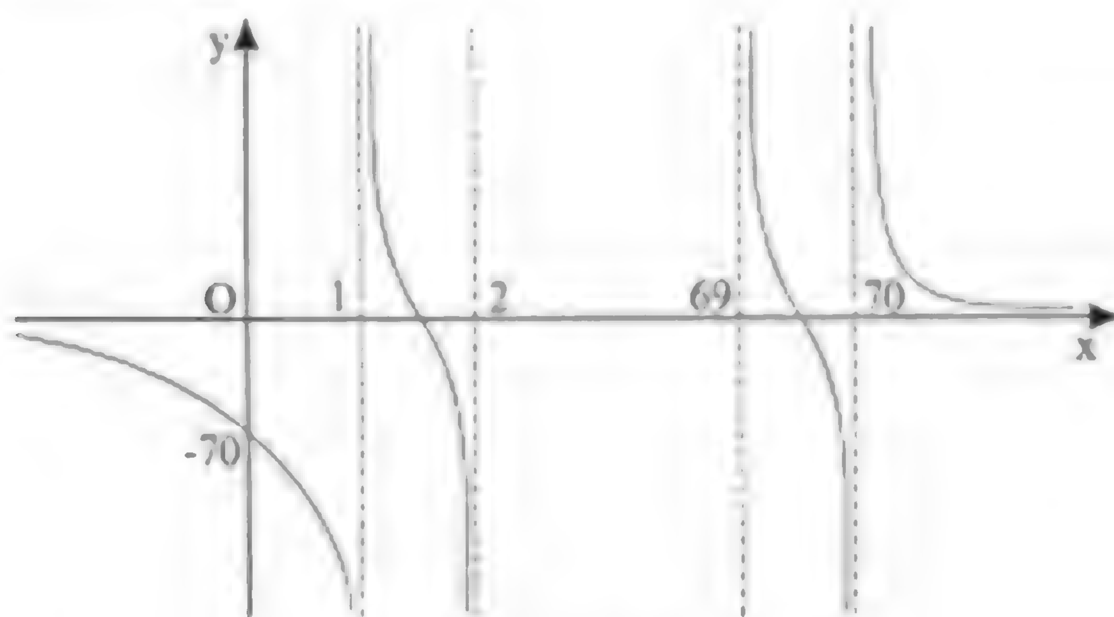
Το πολυώνυμο αυτό είναι της μορφής $\frac{5}{4}x^{70} - (1 + 2 + ... + 70)\frac{9}{4}x^{69} + ...$

Το άθροισμα των ριζών του είναι (τύποι Vieta):

$$x_1 + x_2 + ... x_{70} = (1 + 2 + ... + 70)\frac{9}{5}$$

οπότε το μήκος των διαστημάτων είναι

$$(1 + 2 + ... + 70)\frac{4}{5} = \frac{1}{2} 70 \cdot 71 \frac{4}{5} = 1988.$$

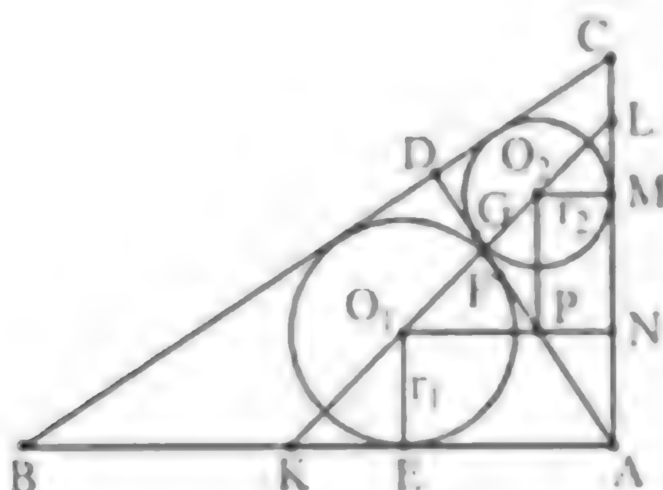


Σχήμα 102

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5 (Προτάθηκε από την Ελλάδα)

Έστω ABC ένα τρίγωνο με $\hat{A} = 90°$, και έστω D το ίχνος του ύψους από το A. Η ευθεία που ενώνει τα έκκεντρα των τριγώνων ABD, ACD τέμνει τις πλευρές AB, AC στα σημεία K, L αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ABC είναι τουλάχιστον διπλάσιο από αυτό του AKL.

Λύση



Σχήμα 103

Θέτουμε $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AD = h$.

Από το σχήμα έχουμε:

$$O_1N = EA = AF = h - r_1$$

$$O_1P = O_1N - PN = O_1N - O_2M = h - r_1 - r_2$$

και $O_2P = MN = AM - AN = AG - r_1 = h - r_2 - r_1$,

οπότε $O_1P = O_2P$, δηλαδή $O_2\hat{O}_1P = 45^\circ$. Άρα $L\hat{K}A = 45^\circ$, οπότε $AK = AL$.

Όμως $AL = AM + ML = AG + r_2 = AG + DG = AD$, οπότε θα είναι $AK = AL = AD = h$.

Έτσι έχουμε: $\dfrac{(ABC)}{(AKL)} = \dfrac{ah}{h^2} = \dfrac{a}{h} = \dfrac{a^2}{ah} = \dfrac{a^2}{bc} = \dfrac{b^2+c^2}{bc} \geq 2$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Έστω a και b είναι θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε ο $(ab+1)$ διαιρεί τον (a^2+b^2). Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση

Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι θεωρώντας $b = a^3$ έχουμε ότι $ab+1 = aa^3+1 = a^4+1$, $a^2+b^2 = a^2+a^6 = a^2(a^4+1)$, οπότε $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1} = a^2$, δηλαδή είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Επίσης μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι για $a_1 = 2$, $b_1 = 2^3 = 8$ έχουμε $a_1^2 + b_1^2 = 4(a_1b_1+1)$ και ομοίως για τις αναδρομικές ακολουθίες

$$a_{n+1} = b_n,\ b_{n+1} = 4b_n - a_n,\ a_1 = 2,\ b_1 = 8$$

έχουμε ότι

$$a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 = 4(a_{n+1}b_{n+1}+1).$$

Σημειώνουμε ότι η παραπάνω διαδικασία λειτουργεί και αντιστρόφως. Αυτό ακριβώς θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω για την ολοκλήρωση της λύσης.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι αριθμοί a, b, κ είναι μία λύση του προβλήματος, όπου a, b είναι θετικοί ακέραιοι και κ είναι τέτοιο τετράγωνο, έχουμε δηλαδή

$$a^2 + b^2 = \kappa(ab+1).$$

Αν είναι $a = b$, τότε $2a^2 = \kappa(a^2+1)$, οπότε προκύπτει ότι $a^2 \mid \kappa$, δη-

λαδή $\kappa = \lambda a^2$, όπου λ είναι θετικός ακέραιος. Έτσι έχουμε $2 = \lambda(a^2+1)$, οπότε $(a^2+1)|2$ και $a^2+1=2$, δηλαδή έχουμε $a=b=\lambda=\kappa=1$, που είναι μία τετριμμένη λύση.

Έστω ότι είναι $a<b$. Θα αποδείξουμε ότι τότε θα είναι και $a^3>b$. Πράγματι, έχουμε

$$\left(\frac{b}{a}-\frac{1}{a}\right)(ab+1)=b^2+\frac{b}{a}-b-\frac{1}{a}<b^2<a^2+b^2=\kappa(ab+1),$$

οπότε θα είναι

$$\kappa>\frac{b}{a}-\frac{1}{a} \text{ ή } b-a<a\kappa \text{ ή } b\le a\kappa. \qquad (1)$$

Έτσι, αν υποθέσουμε ότι $a^3<b$, θα έχουμε

$$\frac{b}{a}(ab+1)=b^2+\frac{b}{a}>b^2+a^2=\kappa(ab+1),$$

οπότε προκύπτει ότι

$$\kappa<\frac{b}{a} \text{ ή } b>a\kappa, \qquad (2)$$

η οποία αντίκειται στη σχέση (1).

Από την (1) έχουμε ότι $\kappa\ge\frac{b}{a}$ ή $\kappa a-b\ge 0$, αφού $a<b$.

Ορίζουμε τώρα $A=\kappa a-b$ και $B=a$. Τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι ισχύει και

$$A^2+B^2=\kappa(AB+1),$$

όπου A, B, κ είναι θετικοί ακέραιοι και κ τέλειο τετράγωνο.

Επειδή έχουμε υποθέσει $a<b$ θα έχουμε

$$a^2+b^2<ab+b^2<ab+b^2+1+\frac{b}{a}=(ab+1)\left(1+\frac{b}{a}\right),$$

οπότε έχουμε

$$\kappa<1+\frac{b}{a} \text{ ή } \kappa a-b<a. \qquad (3)$$

Επίσης, αφού είναι $\kappa\ge\frac{b}{a}$, έπεται ότι $\kappa a-b\ge 0$.

Αν υποθέσουμε ότι είναι $\kappa a - b > 0$, τότε αντιστρέφοντας την αναδρομική σχέση μπορούμε να έχουμε μία μικρότερη λύση και επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία, επειδή δεν είναι δυνατόν να έχουμε άπειρους θετικούς αριθμούς μικρότερους του $\kappa a - b$, τελικά θα προκύψει ότι $A = \kappa a - b = 0$. Τότε όμως έχουμε $A^2 + B^2 = \kappa(AB + 1)$ με $A = 0$, οπότε είναι $\kappa = B^2$, δηλαδή το κ είναι τέλειο τετράγωνο. Σημειώνουμε ότι κατά την αντιστροφή της αναδρομικής ακολουθίας ο κ δεν μεταβάλλεται.



30η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1989

Τόπος Διοργάνωσης:	Δ. Γερμανία (Μπραουνσβάϊκ)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	A. Engel (Παν/μιο Φρανκφούρτης)
Συμμετοχή:	50 χώρες με 6 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες Συμμετοχές:	Ινδία, Ταϋλάνδη, Πορτογαλία
Μέγιστη Βαθμολογία:	42 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες:	Κίνα (237), Ρουμανία (223), Σοβ. Ένωση (217), Α. Γερμανία (216), Η.Π.Α. (207), Τσεχοσλοβακία (202), Βουλγαρία (195), Δ. Γερμανία (187).

Η Ελληνική ομάδα πήρε μέρος με τους μαθητές Χρ. Αθανασιάδη (Αργυρό μετάλλιο), Γ. Παπουτσή (Χάλκινο μετάλλιο), Πρ. Συμεωνίδη (Χάλκινο μετάλλιο), Δ. Σταθόπουλος (Χάλκινο μετάλλιο), Αντ. Οικονόμου (Εύφημος μνεία) και Ε. Μουρούκος (Εύφημος μνεία). Αρχηγός της ομάδας ήταν ο κ. Θεόδωρος Μπόλης και υπαρχηγός ο κ. Δημήτρης Κοντογιάννης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\{1,2,\ldots,1989\}$ μπορεί να εκφραστεί ως ένωση διαφορετικών υποσυνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_{117}$ με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε A_i να περιέχει 17 στοιχεία και το άθροισμα των στοιχείων κάθε A_i να είναι το ίδιο.

Λύση:

Καταρχήν κατασκευάζουμε 116 σύνολα, καθένα με 3 αριθμούς, τα οποία να έχουν άθροισμα στοιχείων $2985 = 3\cdot 995$.

Για την κατασκευή αυτή θα χρειαστούμε $116 \cdot 3 = 348$ αριθμούς, οι οποίοι θα είναι 174 ζεύγη αριθμών της μορφής $\{r, 1990 - r\}$.

Το αρχικό σύνολο αποτελείται από 994 ζεύγη $\{r, 1990 - r\}$ και το σύνολο $\{995\}$. Το 117^o σύνολο θα περιέχει ένα ακόμα ζεύγος $\{r, 1990 - r\}$ και τον αριθμό 995. Έχουμε λοιπόν 117 σύνολα με τρία στοιχεία το καθένα και με άθροισμα 2985 και μας έχουν περισσέψει $994 - 174 - 1 = 819$ ζεύγη της μορφής $\{r, 1990 - r\}$. Όμως $819 = 7 \cdot 117$, οπότε μοιράζουμε τυχαία τα 819 ζεύγη στα 117 σύνολα (7 ζεύγη σε κάθε σύνολο), οπότε τελικά έχουμε σταθερό άθροισμα $2985 + 7 \cdot 1990 = 16915$, και κάθε σύνολο έχει 17 στοιχεία. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η αρχική κατασκευή των 116 συνόλων είναι εφικτή.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι για την κατασκευή τους: π.χ. μπορούμε να ξεκινήσουμε με τους αριθμούς $\{301, 801, 1883\}$ και το συμπληρωματικό του $\{1689, 1189, 107\}$ ($1683 = 1990 - 301$, κλπ.). Στη συνέχεια προσθέτουμε και αφαιρούμε αντίστοιχα 1 στους 2 πρώτους αριθμούς κάθε συνόλου παίρνοντας τα νέα σύνολα

$\{302, 802, 1881\}$ και $\{1688, 1188, 109\}$

$\{303, 803, 1879\}$ και $\{1687, 1187, 111\}$

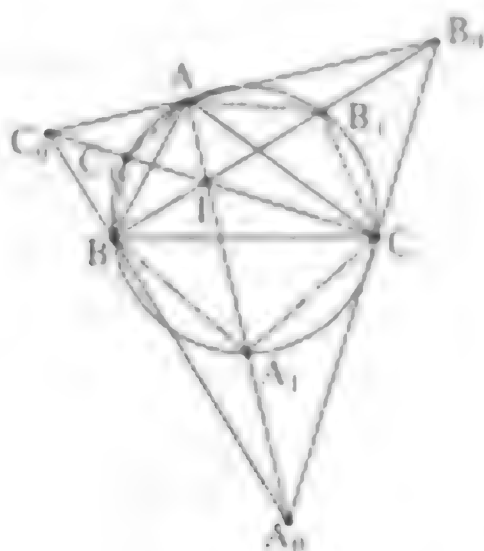
...

$\{358, 858, 1769\}$ και $\{1632, 1132, 221\}$.

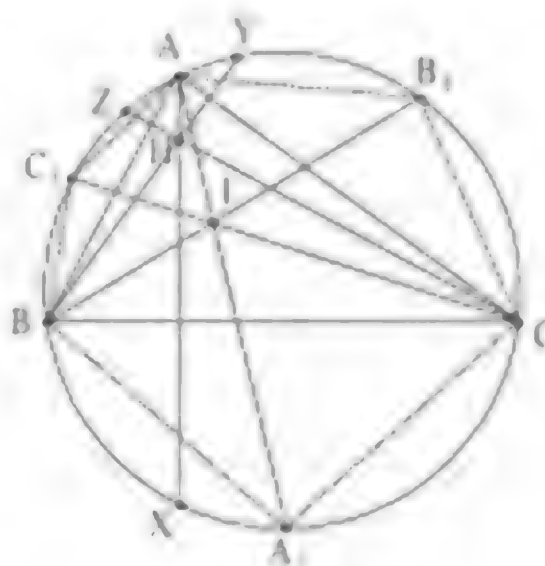
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Έστω ABC ένα οξυγώνιο τρίγωνο. Οι εσωτερικές διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του ABC στα σημεία A_1, B_2, C_1 αντίστοιχα. Έστω A_0 το σημείο τομής των ευθειών AA_1 με τις εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών $\hat{B}, \hat{C}$ και αντίστοιχα ορίζουμε τα σημεία B_0, C_0. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $A_0B_0C_0$ είναι διπλάσιο του εμβαδού του εξαγώνου $AC_1BA_1CB_1$ και τουλάχιστον τέσσερις φορές μεγαλύτερο του εμβαδού του τριγώνου ABC.

Λύση:



Σχήμα 104 (i)



Σχήμα 104 (ii)

Έστω I το έκκεντρο του τριγώνου ABC.

Το τετράπλευρο $BICA_0$ είναι εγγράψιμο, αφού έχει δύο απέναντι γωνίες ορθές, οπότε $B\hat{I}C + B\hat{A_0}C = 180°$.

Από το εγγράψιμο ABA_1C έχουμε ότι $B\hat{A}C + B\hat{A_1}C = 180°$, και επειδή $B\hat{I}C = 90° + \frac{B\hat{A}C}{2}$ (αφού το I είναι το έκκεντρο) από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$2B\hat{A_0}C = 360° - 2B\hat{I}C = 360° - (180° + B\hat{A}C) = 180° - B\hat{A}C = B\hat{A_1}C.$$

Επειδή $A_1B = A_1C$, το A_1 θα είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του $BICA_0$, δηλαδή

$$A_1B = A_1I = A_1C = A_1A_0.$$

Έτσι θα έχουμε $(IBA_1) = (A_0BA_1)$ και $(ICA_1) = (A_0CA_1)$ και ομοίως για τα τρίγωνα που αντιστοιχούν στις υπόλοιπες εσωτερικές διχοτόμους, οπότε

$$(A_0B_0C_0) = 2(AB_1CA_1BC_1).$$

Έστω H το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC, και X, Y, Z οι τομές των υψών με τον κύκλο όπως φαίνεται στο σχήμα.

Επειδή $BA_1 = CA_1$, προφανώς έχουμε

$$(BA_1C) \geq (BXC)$$

και ομοίως για τα υπόλοιπα τρίγωνα. Επομένως θα έχουμε:

$$(AB_1CA_1BC_1) \geq (AYCXBZ) =$$

$$= 2\left((BHC)+(AHC)+(AHB)\right) =$$

$$= 2(ABC).$$

Χρησιμοποιώντας το πρώτο μέρος έχουμε ότι:

$$(A_0B_0C_0) \geq 4(ABC).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω n, κ θετικοί ακέραιοι και έστω S ένα σύνολο n σημείων του επιπέδου που είναι τέτοια ώστε καμία τριάδα σημείων του S να μην είναι συνευθειακά και για οποιοδήποτε σημείο P του S να υπάρχουν τουλάχιστον κ σημεία του S τα οποία να ισαπέχουν από το P.

Να αποδείξετε ότι $\kappa < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

Λύση

Θεωρούμε τα ζεύγη P, {A, B}, όπου A, B, P σημεία του S τέτοια ώστε το P να ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος AB. Το πλήθος αυτών των ζευγών είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $n\binom{\kappa}{2} = \frac{n\kappa(\kappa-1)}{2}$, αφού υπάρχουν n διαφορετικές θέσεις που μπορεί να πάρει το σημείο P και για κάθε θέση του σημείου P υπάρχουν τουλάχιστον κ σημεία που να ισαπέχουν από αυτό και συνεπώς $\binom{\kappa}{2}$ ζεύγη σημείων A, B, που να ισαπέχουν από το P (οπότε το P βρίσκεται στη μεσοκάθετο του AB).

Αν υποθέσουμε ότι $\kappa \geqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$ τότε

$$\frac{n\kappa(\kappa-1)}{2} = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2n}\right)\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{2n}\right) = n\left(n-\frac{1}{8}\right) > n(n-1) = 2\binom{n}{2}$$

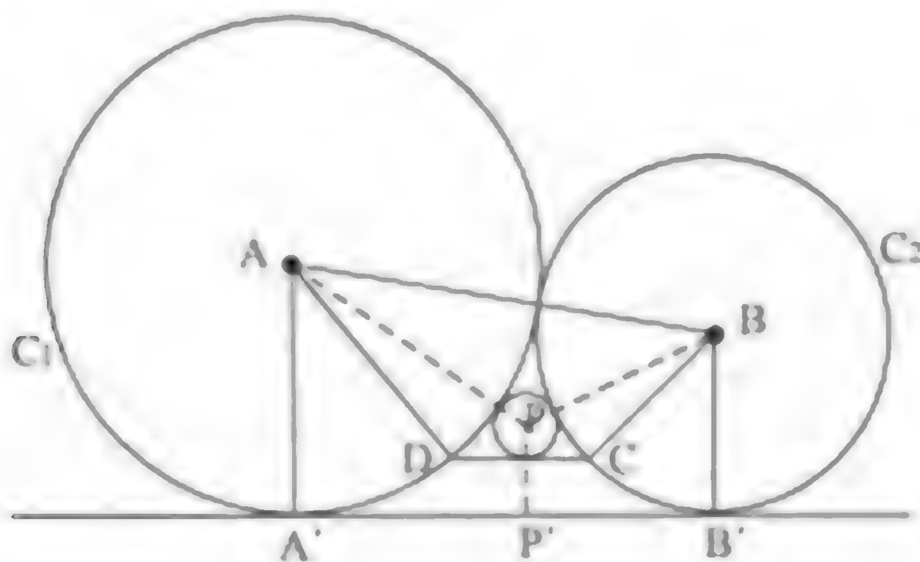
Όμως το πλήθος των ζευγών {A, B} είναι $\binom{n}{2}$, οπότε από την αρχή της περιστεροφωλιάς θα υπάρχει τουλάχιστον ένα ζεύγος {A΄, B΄} στο ο-

ποίο θα αντιστοιχούν τρία ή περισσότερα σημεία P, δηλαδή θα έχουμε P_1, {A΄, B΄}, P_2, {A΄, B΄}, P_3, {A΄, B΄}, ανάμεσα στα αρχικά ζεύγη. Αυτό όμως είναι αδύνατο, αφού τότε τα σημεία P_1, P_2, P_3 θα ανήκουν στη μεσοκάθετο του ίδιου ευθύγραμμου τμήματος A΄B΄, που θα σήμαινε ότι είναι συνευθειακά.

Συνεπώς θα είναι $\kappa < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Έστω ABCD ένα κυρτό τετράπλευρο με AB = AD + BC. Αν P είναι ένα εσωτερικό σημείο του ABCD το οποίο απέχει απόσταση h από την ευθεία CD και AP = h + AD και BP = h + BC, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$.



Σχήμα 105

Λύση

Έστω C_1, C_2 οι κύκλοι με κέντρα A, B και ακτίνες AD, BC αντίστοιχα, και έστω C_3 ο κύκλος με κέντρο P και ακτίνα h. Από τα δεδομένα του προβλήματος οι κύκλοι εφάπτονται μεταξύ τους και ο κύκλος C_3 εφάπτεται της DC. Έστω A΄B΄ η εφαπτομένη των κύκλων C_1, C_2, όπου $A' \in C_1$ και $B' \in C_2$ η οποία βρίσκεται από την ίδια πλευρά του AB όπως και η DC. Είναι προφανές, αφού το P είναι εσωτερικό σημείο του τετραπλεύρου, ότι η ακτίνα του κύκλου C_3 είναι μικρότερη της απόστασης PP΄, όπου P΄ το ίχνος της καθέτου από το P στην A΄B΄.

Έτσι, η απόσταση h γίνεται μέγιστη, για δεδομένα μήκη AB, AD και BC όταν ο κύκλος C_3 εφάπτεται της A΄B΄ οπότε και η h γίνεται h' = PP΄ και

στην περίπτωση αυτή το σημείο D ταυτίζεται με το A' και το C με το B'.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$(A'B')^2 = (AB)^2 - (AA' - BB')^2 = (AA' + BB')^2 - (AA' - BB')^2 = 4(AA')(BB') = 4(AD)(BC)$.

$(A'P')^2 = (AP)^2 - (AA' - PP')^2 = (AD + h')^2 - (AD - h')^2 = 4(AD)\cdot h'$.

$(P'B')^2 = (BP)^2 - (BB' - PP')^2 = (BC + h')^2 - (BC' - h')^2 = 4(BC)\cdot h'$.

Επειδή όμως $A'B' = A'P' + P'B'$ (αφού το P βρίσκεται στο εσωτερικό του ABCD) έχουμε

$$\sqrt{(AD)(BC)} = \sqrt{(AD)\cdot h'} + \sqrt{(BC)\cdot h'}$$

$$\frac{1}{\sqrt{h'}} = \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$$

και αφού $h \leqslant h'$ προκύπτει

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n υπάρχουν n διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε κανένας τους να μην είναι πρώτος ή δύναμη πρώτου.

Λύση

Θεωρούμε του αριθμούς: $(N!)^2 + 2, (N!)^2 + 3, \dots (N!)^2 + N$.

Για κάθε $2 \leqslant \kappa \leqslant N$ ο αριθμός $(N!)^2 + \kappa$ διαιρείται με το κ και ισχύει

$$\left(\kappa, \frac{(N!)^2 + \kappa}{\kappa}\right) = 1, \text{ αφού } \frac{(N!)^2 + \kappa}{\kappa} = N!\left(\frac{N!}{\kappa}\right) + 1 = (\text{πολλαπλάσιο } \kappa) + 1.$$

Για κάθε κ μπορούμε να θεωρήσουμε έναν πρώτο p_κ που να διαιρεί τον κ τέτοιο ώστε ο $(N!)^2 + \kappa$ να διαιρείται με το p_κ χωρίς να είναι δύναμη του p_κ. Συνεπώς, ο $(N!)^2 + \kappa$ δεν είναι πρώτος ή δύναμη πρώτων. Θέτοντας $N = n + 1$, έχουμε τους n ζητούμενους αριθμούς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Μία μετάθεση $\{x_1, x_2, \ldots, x_{2n}\}$ του συνόλου $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος, έχει την ιδιότητα P, αν $|x_i - x_{i+1}| = n$ για τουλάχιστον ένα $i \in \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$. Να αποδείξετε ότι για κάθε n, υπάρχουν περισσότερες μεταθέσεις που έχουν την ιδιότητα P από όσες μεταθέσεις που δεν την έχουν.

Λύση

Έστω A_k το σύνολο των μεταθέσεων με τους αριθμούς k και $n-k$ σε γειτονικές θέσεις, και έστω A το σύνολο των μεταθέσεων με την ιδιότητα P, δηλαδή $A = \bigcup A_k$.

Έχουμε

$$|A| = \sum_k |A_k| - \sum_{k<\ell} |A_k \cap A_\ell| + \sum_{k<\ell<m} |A_k \cap A_\ell \cap A_m| + \cdots,$$

άρα $|A| \geq \sum_k |A_k| - \sum_{k<\ell} |A_k \cap A_\ell|$,

αφού οι όροι στο άθροισμα μικραίνουν γνησίως.

Όμως $|A_k| = 2(2n-1)!$, αφού έχουμε 2 τρόπους να τοποθετήσουμε τους αριθμούς k, $n-k$ και $(2n-1)!$ για τους υπόλοιπους αριθμούς, και ομοίως $|A_k \cap A_\ell| = 4(2n-2)!$.

Έτσι έχουμε: $|A| \geq \sum_k 2(2n-1)! - \sum_{k<\ell} 4(2n-2)!$

$$= n \cdot 2(2n-1)! - \frac{n(n-1)}{2} 4(2n-2)!$$

$$= (2n-2)!\left[2n(2n-1) - 2n(n-1)\right]$$

$$= (2n-2)!\left(4n^2 - 2n - 2n^2 + 2n\right)$$

$$= 2n^2(2n-2)!$$

$$> \frac{(2n)!}{2},$$

δηλαδή υπάρχουν περισσότερες μεταθέσεις που έχουν την ιδιότητα P από όσες μεταθέσεις που δεν την έχουν.



31^{η} Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1990

Τόπος Διοργάνωσης:	Κίνα (Beijing)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	Qi Min You (Παν/μιο Wuhan)
Συμμετοχή:	54 χώρες με 6 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες Συμμετοχές:	Μπαχρέϊν, Ιαπωνία, Μακάου, Β. Κορέα
Μέγιστη Βαθμολογία:	42 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες:	Κίνα (230), Σοβ. Ένωση (193), Η.Π.Α. (174), Ρουμανία (171), Γαλλία (168), Ουγγαρία (162), Αν. Γερμανία (158), Τσεχοσλοβακία (153).

Η Ελληνική ομάδα πήρε μέρος με τους μαθητές Θ. Ευγενίου, Α. Αργυρίου, Χ. Αδαμάρα, Δ. Δημόπουλο, Αικ. Τερζούδη και Αικ. Βάρσου. Αρχηγός της ομάδας ήταν ο κ. Θεόδωρος Μπόλης και υπαρχηγός ο κ. Δημήτρης Κοντογιάννης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Οι χορδές AB και CD ενός κύκλου τέμνονται στο σημείο E στο εσωτερικό του κύκλου. Έστω M ένα εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος EB. Η εφαπτομένη στο E του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία D, E, M τέμνει τις ευθείες BC, AC στα σημεία F και G αντίστοιχα.

Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{EG}{EF}$ ως συνάρτηση του $t = \frac{AM}{AB}$.

Λύση

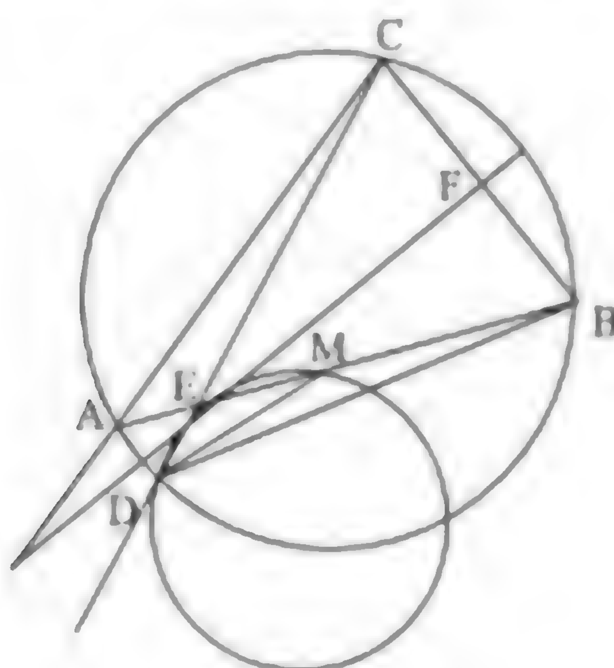
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα CGE και BMD. Είναι $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$ ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο οπότε $\widehat{GCE} = \widehat{MBD}$. Επίσης, $\widehat{GED} = \widehat{EMD}$ ως υπό χορδής και εφαπτομένης και επειδή αυτές οι γωνίες είναι εξωτερικές στα παραπάνω τρίγωνα $\widehat{GCE} + \widehat{CGE} = \widehat{MBD} + \widehat{BDM}$ άρα $\widehat{CGE} = \widehat{BDM}$ οπότε

τα δύο τρίγωνα είναι όμοια.

Έτσι, έχουμε

$$\frac{EG}{EC}=\frac{MD}{MB}. \qquad (1).$$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα CEF και AMD. Είναι $\widehat{CEF} = \widehat{EMD} = \widehat{AMD}$ (υπό χορδής και εφαπτομένης) και $\widehat{FCE} = \widehat{BCD} = \widehat{BAD} = \widehat{MAD}$ (παραπληρωματικές) συνεπώς τα δύο τρίγωνα είναι όμοια.



Σχήμα 106

Άρα είναι

$$\frac{EF}{EC}=\frac{MD}{AM} \qquad (2).$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (1), (2) κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{EG}{EF}=\frac{AM}{MB}=\frac{AM}{AB-AM}=\frac{\frac{AM}{AB}}{1-\frac{AM}{AB}}=\frac{t}{1-t},$$

αφού το M είναι μεταξύ των A και B.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Έστω $n \geqslant 3$ και το σύνολο E που αποτελείται από $2n-1$ διακριτά σημεία ενός κύκλου. Υποθέτουμε ότι ακριβώς κ από αυτά είναι χρωματισμένα μαύρα. Ένας χρωματισμός καλείται «καλός» εάν υπάρχει τουλάχιστον ένα ζευγάρι από μαύρα σημεία τέτοια ώστε το εσωτερικό ενός από τα δύο τόξα που ορίζουν να περιέχει ακριβώς n σημεία του E. Να

βρείτε την ελάχιστη τιμή του κ για την οποία κάθε τέτοιος χρωματισμός κ σημείων να είναι «καλός».

Λύση

Η απάντηση είναι n, άν $n \equiv 0$ ή 1 (mod3) και $n-1$ άν $n \equiv 2$(mod3).

Ας ονομάσουμε τα σημεία 1, 2,, ..., $2n-1$.

Δύο σημεία έχουν ακριβώς n σημεία μεταξύ τους αν και μόνο αν η διαφορά τους είναι $n-2$ ή $n+1$ (mod $2n-1$).

Ας υποθέσουμε ότι $n = 3m$.

Αν χρωματίσουμε μαύρα τα σημεία 1, 4, 7, ..., $6m-2$ καθώς και τα 2, 5, 8, ..., $3m-4$ (δηλαδή $n-1$ σημεία) τότε αυτός ο χρωματισμός δεν είναι «καλός». Συνεπώς $n-1$ χρωματισμένα σημεία δεν είναι αρκετά.

Τώρα, εάν ξεκινήσουμε από το 1 και στη συνέχεια προσθέτουμε διαδοχικά $3m-2$ (mod $6m-1$) τότε θα καταλήξουμε κάποτε πάλι στο 1.

$$1, 3m-1, 6m-3, 4, 3m+1, 1$$

Η ακολουθία αυτή περιέχει όλους τους $6m-1$ αριθμούς. Αλλά για ένα «κακό» χρωματισμό, δύο γειτονικά σημεία δε μπορεί να είναι χρωματισμένα, συνεπώς για ένα «κακό» χρωματισμό το πολύ $n-1$ σημεία είναι χρωματισμένα. Συνεπώς, η απάντηση είναι $\kappa = n$.

Εάν $n = 3m+1$, τότε ένας «κακός» χρωματισμός με $\kappa = n-1$ είναι ο εξής:

$$1, 4, 7, ..., 3m-2 \text{ και } 2, 5, 8, ..., 6m-1.$$

Όπως και προηγουμένως, προσθέτουμε $n-2$ ξεκινώντας από το 1 και παίρνουμε την ακολουθία:

$$1, 3m, ..., 1(\text{mod}2n-1)$$

Και επειδή δύο διαδοχικά σημεία δεν μπορεί να είναι χρωματισμένα σε ένα «κακό» χρωματισμό, αν $\kappa = n$ τότε σίγουρα ο χρωματισμός είναι «καλός».

Εάν τέλος $n = 3m+2$, τότε $\kappa = n-2$ δεν είναι αρκετό, π.χ. ο χρωματισμός 1κ 2, ..., $n-2$ είναι «κακός». Σε αυτή την περίπτωση αν ξεκινήσουμε από το 1 και προσθέτουμε διαδοχικά $n-2 = 3m$ θα ξαναφτάσουμε στο 1 έχοντας περάσει μόνο από το ένα τρίτο των αριθμών. Το προηγούμενο επιχείρημα λεει εδώ ότι το πολύ m σημεία από τα $2m+1$ μπορεί να είναι χρωματισμένα σε ένα «κακό» σύνολο.

Όμοια αν προσθέσουμε 3m στο 2 θα πάρουμε 2m + 1 νέους αριθμούς, το πολύ m από τους οποίους θα είναι χρωματισμένοι, και το ίδιο συμβαίνει αν ξεκινήσουμε από το 3. Συνεπώς, υπάρχουν το πολύ 3m = n - 2 χρωματισμένα σημεία σε ένα «κακό» σύνολο.

Άρα κ = n - 1.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Να προσδιορίσετε όλους τους ακέραιους μεγαλύτερους του 1 τέτοιους ώστε ο $\frac{2^n+1}{n^2}$ να είναι ακέραιος.

Λύση:

Απάντηση: $n = 3$.

Επειδή ο αριθμός $2^n + 1$ είναι περιττός, ο n πρέπει να είναι επίσης περιττός. Έστω p ο μικρότερος πρώτος διαιρέτης του n, και έστω x, y οι μικρότεροι θετικοί ακέραιοι για τους οποίους

$$2^x \equiv -1 \pmod p \text{ και } 2^y \equiv 1 \pmod p$$

αντίστοιχα.

Από το θεώρημα του Fermat $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ οπότε ο y υπάρχει πάντα και επιπλέον $y < p$.

Επίσης επειδή ο n διαιρεί τον αριθμό $2^n + 1$ και ο p είναι παράγοντας του n έχουμε

$$2^n \equiv -1 \pmod p$$

οπότε ο x υπάρχει πάντα και επιπλέον $x < n$.

Έστω $n = yk + u$, όπου $0 \le u < y$.

Παρατηρούμε ότι $u \neq 0$, αφού διαφορετικά θα είχαμε

$$-1 \equiv 2 \equiv \left(2^y\right)^k \equiv 1 \pmod p$$

αδύνατο.

Άρα $-1 \equiv 2^n \equiv 2^{yk} \cdot 2^u \equiv 2^u \pmod p$

οπότε $x \le u < y$.

Έστω ότι $n = x\lambda + \tau$, όπου $0 \le \tau < x$. Τότε έχουμε

$$-1 \equiv 2^n \equiv 2^{x\lambda} + 2^\tau \equiv (-1)^\lambda \cdot 2^\tau \pmod p.$$

Αν υποθέσουμε ότι $\tau > 0$ τότε έχουμε:

$$-1 \equiv (-1)^{\lambda} 2^{\tau} \pmod p$$

δηλαδή

$$-1 \equiv 2^{\tau} \pmod p, \text{ αν } \lambda \text{ άρτιος}$$

άτοπο, αφού $\tau < x$ και ο x είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος για τον οποίο κάτι τέτοιο ισχύει, και όμοια

$$-1 \equiv -2^{\tau} \pmod p, \text{ αν } \lambda \text{ περιττός}$$

επίσης άτοπο, αφού $\tau < y$.

Συνεπώς $\tau = 0$, δηλαδή ο x είναι παράγοντας του n. Όμως επειδή $x < p$ και ο p είναι ο μικρότερος πρώτος διαιρέτης του n πρέπει να ισχύει $x = 1$.

Έτσι $2 \equiv -1 \pmod p$ άρα $p = 3$.

Έστω 3^m η μεγαλύτερη δύναμη του 3 που διαιρεί τον n. Έχουμε διαδοχικά

$$2^n + 1 = (3-1)^n + 1 = 3^n - \ldots - \frac{1}{2}n(n-1)3^2 + 3n - 1 + 1$$

$$= 3^n - \ldots - \frac{1}{2}n(n-1)3^2 + 3n \qquad (1)$$

Το αριστερό μέλος διαιρείται με τον αριθμό 3^{2m}, από την υπόθεση, ενώ όπως θα αποδείξουμε παρακάτω, το δεξί διαιρείται με το 3^{m+1} αλλά όχι με το 3^{m+2}, συνεπώς $m = 1$.

Το ανάπτυγμα (1) γράφεται

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} 3^i .$$

Οι παράγοντες που αντιστοιχούν στις τιμές $m + 2 \le i \le n$ διαιρούνται προφανώς από το 3^{m+2}, αφού περιέχουν τον όρο 3^i. Για τις περιπτώσεις $2 \le i \le m+1$ παρατηρούμε ότι

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να κατασκευάσετε μία συνάρτηση από το σύνολο των θετικών ρητών στον εαυτό του τέτοια ώστε $f(x\, f(y)) = \frac{f(x)}{y}$ για κάθε x, y.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι της μορφής $f : Q_+^* \to Q_+^*$ και είναι 1 – 1.

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$, τότε θα έχουμε

$$\frac{f(x_1)}{x_2} = f(x_1 f(x_2)) = f(x_1 f(x_1)) = \frac{f(x_1)}{x_1},$$

οπότε προκύπτει ότι $x_1 = x_2$.

Για $y = 1$ στη σχέση $f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$ λαμβάνουμε $f(xf(1)) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{Q}_+^*$, οπότε θα είναι $xf(1) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{Q}_+^*$, αφού η f είναι 1-1.

Άρα είναι $f(1) = 1$.

Για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{Q}_+^*$ έχουμε

$$1 = f(1) = f\left(\frac{1}{f(x)} f(x)\right) = \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{f(x)}\right),$$

δηλαδή

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = x,$$

οπότε για x, y στο σύνολο $\mathbb{Q}_+^*$ έχουμε

$$f(xy) = f\left(f\left(\frac{1}{f(x)}\right)y\right) = \frac{f(y)}{\frac{1}{f(x)}} = f(x)\,f(y). \qquad (1)$$

Επίσης έχουμε, $$f(f(x)) = f(1 \cdot f(x)) = \frac{f(1)}{x} = \frac{1}{x}. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), μία πιθανή συνάρτηση κατασκευάζεται ως εξής:

Χωρίζουμε τυχαία τους πρώτους σε δύο απειροσύνολα $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ και $\{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$, και ορίζουμε: $f(p_i) = q_i$, $f(q_i) = \frac{1}{p_i}$, για κάθε i. Ο ορισμός γενικεύεται για οποιονδήποτε ρητό χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $f(xy) = f(x)\,f(y)$, δηλαδή

$$f\left(\frac{p_{\alpha_1}^{\kappa_1} p_{\alpha_2}^{\kappa_2} \cdots q_{\beta_1}^{\lambda_1} q_{\beta_2}^{\lambda_2} \cdots}{p_{\alpha'_1}^{\kappa'_1} p_{\alpha'_2}^{\kappa'_2} \cdots q_{\beta'_1}^{\lambda'_1} q_{\beta'_2}^{\lambda'_2} \cdots}\right) = \frac{q_{\alpha_1}^{\kappa_1} q_{\alpha_2}^{\kappa_2} \cdots p_{\beta'_1}^{\lambda'_1} p_{\beta'_2}^{\lambda'_2} \cdots}{q_{\alpha'_1}^{\kappa'_1} q_{\alpha'_2}^{\kappa'_2} \cdots p_{\beta_1}^{\lambda_1} p_{\beta_2}^{\lambda_2} \cdots}$$

Με επαλήθευση επιβεβαιώνουμε ότι η παραπάνω συνάρτηση ικανοποιεί τη ζητούμενη σχέση.

Θα μπορούσαμε ακόμη να αριθμήσουμε τους πρώτους αριθμούς, έτσι ώστε να κατασκευάσουμε μια γνησίως αύξουσα ακολουθία πρώτων αριθμών, δηλαδή θα έχουμε $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, ...

Έχουμε ότι $f(1) = 1$ και ορίζουμε

$$f(p_i) = \begin{cases} p_{i+1}, & \text{αν ο } i \text{ ειναι αρτιος} \\ p_{i-1}^{-1}, & \text{αν ο } i \text{ ειναι περιττος} \end{cases}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), αν είναι $n = p_1^{\kappa_1} p_1^{\kappa_2} \ldots p_\tau^{\kappa_\tau}$ θα έχουμε

$$f(n) = f(p_1^{\kappa_1} p_1^{\kappa_2} \ldots p_\tau^{\kappa_\tau}) = f(p_1)^{\kappa_1} f(p_2)^{\kappa_2} \ldots f(p_\tau)^{\kappa_\tau},$$

ενώ για τους ρητούς $\dfrac{n}{m}$ χρησιμοποιούμε την ισότητα.

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = f(nf(f(m)) = \frac{f(n)}{f(m)}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Έστω $n_0 > 1$ ένας ακέραιος. Δύο παίκτες A και B διαλέγουν τους ακεραίους $n_1, n_2, n_3, \ldots$ εναλλάξ σύμφωνα με τους παρακάτω κανόνες:

- **Γνωρίζοντας τον $n_{2\kappa}$, ο A διαλέγει έναν οποιονδήποτε ακέραιο $n_{2\kappa+1}$ τέτοιον ώστε $n_{2\kappa} \le n_{2\kappa+1} \le n_{2\kappa}^2$.**
- **Γνωρίζοντας τον $n_{2\kappa+1}$, ο B διαλέγει έναν οποιονδήποτε ακέραιο $n_{2\kappa+2}$ τέτοιον ώστε $\dfrac{n_{2\kappa+1}}{n_{2\kappa+2}} = p^r$, για κάποιο πρώτο p και κάποιο ακέραιο $r \ge 1$.**

Ο παίκτης A κερδίζει αν διαλέξει τον αριθμό 1990, ενώ ο παίκτης B κερδίζει αν διαλέξει τον αριθμό 1. Για ποιες τιμές του n_0:

(i) Ο A έχει στρατηγική νίκης;

(ii) Ο B έχει στρατηγική νίκης;

(iii) Κανένας παίκτης δεν έχει στρατηγική νίκης;

Λύση

Η απάντηση είναι ότι για $n_0 = 2, 3, 4, 5$ ο A χάνει (δηλαδή δεν μπορεί να αποτρέψει τον B να κερδίσει), αν $n_0 \ge 8$ τότε ο A κερδίζει (ο B δεν μπορεί να τον αποτρέψει) ενώ αν $n_0 = 6,7$ το παιχνίδι είναι ισοπαλία (δηλαδή καθένας παίκτης μπορεί να εμποδίσει τον άλλο να κερδίσει).

Η στρατηγική του A δεδομένου ότι ο προηγούμενος αριθμός που επιλέχθηκε είναι ο n είναι η εξής:

(α) Αν $n \in [8, 11]$ διαλέγει τον αριθμό 60.

(β) Αν $n \in [12, 16]$ διαλέγει τον αριθμό 140.

(γ) Αν $n \in [17, 22]$ διαλέγει τον αριθμό 280.

(δ) Αν $n \in [23, 44]$ διαλέγει τον αριθμό 504.

(ε) Αν $n \in [45, 1990]$ διαλέγει τον αριθμό 1990.

(στ) Αν $n = 1991 - 11 \cdot 181$ διαλέγει τον αριθμό 1991.

(ζ) Αν $n \in [11^\kappa \cdot 181 + 1, 11^{\kappa+1} \cdot 181]$ για κάποιο $\kappa \geq 1$ επιλέγει τον αριθμό $11^{\kappa+1} \cdot 181$.

Ας δούμε γιατί ο A κερδίζει αν $n_0 \geq 8$.

Προφανώς ο A κερδίζει αν $n \in [45, 1990]$ (περίπτωση (ε)).

Στην περίπτωση (δ), ο A επιλέγει $504 = 7 \cdot 8 \cdot 9$, οπότε ο B πρέπει να επιλέγει 56, 63, 72 ή 168 το οποίο δίνει νίκη στον A λόγω της περίπτωσης (ε).

Όμοια στην περίπτωση (γ) ο B πρέπει να επιλέξει 35, 40, 56, 70 ή 140, οπότε ο A πάλι κερδίζει λόγω των περιπτώσεων (δ), (ε).

Στην περίπτωση (β) ο B διαλέγει 20, 28, 35 ή 70, οπότε ο A πάλι κερδίζει λόγω των (γ), (δ), (ε).

Στην περίπτωση (α) ο B διαλέγει 12, 15, 20 ή 30 και ο A κερδίζει λόγω των (β), (γ), (δ), (ε).

Τέλος, στις περιπτώσεις (στ), (ζ), αν ο A επιλέξει $11^{\kappa+1} \cdot 181$, $r \geq 0$ τότε ο B πρέπει να διαλέξει $181, 11 \cdot 181, \ldots, 11^\kappa \cdot 181$ ή $11^{\kappa+1}$, δηλαδή έναν αριθμό μικρότερο ή ίσο του $11^\kappa \cdot 181$.

Έτσι λοιπόν αν ο A ξεκινήσει με έναν αριθμό $n \geq 1991$ τότε στην επόμενη κίνηση ο B θα δώσει έναν αριθμό $< n$ οπότε μετά από πεπερασμένο αριθμό κινήσεων ο A κερδίζει.

Αν ο A δώσει έναν αριθμό μικρότερο του 6 τότε ο B μπορεί να διαλέξει 1 και να κερδίσει. Συνεπώς, αν $n_0 = 2$ ο A χάνει, αφού θα πρέπει να δώσει έναν αριθμό μικρότερο ή ίσο του 4. Αν ο A δώσει έναν αριθμό μικρότερο του 11 τότε χάνει, αφού ο B διαλέγει 1 ή 2 και κερδίζει (λόγω της προηγούμενης παρατήρησης).

Συνεπώς, αν $n_0 = 3$ ο A πρέπει να δώσει έναν αριθμό μικρότερο ή ίσο του 9.

Όμοια, αν ο A δώσει έναν αριθμό μικρότερο του 19 χάνει, αφού ο B μπορεί να διαλέξει 1, 2, ή 3, άρα και στην περίπτωση $n_0 = 4$ ο A χάνει.

Τέλος, αν ο Α δώσει έναν αριθμό μικρότερο του 29 τότε χάνει, αφού ο θα επιλέξει 1, 2, 3 ή 4 και θα κερδίσει. Συνεπώς και στην περίπτωση $n_0 = 5$ ο Α χάνει.

Ας δούμε τι γίνεται αν ξεκινήσουμε με $n_0 = 6$ ή 7.

Ο Α πρέπει να επιλέξει $n_1 \geq 30$, διαφορετικά θα κερδίσει ο Β (όπως είδαμε παραπάνω).

Αν ο Α επιλέξει 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, τότε ο Β θα κερδίσει επιλέγοντας 1, 1, 3, 2, 5, 4, 1, 2, 3, 5, 1, 1, 4, 5, 3, 1, 3, 1 αντίστοιχα.

Άρα ο Α πρέπει αναγκαστικά να διαλέξει 30 ή 42. Αν επιλέξει το 30 τότε ο Β πρέπει να επιλέξει 6, 10 ή 15, αλλά με 10 και 15 θα χάσει οπότε πρέπει να επιλέξει 6.

Αν επιλέξει το 42 τότε ο Β πρέπει να διαλέξει 6, 14, 21, όμως αν με 14, 21 κερδίζει ο Α, οπότε πρέπει να επιλέξει 6.

Συνεπώς, αν $n_0 = 6$ ή 7 τότε $n_1 = 30$ ή 42, $n_2 = 6$, $n_3 = 30$ ή 42 κ.λπ. δηλαδή κανένας παίκτης δε μπορεί να νικήσει.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Να αποδείξετε ότι υπάρχει κυρτό 1990-γωνο για το οποίο ισχύουν:

(i) όλες του οι γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους και

(ii) τα μήκη των πλευρών του είναι οι αριθμοί $1^2, 2^2, \ldots, 1990^2$ με κάποια σειρά.

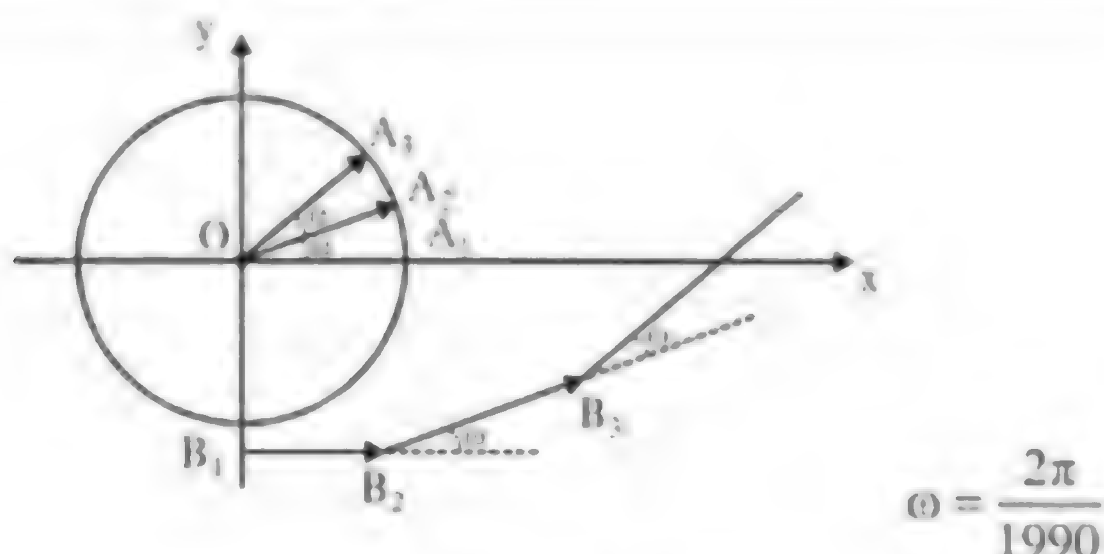
Λύση

Έστω Ο το κέντρο ενός κανονικού 1990-γώνου $A_1A_2\cdots A_{1990}$. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{r}_1 = \overline{OA_1}$, $\vec{r}_2 = \overline{OA_2}$, ..., $\vec{r}_{1990} = \overline{OA_{1990}}$ και μια μετάθεση $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{1990}\}$ του συνόλου $\{1^2, 2^2, \ldots, 1990^2\}$.

Θα αποδείξουμε ότι, αν ισχύει

$$\lambda_1\vec{r}_1 + \lambda_2\vec{r}_2 + \cdots + \lambda_{1990}\vec{r}_{1990} = \vec{0}, \qquad (1)$$

τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα 1990-γωνο $B_1B_2\cdots B_{1990}$ του οποίου οι πλευρές έχουν μήκη $1^2, 2^2, \ldots, 1990^2$ με κάποια σειρά και όλες του οι γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.



Σχήμα 107

Πράγματι, αν θεωρήσουμε σημείο B_1 του άξονα των y και τα διανύσματα $\overline{B_1B_2} = \lambda_1\vec{r}_1$, $\overline{B_2B_3} = \lambda_2\vec{r}_2$, ..., $\overline{B_{1989}B_{1990}} = \lambda_{1989}\vec{r}_{1990}$, τότε λόγω της (1) θα έχουμε

$$\overline{B_{1990}B_1} = -\overline{B_1B_{1990}} = -\left(\lambda_1\vec{r}_1 + \lambda_2\vec{r}_2 + \cdots + \lambda_{1989}\vec{r}_{1989}\right) = \lambda_{1990}\vec{r}_{1990},$$

οπότε θα ισχύει ότι

$$\overline{B_1B_2} + \overline{B_2B_3} + \cdots + \overline{B_{1990}B_1} = \vec{0},$$

δηλαδή το $B_1B_2 \cdots B_{1990}$ είναι το ζητούμενο κυρτό 1990-γωνο.

Επομένως θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε μια κατάλληλη μετάθεση των $1^2, 2^2, \ldots, 1990^2$, έτσι ώστε να ισχύει η σχέση (1).

Παρατηρούμε ότι $1990 = 2 \cdot 5 \cdot 199$, οπότε μπορούμε να διαμερίσουμε το σύνολο $\left\{1^2, 2^2, \ldots, 1990^2\right\}$ σε 199 υποσύνολα της μορφής

$$\left\{1^2, 2^2, \ldots, 10^2\right\}, \left\{11^2, 12^2, \ldots, 20^2\right\}, \ldots, \left\{1981^2, 1982^2, \ldots, 1990^2\right\}.$$

Θεωρούμε και 10 σημεία από τις κορυφές του κανονικού 1990-γώνου $A_1A_2 \cdots A_{1990}$, έστω τα $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{10}$, έτσι ώστε το πολύγωνο $\Gamma_1\Gamma_2 \cdots \Gamma_{10}$ να είναι κανονικό δεκάγωνο. Αντιστοιχίζουμε στα σημεία $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{10}$ μια μετάθεση του συνόλου $\left\{1^2, 2^2, \ldots, 10^2\right\}$ ως εξής:

$$\Gamma_1 \to 1^2,\ \Gamma_2 \to 8^2,\ \Gamma_3 \to 3^2,\ \Gamma_4 \to 10^2,\ \Gamma_5 \to 5^2$$

$$\Gamma_6 \to 2^2,\ \Gamma_7 \to 7^2,\ \Gamma_8 \to 4^2,\ \Gamma_9 \to 9^2,\ \Gamma_{10} \to 6^2,$$

δηλαδή σε αντιδιαμετρικά σημεία αντιστοιχίζουμε τετράγωνα διαδοχικών αριθμών και ορίζουμε το διάνυσμα

$$\vec{\upsilon}_0 = \left(1^2 \cdot \overrightarrow{O\Gamma_1} + 2^2 \cdot \overrightarrow{O\Gamma_6}\right) + \left(8^2 \cdot \overrightarrow{O\Gamma_2} + 7^2 \cdot \overrightarrow{O\Gamma_7}\right) + \left(3^2 \cdot \overrightarrow{O\Gamma_3} + 4^2 \cdot \overrightarrow{O\Gamma_8}\right)$$

$$+\left(10^2 \cdot \overrightarrow{O\Gamma_4} + 9^2 \cdot \overrightarrow{O\Gamma_9}\right) + \left(5^2 \cdot \overrightarrow{O\Gamma_5} + 6^2 \cdot \overrightarrow{O\Gamma_{10}}\right). \quad (2)$$

Επειδή τα ζεύγη (Γ_1, Γ_6), (Γ_2, Γ_7), (Γ_3, Γ_8), (Γ_4, Γ_9), (Γ_5, Γ_{10}) αποτελούνται από αντιδιαμετρικά σημεία, θα έχουμε

$$\vec{\upsilon}_0 = 3 \cdot \overrightarrow{O\Gamma_6} + 7 \cdot \overrightarrow{O\Gamma_8} + 11 \cdot \overrightarrow{O\Gamma_{10}} + 15 \cdot \overrightarrow{O\Gamma_2} + 19 \cdot \overrightarrow{O\Gamma_4}. \quad (3)$$

Εφαρμόζουμε την παραπάνω διαδικασία άλλες 198 φορές, αντιστοιχίζοντας τις κορυφές $\Gamma_{1\kappa}, \Gamma_{2\kappa}, \ldots, \Gamma_{10\kappa}$, $\kappa = 1, 2, \ldots, 198$ στα σύνολα

$$\left\{(10\kappa+1)^2, (10\kappa+2)^2, \ldots, (10\kappa+10)^2\right\}, \ \kappa = 1, 2, \ldots, 198$$

όπως ακριβώς κάναμε προηγουμένως, όπου τα σημεία $\Gamma_{1\kappa}, \Gamma_{2\kappa}, \ldots, \Gamma_{10\kappa}$ είναι οι εικόνες των σημείων $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{10}$ ως προς μία στροφή του επιπέδου με κέντρο O και γωνία $\dfrac{2\kappa\pi}{199}$, $\kappa = 1, 2, \ldots, 198$.

Έτσι ορίζονται τα διανύσματα $\vec{\upsilon}_\kappa$ μέσω της σχέσης (2), τα οποία, αφού ισχύει

$$(10\kappa + n + 1)^2 - (10\kappa + n)^2 = 20\kappa + 2n + 1 = 20\kappa + (n+1)^2 - n^2,$$

θα έχουν τη μορφή

$$\vec{\upsilon}_\kappa = 3 \cdot \overrightarrow{O\Gamma_{6\kappa}} + 7 \cdot \overrightarrow{O\Gamma_{8\kappa}} + 11 \cdot \overrightarrow{O\Gamma_{10\kappa}} + 15 \cdot \overrightarrow{O\Gamma_{2\kappa}} + 19 \cdot \overrightarrow{O\Gamma_{4\kappa}}$$

$$+20\kappa \cdot \left(\overrightarrow{O\Gamma_{2\kappa}} + \overrightarrow{O\Gamma_{4\kappa}} + \overrightarrow{O\Gamma_{6\kappa}} + \overrightarrow{O\Gamma_{8\kappa}} + \overrightarrow{O\Gamma_{10\kappa}}\right), \ \kappa = 1, 2, \ldots, 198,$$

όπου τα σημεία $\Gamma_{2\kappa}, \Gamma_{4\kappa}, \Gamma_{6\kappa}, \Gamma_{8\kappa}, \Gamma_{10\kappa}$ θα είναι κορυφές κανονικού πενταγώνου κέντρου O, οπότε το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων μέσα στη παρένθεση είναι ίσο με το $\vec{0}$.

Άρα έχουμε

$$\vec{\upsilon}_\kappa = 3 \cdot \overrightarrow{O\Gamma_{6\kappa}} + 7 \cdot \overrightarrow{O\Gamma_{8\kappa}} + 11 \cdot \overrightarrow{O\Gamma_{10\kappa}} + 15 \cdot \overrightarrow{O\Gamma_{2\kappa}} + 19 \cdot \overrightarrow{O\Gamma_{4\kappa}}, \quad (4)$$

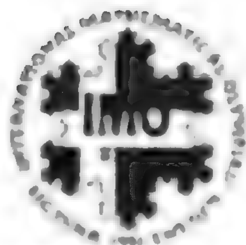
για κάθε $\kappa = 1, 2, \ldots, 198$.

Έτσι, λόγω της σχέσης (2), το άθροισμα $\upsilon_0 + \upsilon_1 + \cdots + \upsilon_\kappa$ έχει τη ζητούμενη μορφή του πρώτου μέλους της (1) και επιπλέον ισχύει: (ταυτίζουμε το σημείο Γ_i με το Γ_{i0})

$$\vec{\upsilon}_0 + \vec{\upsilon}_1 + \cdots + \vec{\upsilon}_{198} = 3 \cdot \sum_{\kappa=0}^{198} \overrightarrow{O\Gamma_{6\kappa}} + 7 \cdot \sum_{\kappa=0}^{198} \overrightarrow{O\Gamma_{8\kappa}} + 11 \cdot \sum_{\kappa=0}^{198} \overrightarrow{O\Gamma_{10\kappa}}$$

$$+15 \cdot \sum_{\kappa=0}^{198} \overrightarrow{O\Gamma_{2\kappa}} + 19 \cdot \sum_{\kappa=0}^{198} \overrightarrow{O\Gamma_{4\kappa}} = \vec{0},$$

αφού κάθε εμφανιζόμενο άθροισμα διανυσμάτων ισούται με το $\vec{0}$. Αυτό ισχύει, γιατί τα σημεία $\Gamma_{i\kappa}$, $i = 2, 4, 6, 8, 10$, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots, 198$, από τον τρόπο κατασκευής τους, είναι κορυφές κανονικού 199-γώνου κέντρου Ο.



32η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1991

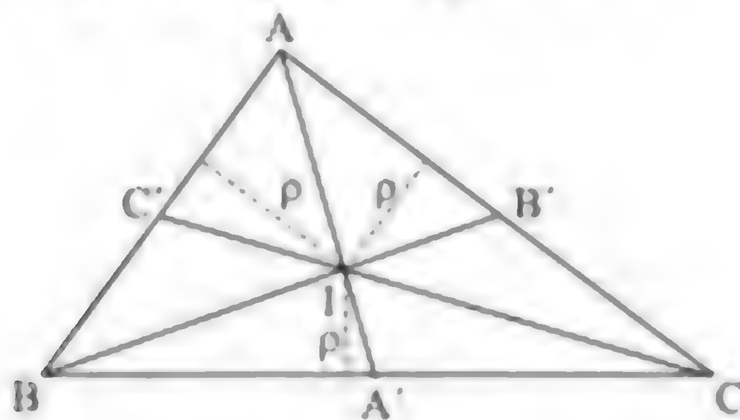
Τόπος Διοργάνωσης: Σουηδία (Σιγκτούνα)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών: Dr Lars-Inge Hedberg (Παν/μιο Linköping)
Συμμετοχή: 56 χώρες με 6 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες Συμμετοχές: Δανία, Ελβετία, Τρίνινταντ και Ταμπάκο
Μέγιστη Βαθμολογία: 42 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες: Σοβ. Ένωση (241), Κίνα (231), Ρουμανία (225), Δ. Γερμανία (222), Η.Π.Α. (212), Ουγγαρία (209), Βουλγαρία (192), Βιετνάμ και Ιράν (191)

Η Ελληνική ομάδα πήρε μέρος με τους μαθητές Χρ. Αδαμάρα, Α. Αργυρίου, Θ. Ευγενίου, Αλ. Καρέλα, Αθ. Λαγκουδέρου και Αικ. Τερζούδη. Αρχηγός της ομάδας ήταν ο κ. Θεόδωρος Μπόλης και υπαρχηγός ο κ. Δημήτρης Κοντογιάννης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω I το έγκεντρο ενός τριγώνου ABC. Οι εσωτερικές διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ τέμνουν τις απέναντι πλευρές στα σημεία A΄, B΄, C΄ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leqslant \frac{8}{27}$.



Σχήμα 108

Λύση

Τα εμβαδά των τριγώνων AIB, AIC, BIC είναι:

$$(AIB) = (AB)\frac{\rho}{2}, \quad (AIC) = (AB)\frac{\rho}{2}, \quad (BIC) = (BC)\frac{\rho}{2},$$

όπου ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου.

Επίσης, θεωρώντας ως βάση την BC, και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Θαλή, έχουμε

$$\frac{(BIC)}{(ABC)} = \frac{IA'}{AA'},$$

$$\text{οπότε } \frac{(ABC) - (BIC)}{(ABC)} = \frac{AI}{AA'} \Leftrightarrow \frac{(AIB) + (AIC)}{(ABC)} = \frac{AI}{AA'}.$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις για τα εμβαδά προκύπτει:

$$\frac{AI}{AA'} = \frac{(AB + AC)\rho}{2(ABC)} = \frac{(AB + AC)\rho}{2\tau\rho} = \frac{AB + AC}{2\tau}$$

όπου 2τ είναι η περίμετρος του τριγώνου ABC (το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ίσο με τρ).

Όμοια υπολογίζουμε τους λόγους

$$\frac{BI}{BB'} = \frac{AB + BC}{2\tau} \quad \text{και} \quad \frac{CI}{CC'} = \frac{AC + BC}{2\tau}$$

Από την ανισότητα Αριθμητικού – Γεωμετρικού μέσου έχουμε ότι:

$$\frac{AI}{AA'} \cdot \frac{BI}{BB'} \cdot \frac{CI}{CC'} \le \left[\frac{1}{3}\left(\frac{AI}{AA'} + \frac{BI}{BB'} + \frac{CI}{CC'}\right)\right]^3$$

$$\text{ή} \quad \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \le \left[\frac{1}{3}\,\frac{2\,2\tau}{2\tau}\right]^3 = \frac{8}{27}.$$

Θέτουμε $x = AB + AC - BC > 0$

$y = AB - AC + BC > 0$

$z = -AB + AC + BC > 0$

οπότε $AB = \frac{1}{2}(x + y)$, $AC = \frac{1}{2}(x + z)$, $BC = \frac{1}{2}(y + z)$.

Οι λόγοι που υπολογίσαμε προηγουμένως γράφονται:

$$\frac{AI}{AA'}=\frac{\frac{(x+y)}{2}+\frac{(x+z)}{2}}{2\tau}=\frac{(x+y+z)+x}{4\tau}=\frac{1}{2}+\frac{x}{4\tau}$$

και όμοια

$$\frac{BI}{BB'}=\frac{1}{2}+\frac{y}{4\tau},\ \frac{CI}{CC'}=\frac{1}{2}+\frac{z}{4\tau}.$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις τρεις παραπάνω ισότητες, λαμβάνουμε

$$\frac{AI\cdot BI\cdot CI}{AA'\cdot BB'\cdot CC'}=\frac{1}{8}\left(1+\frac{x}{2\tau}\right)\left(1+\frac{y}{2\tau}\right)\left(1+\frac{z}{2\tau}\right)>\frac{1}{8}\left(1+\frac{x}{2\tau}+\frac{y}{2\tau}+\frac{z}{2\tau}\right)=\frac{1}{8}(1+1)=\frac{1}{4},$$

και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Έστω $n>6$ ένας ακέραιος και $a_1,a_2,\ldots,a_k$ οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί που είναι μικρότεροι του n και σχετικά πρώτοι με το n. Αν ισχύει

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_k-a_{k-1}>0$$

να αποδείξετε ότι ο n είναι ή πρώτος ή δύναμη του 2.

Λύση:

Αν ο n είναι περιττός τότε οι 1, 2 και $n-1$ είναι σχετικά πρώτοι με το n οπότε

$$2-1=a_3-2=a_4-a_3=\cdots=a_k-a_{k-1},$$

συνεπώς όλοι οι αριθμοί 1, 2, ..., $n-1$ είναι σχετικά πρώτοι με το n, δηλαδή ο n είναι πρώτος.

Αν ο n είναι άρτιος, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- αν $n=4k$, τότε οι $2k-1$ και $2k+1$ είναι σχετικά πρώτοι με το n, άρα όλοι οι περιττοί $<n$ είναι σχετικά πρώτοι με το n άρα $n=2^k$.
- αν $n=4k+2$, τότε ο $2k+1$ διαιρεί τον n, αλλά οι $2k+3$, $2k+5$ είναι σχετικά πρώτοι με το n.

Επειδή $n>6$ έχουμε $2k+5<n$, άρα η περίπτωση αυτή δε δίνει λύσεις.

Άρα ο n πρέπει να είναι πρώτος ή δύναμη του 2.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω S = {1, 2, 3, ..., 280}. Να βρείτε το μικρότερο ακέραιο n για τον οποίο κάθε υποσύνολο του S με n στοιχεία να περιέχει πέντε αριθμούς οι οποίοι να είναι πρώτοι μεταξύ τους ανά δύο.

Λύση

Η απάντηση είναι n=217. Θα αποδείξουμε καταρχήν ότι το ζητούμενο δεν ισχύει για n = 216.

Έστω T το υποσύνολο του S που αποτελείται από τους αριθμούς που είναι πολλαπλάσια των 2, 3, 5, 7. Το T έχει 216 στοιχεία, αφού στο S υπάρχουν $\left[\frac{280}{2}\right] = 140$ πολλαπλάσια του 2, $\left[\frac{280}{3}\right] = 93$ πολλαπλάσια του 3, και όμοια, 56 πολλαπλάσια του 5, 40 πολλαπλάσια του 7, 46 του 6, 28 του 10, 20 του 14, 18 του 15, 13 του 21, 9 του 30, 8 του 35, 6 του 42, 4 του 70, 2, του 105 και 1 του 210. Έτσι

$$|T| = 140 + 93 + 56 + 40 - 46 - 28 - 20 - 18 - 13 - 8 + 9 + 6 + 4 + 2 - 1 = 216.$$

Από την αρχή της περιστεροφωλιάς αν διαλέξουμε οποιουσδήποτε 5 αριθμούς από το T τότε δύο θα έχουν ένα (τουλάχιστον) κοινό παράγοντα από τους 2, 3, 5, 7 οπότε η υπόθεση δεν ισχύει.

Ας εξετάσουμε την περίπτωση n = 217. Θεωρούμε τα παρακάτω υποσύνολα του S:

$A_1 = \{$όλοι οι πρώτοι p, $2 \leq p \leq 280\}$

$A_2 = \{2\cdot41, 3\cdot37, 5\cdot31, 7\cdot29, 11\cdot23, 13\cdot19\}$

$A_3 = \{2\cdot37, 3\cdot31, 5\cdot29, 7\cdot23, 11\cdot19, 13\cdot17\}$

$A_4 = \{2\cdot31, 3\cdot29, 5\cdot23, 7\cdot19, 11\cdot17, 13\cdot13\}$

$A_5 = \{2\cdot29, 3\cdot23, 5\cdot19, 7\cdot17, 11\cdot13\}$

$A_6 = \{2\cdot23, 3\cdot19, 5\cdot17, 7\cdot13, 11\cdot11\}$

Παρατηρούμε ότι τα παραπάνω σύνολα δεν έχουν κοινά στοιχεία οπότε η ένωσή τους A έχει

$$|A| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6| = 60 + 6 + 6 + 6 + 5 + 5 = 88$$

Όμως από τους 280 αριθμούς επιλέξουμε 217, τότε 25 τουλάχιστον από αυτούς θα ανήκουν στο A, αφού 25 = 88 – (280 – 217).

Από την αρχή της περιστεροφωλιάς 5 τουλάχιστον από αυτούς θα ανήκουν στο ίδιο υποσύνολο από τα $A_1, A_2, \ldots, A_6$ αφού $6 \cdot 4 = 24 < 25$.

Αυτοί οι 5 αριθμοί θα είναι όλοι σχετικά πρώτοι μεταξύ τους ανά δύο, οπότε η τιμή $n = 217$ ικανοποιεί τη συνθήκη της υπόθεσης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Έστω G ένα συνεκτικό γράφημα με k ακμές. Να αποδείξετε ότι είναι δυνατό να αριθμήσουμε τις ακμές με τους αριθμούς 1, 2, ..., k έτσι ώστε σε κάθε κορυφή που ανήκει σε 2 ή περισσότερες ακμές ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών των ακμών αυτών να είναι 1.

Λύση

Κατασκευάζουμε την αρίθμηση ως εξής:

Από μία τυχαία κορυφή A ακολουθούμε ένα μονοπάτι κατά μήκος ακμών που δεν έχουν αριθμηθεί, και ονομάζουμε τις ακμές που συναντούμε 1, 2, 3 ... κλπ., έως ότου συναντήσουμε μία κορυφή B χωρίς μη-αριθμημένες ακμές. Η κορυφή A θα έχει ΜΚΔ των ακμών της 1, αφού μία ακμή της είναι η 1, και οι υπόλοιπες μεταξύ του A, B θα έχουν ΜΚΔ των ακμών 1 επειδή θα έχουν δύο ακμές με διαδοχικούς αριθμούς.

Τέλος η κορυφή B είτε θα έχει μόνο μία ακμή, οπότε ο ΜΚΔ δε μας ενδιαφέρει ή θα είναι μία από τις κορυφές μεταξύ των A, B ου διανύσαμε πριν, οπότε ο ΜΚΔ θα είναι 1.

Στη συνέχεια ξεκινάμε από μία άλλη κορυφή με μη-αριθμημένη ακμή και συνεχίζουμε τη διαδικασία αρίθμησης, και για τους ίδιους λόγους όλες οι καινούργιες κορυφές θα έχουν ΜΚΔ ίσο με το 1.

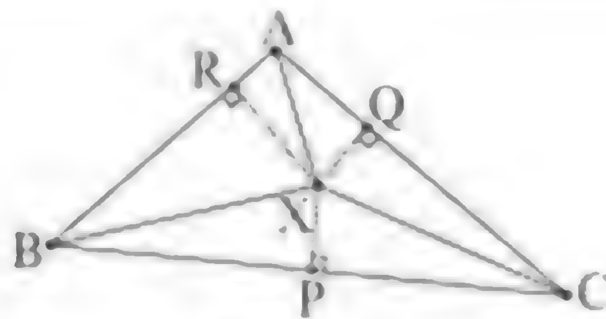
Η τελευταία κορυφή είτε θα έχει ΜΚΔ = 1 ή θα έχει μία μόνο ακμή. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία έως ότου εξαντληθούν όλες οι ακμές.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Έστω ABC ένα τρίγωνο και X ένα εσωτερικό του σημείο. Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον μία από τις γωνίες $X\hat{A}B$, $X\hat{B}C$, $X\hat{C}A$ είναι μικρότερη ή ίση με 30°.

Λύση:

Έστω P, Q, R τα ίχνη των καθέτων από το X στις πλευρές BC, AC, AB αντίστοιχα.



Σχήμα 109

Από την ισότητα των εμβαδών έχουμε:

$$(ABX)+(BCX)+(ACX)=(ABC)$$

Επομένως έχουμε: $(AB)(RX)+(BC)(PX)+(AC)(QX)=2(ABC)\leq$

$$\leq(BC)(AP)\leq(BC)\big((AX)+(XP)\big)=$$

$$=(BC)(AX)+(BC)(XP)$$

οπότε

$$(AB)(RX)+(AC)(QX)\leq(BC)(XP)$$

$$\text{ή } (BC)\geq\frac{(AB)(RX)}{(XP)}+\frac{(AC)(QX)}{(XP)}$$

$$\text{άρα } (BC)^2\geq 4\cdot\frac{(AB)(RX)}{(XP)}\cdot\frac{(AC)(QX)}{(XP)}.$$

(Χρησιμοποιώντας τη σχέση $(a+b)^2\geq 4ab$).

Και όμοια παίρνουμε τις σχέσεις

$$(CA)^2\geq 4\frac{(BC)(AB)(PX)(RX)}{(BX)^2} \text{ και } (AB)^2\geq 4\frac{(AC)(BC)(QX)(PX)}{(CX)^2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε:

$$1\geq 64\left(\frac{RX}{AX}\right)^2\left(\frac{PX}{BX}\right)^2\left(\frac{QX}{CX}\right)^2 \quad \text{άρα} \quad \left(\frac{RX}{AX}\right)\left(\frac{PX}{BX}\right)\left(\frac{QX}{CX}\right)\leq\frac{1}{8},$$

οπότε $\left(\text{ημ}\, X\hat{A}B\right)\left(\text{ημ}\, X\hat{B}C\right)\left(\text{ημ}\, X\hat{C}A\right)\leq\frac{1}{8}$

Άρα κάποια από τις παρενθέσεις πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση του $\frac{1}{2}$, δηλαδή κάποια από τις τρεις γωνίες θα είναι μικρότερη των 30°.

Η συνθήκη $\eta\mu\hat{\varphi} \leq \frac{1}{2}$ όμως μπορεί να σημαίνει ότι $\hat{\varphi} \geq 150°$. Στην περίπτωση αυτή μία από τις άλλες δύο γωνίες του τριγώνου θα είναι μικρότερη του 30° άρα και μία από τις ζητούμενες γωνίες θα είναι μικρότερη του 30°.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Έστω $a > 1$ ένας πραγματικός αριθμός. Να κατασκευάσετε μία φραγμένη ακολουθία $x_0, x_1, x_2, \ldots$ τέτοια ώστε $|x_n - x_m|\cdot|n - m|^a \geqslant 1$ για κάθε n, m, $n \neq m$.

(Μία ακολουθία πραγματικών $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ονομάζεται φραγμένη, αν υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $|x_n| \leqslant c$ για κάθε n.

Λύση

Έστω $t = \left(\frac{1}{2}\right)^a$, $c = 1 - \frac{t}{1 - t}$. Επειδή $a > 1$, θα έχουμε $c > 0$. Για κάθε ακέραιο $n > 0$ θεωρούμε τη δυαδική γραφή του $n = \sum_i b_i 2^i$ και ορίζουμε

$x_n = \frac{1}{c} \sum_{b_i > 0} t^i > 0.$

Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία αυτή ικανοποιεί τη ζητούμενη σχέση.

Έστω k η μέγιστη δύναμη του 2 που διαιρεί του m, n. Έχουμε $|n - m| \geqslant 2^k$. Επίσης, στο δυαδικό ανάπτυγμα των m, n οι συντελεστές των $2^0, 2^1, \ldots, 2^{k-1}$ συμφωνούν, ενώ αυτοί του 2^k είναι διαφορετικοί.

Άρα έχουμε:

$$c\,|x_n - x_m| = t^k + \sum_{i>k} y_i, \text{ όπου } y_i = 0,\ t^i \text{ ή } -t^i \text{ και } \sum_{i>k} y_i > -\sum_{i>k} t^i = \frac{t^{k+1}}{1-t},$$

οπότε προκύπτει

$$c\,|x_n - x_m| > t^k\left(1 - \frac{t}{1-t}\right) = ct^k, \text{ και } |x_n - x_m|\,|n - m|^a \geqslant t^k 2^{ak} = 1.$$

Η ακολουθία είναι φραγμένη, αφού $x_n > 0$ και $x_n < \frac{1}{c}\sum_n t^n = \frac{1}{1-2t}$, για κάθε $n = 0, 1, \ldots$



$33^{η}$ Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1992

Τόπος Διοργάνωσης:	Ρωσσία (Μόσχα)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	Ν.Ν.
Συμμετοχή:	56 χώρες με 6 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες Συμμετοχές:	Ρωσσία, Ν. Αφρική, Ταϊβάν
Μέγιστη Βαθμολογία:	42 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες:	Κίνα (240), Ρουμανία (177), Σοβ. Ένωση (176), Ην. Βασίλειο (168), Ρωσσία (158), Γερμανία (149), Ουγγαρία (209) και Ιαπωνία (142)

Η Ελληνική ομάδα: πήρε μέρος με τους μαθητές Ι. Μαυροειδή, Ι. Βέτσικα, Ε. Παπαδόπουλο, Ι. Καρύδη, Αικ. Τερζούδη και Κ. Μπάρτζη. Αρχηγός της ομάδας ήταν ο κ. Θεόδωρος Μπόλης και υπαρχηγός ο κ. Δημήτρης Κοντογιάννης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να βρείτε όλους τους ακέραιους a, b, c με $1<a<b<c$ που είναι τέτοιοι ώστε ο αριθμός $(a-1)(b-1)(c-1)$ να είναι διαιρέτης του $abc-1$.

Λύση

Έστω $F(p,q,r)=\dfrac{pqr-1}{(p-1)(q-1)(r-1)}, 1<p<q<r$, με p, q, r ακέραιους.

Επειδή

$$F(p,q,r)=1+\frac{1}{p-1}+\frac{1}{q-1}+\frac{1}{r-1}+\frac{1}{(p-1)(q-1)}+\frac{1}{(p-1)(r-1)}+\frac{1}{(q-1)(r-1)}$$

έχουμε $F(p,q,r)>1$ και η $F(p,q,r)$ είναι φθίνουσα ως προς τα p, q, r.

Παρατηρούμε επίσης ότι αν ένας από τους p, q, r είναι άρτιος, τότε πρέπει όλοι οι p, q, r να είναι άρτιοι, διαφορετικά ο pqr - 1 θα ήταν περιττός και ο $(p-1)(q-1)(r-1)$ άρτιος, αδύνατο.

Αν $p\geq 4$, έχουμε: $1<F(p,q,r)\leq F(4,6,8)=\frac{104}{48}<2$ αδύνατο αφού ο F είναι ακέραιος.

Συνεπώς $p\leq 3$, δηλαδή $p=2$ ή $p=3$.

Αν $p=2$ έχουμε:

$$1<F(2,q,r)\leq F(2,4,6)=\frac{47}{15}<4,$$

και επειδή $F(2,p,q)$ είναι πάντα περιττός, η μόνη περίπτωση είναι $F(2,p,q)=3$.

Αντικαθιστώντας τις τιμές για το $F(2,p,q)=3$ και $p=2$ παίρνουμε την εξίσωση

$$(q-3)(r-3)=5$$

άρα έχουμε $q=4, r=8$ (αφού $q<r$).

Αν $p=3$, έχουμε ομοίως: $1<F(3,q,r)\leq F(3,5,7)<3$, συνεπώς πρέπει $F(3,q,r)=2$. Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$(q-4)(r-4)=11, \text{ άρα } q=5, r=15.$$

Έτσι οι λύσεις είναι $(a,b,c)=(2,4,8)$ και $(a,b,c)=(3,5,15)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες $f(x^2+f(y))=y+f^2(x)$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, y.

Λύση

Θέτουμε $x=y=0$ και έστω $f(0)=\kappa$. Έχουμε $f(\kappa)=\kappa^2$.

Αν $y=0$ τότε $f(x^2+\kappa)=f(x)^2$, ενώ αν $x=0$: $f(f(y))=y+\kappa^2$.

Είναι διαδοχικά:

$f(\kappa^2 + f(1)^2) = f(f(\kappa) + f(1)^2) = \kappa + f(f(1))^2 = \kappa + (1 + \kappa^2)^2 = 1 + \kappa + 2\kappa^2 + \kappa^4$.

Όμως επίσης

$$f(\kappa^2 + f(1)^2) = f(\kappa^2 + f(1^2 + \kappa)) = 1 + \kappa + f(\kappa)^2 = 1 + \kappa + \kappa^4$$

δηλαδή $1 + \kappa + 2\kappa^2 + \kappa^4 = 1 + \kappa + \kappa^4$ ή $\kappa = 0$, οπότε $f(0) = 0$.

Έτσι, έχουμε $f(f(x)) = x$ και $f(x^2) = f(x)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι $z = f(y)$.

Τότε $f(z) = f(f(y)) = y$ άρα $f(x^2 + y) = z + f(x)^2 = f(y) + f(x)^2$.

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$.

Θέτουμε $z = \sqrt{x}$ οπότε έχουμε

$$f(x + y) = f(z^2 + y) = f(y) + f(z)^2 = f(y) + f(z^2) = f(x) + f(y).$$

Επίσης $f(x - y) = f(x + (-y)) = f(x) + f(-y)$.

Όμως $f(y) + f(-y) = f(y + (-y)) = f(0) = 0$ (επειδή ένας από τους y, $-y$ θα είναι θετικός ή μηδέν) οπότε $f(x - y) = f(x) - f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

Οι παρακάτω σχέσεις ισχύουν και όταν ο x είναι αρνητικός αφού τότε π.χ.

$$f(x + y) = f(-(-x - y)) = -f(-x - y) = -[f(-x) - f(y)] = f(x) + f(y).$$

Τέλος, έστω $x \in \mathbb{R}$ και $y = f(x)$.

Αν υποθέσουμε ότι $y > x$ τότε έστω $z = y - x > 0$.

Έχουμε $f(z) = f(y - x) = f(y) - f(x) = x - y = -z$.

Όμοια αν $y < x$ τότε θέτουμε $z = y - x > 0$, οπότε

$$f(z) = f(x - y) = f(x) - f(y) = y - x = -z,$$

δηλαδή σε κάθε περίπτωση έχουμε κάποιο $z > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(z) = -z < 0.$$

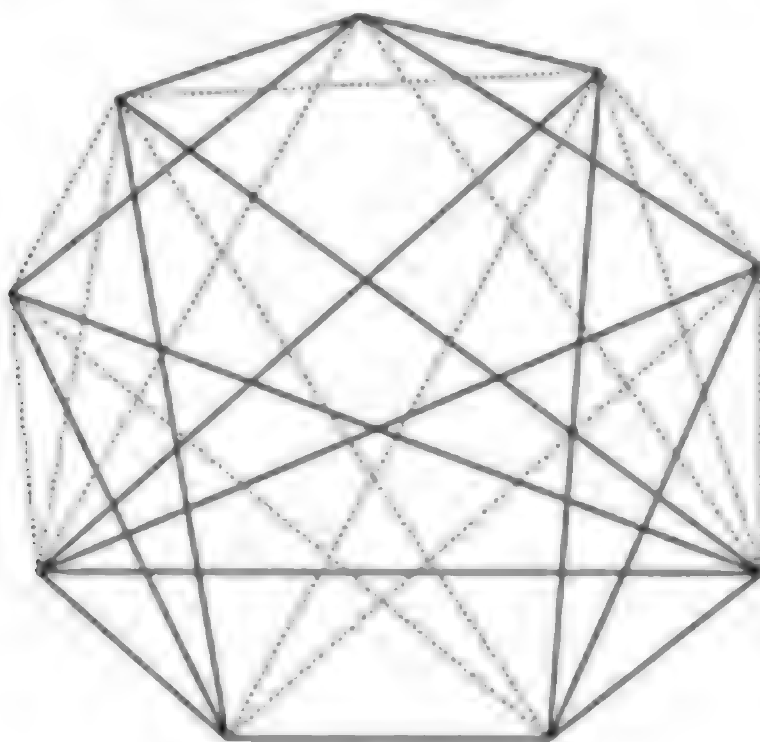
Όμως, αν πάρουμε $\omega = \sqrt{z}$ τότε $-z = f(z) = f(\omega^2) = f(\omega)^2 \geq 0$, άτοπο.

Συνεπώς, πρέπει να έχουμε $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Θεωρούμε 9 σημεία στο χώρο, ανά 4 μη-συνεπίπεδα και ενώνουμε

τα σημεία ανά δύο μεταξύ τους με ένα ευθύγραμμο τμήμα χρώματος είτε κόκκινου ή μπλε ή χωρίς κανένα χρώμα. Να βρείτε την μικρότερη τιμή του n για την οποία οποτεδήποτε n ακριβώς τμήματα είναι χρωματισμένα, το σύνολο των χρωματισμένων τμημάτων περιέχει ένα τρίγωνο του οποίου οι πλευρές να έχουν το ίδιο χρώμα.



Σχήμα 110

Λύση

Για n = 32 μπορούμε να βρούμε (δες σχήμα) ένα χρωματισμό που να μην περιέχει κανένα τρίγωνο με πλευρές του ίδιου χρώματος.

Θα αποδείξουμε ότι για n = 33 μπορούμε πάντα να βρούμε ένα μονοχρωματικό τρίγωνο.

Τα ζεύγη σημείων που υπάρχουν είναι $\binom{9}{2} = 36$, οπότε υπάρχουν 3 μη-χρωματισμένες ακμές.

Έστω $X_1X_2X_3$ το τρίγωνο που ορίζουν. Τα υπόλοιπα 6 σημεία θα πρέπει να είναι ενωμένα μεταξύ τους με χρωματισμένα τμήματα.

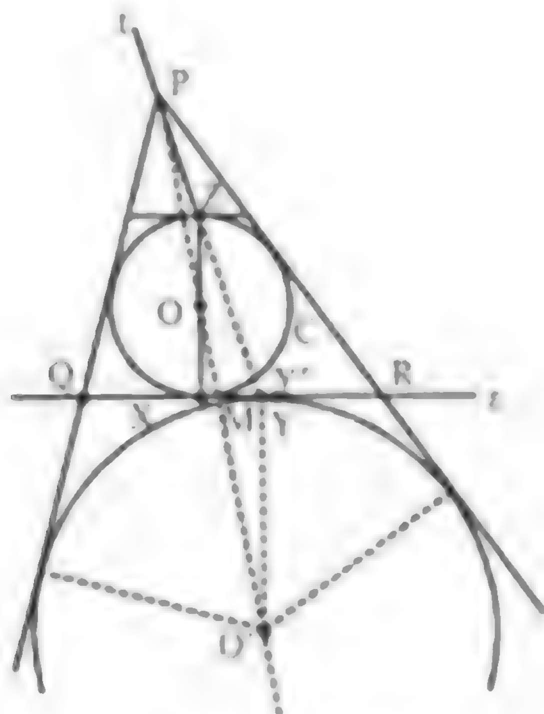
Έστω X ένα από αυτά τα σημεία. Από την αρχή της περιστεροφωλιάς τρεις από τις 5 ακμές που περνούν από το X θα είναι του ίδιου χρώματος. Έστω ότι αυτές οι ακμές είναι οι XA_1, XA_2, XA_3 και ότι είναι κόκκινες. Αν μία από τις A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3 είναι κόκκινη τότε έχουμε ένα κόκκινο τρίγωνο. Αν, αντίθετα, όλες οι A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3 είναι μπλε τότε σχηματίζεται το μπλε τρίγωνο $A_1A_2A_3$.

Άρα για n = 33 θα υπάρχει πάντα ένα μονοχρωματικό τρίγωνο, οπότε η ζητούμενη τιμή είναι n = 32.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Έστω μία ευθεία ε που εφάπτεται σε έναν κύκλο C, και ένα σημείο M πάνω στην ε. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων P του επιπέδου για τα οποία υπάρχουν σημεία Q, R στην ε τα οποία να ισαπέχουν από το M, και ο C να είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο PQR.

Λύση



Σχήμα 111

Έστω O το κέντρο του C, X το σημείο επαφής του C με την ε και έστω ότι η XO τέμνει τον C ξανά στο Z.

Παίρνουμε σημείο Y πάνω στην QR έτσι ώστε το M να είναι μέσο του XY. O ζητούμενος τόπος είναι μία ημιευθεία Zt πάνω στην YZ, που ξεκινά από το Z και δεν περνά από το Y, εκτός από την αρχή της Z.

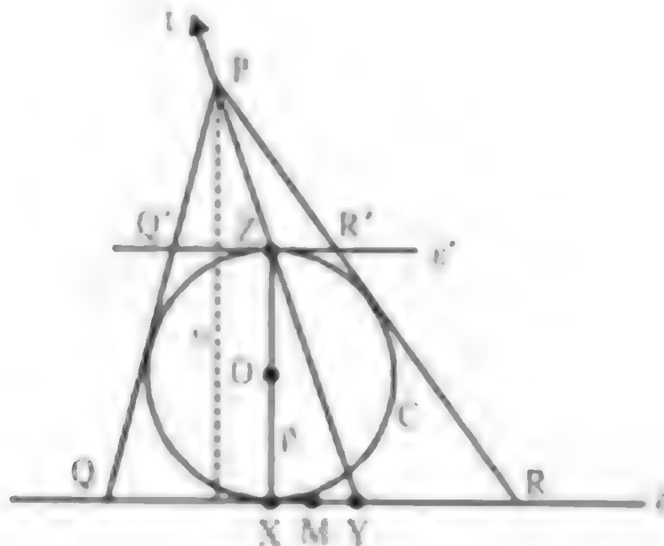
Έστω C΄ ο κύκλος που βρίσκεται σε διαφορετικό ημιεπίπεδο ως προς την ε από αυτό του κύκλου C και εφάπτεται στα τμήματα QR και τις ευθείες PQ, QR.

Έστω Y΄ το σημείο επαφής του C΄ με την QR.

Αν θεωρήσουμε ομοιοθεσία με κέντρο P και λόγο $\frac{PO}{PO'}$ τότε ο κύκλος C μετασχηματίζεται στο C΄, η εφαπτόμενη του C στο Z μετασχηματίζεται στην QR, οπότε και το Z μεταφέρεται στο Y΄. Όμως προφανώς έχουμε $QX = RY'$. Από την ομοιότητα των τριγώνων QY΄O΄ και OXQ έχουμε $\frac{QY'}{Y'O'} = \frac{OX}{XQ}$ ενώ από τα τρίγωνα $\frac{RXO}{O'Y'R}$ έχουμε $\frac{RX}{XO} = \frac{O'Y'}{Y'R}$, άρα $(QY')(XQ) = (OX)(O'Y') = (RX)(Y'R)$ οπότε $QX = RY'$ και το σημείο

Y' ταυτίζεται με το Y. Όμως τότε το P ανήκει στην ημιευθεία που προαναφέραμε. Αντίστροφα, οποιοδήποτε σημείο P της ημιευθείας οδηγεί στην ισότητα QX = RY και αφού το M είναι το μέσο της XY, θα είναι και το μέσο της QR, οπότε ο τόπος είναι ολόκληρη η ημιευθεία, εκτός της αρχής Z.

2ος τρόπος



Σχήμα 112

Έστω P τυχόν σημείο του τόπου. Ο κύκλος C, η ευθεία ε και το σημείο επαφής X είναι δεδομένα. Τότε οι εφαπτομένες από το P προς τον κύκλο C θα τέμνουν την ευθεία ε στα σημεία Q, R έτσι ώστε το σημείο M να είναι μέσον του QR. Αν Z είναι το αντιδιαμετρικό σημείο του X, τότε η εφαπτομένη του C στο Z, έστω ε', θα είναι παράλληλη προς την ε και θα τέμνει τις PQ, PR στα σημεία P', Q', αντιστοίχως. Αν η PZ τέμνει την ε στο σημείο Y, τότε τα τρίγωνα PYR και PZR' είναι όμοια με λόγο ομοιότητας

$$\lambda = \frac{\upsilon}{\upsilon - 2\rho} = \frac{\dfrac{2(PQR)}{QR}}{\dfrac{2(PQR)}{QR} - \dfrac{2(PQR)}{\tau}} = \frac{\tau}{\tau - QR},$$

όπου $\rho = OX$, $2\tau = PQ + QR + RP$ και υ είναι το ύψος του τριγώνου PQR από την κορυφή P. Επομένως θα έχουμε

$$YR = \lambda ZR' = \lambda R'K = \lambda(PR - PR' - KR) \text{ ή}$$

$$YR = \lambda PR - PR - \lambda(\tau - PQ)$$

$$= (\lambda - 1)PR - \lambda(\tau - PQ)$$

$$=\left(\frac{OR}{\tau-OR}\right)\cdot PR-\left(\frac{\tau}{\tau-OR}\right)\cdot(\tau-PQ)$$

$$=\tau-PR\,.$$

Όμως είναι και $QX=\tau-PR$, οπότε θα είναι και $YR=QX$. Επειδή το M είναι μέσον του QR, θα έχουμε ότι:

$$MY=MR-YR=MQ-QX=XM\,,$$

οπότε το σημείο Y είναι συμμετρικό του σημείου επαφής X ως προς το M.

Επομένως το σημείο P ανήκει στην ημιευθεία Zt με αρχή το σημείο Z, η οποία ανήκει στην ευθεία ZY και δεν περιέχει το Y. Επίσης εξαιρείται και η αρχή της ημιευθείας.

Για το αντίστροφο θεωρούμε τυχόν σημείο της ημιευθείας Zt από το οποίο οι εφαπτόμενες προς τον κύκλο C τέμνουν την ευθεία ε στα Q και R. Τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι $YR=QX$, οπότε με την υπόθεση $MX=MY$, προκύπτει ότι το M είναι μέσον του QR.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Έστω S ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων στον τρισδιάστατο χώρο. Έστω S_x, S_y, S_z τα σύνολα που αποτελούνται από τις ορθογώνιες προβολές των σημείων του S στα επίπεδα yz, zx, xy αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$|S|^2 \leqslant |S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|$, όπου το $|A|$ συμβολίζει τον αριθμό των σημείων του συνόλου A.

(Η ορθογώνια προβολή ενός σημείου σε ένα επίπεδο είναι το ίχνος της καθέτου από το σημείο στο επίπεδο).

Λύση

Θεωρούμε τα σύνολα:

$$S(x)=\{(y,z)\mid(x,y,z)\in S\}$$

$$S_y(x)=\{z\mid(x,z)\in S_y\}$$

$$S_z(x)=\{y\mid(x,y)\in S_z\}$$

Για καθεμιά από τις x-συντεταγμένες των σημείων του S ισχύει από τον ορισμό ότι $S(x)\subseteq S_x$ και $S(x)\subseteq S_y(x)\cdot S_z(x)$ οπότε και

$$|S(x)|\le|S_x|,\ |S(x)|\le|S_y(x)|\cdot|S_z(x)|$$

Άρα έχουμε:

$$|S| = \sum_x |S(x)| \le \sum_x \sqrt{|S_x| \cdot |S_y(x)| \cdot |S_z(x)|}$$

$$= \sqrt{|S_x|} \cdot \sum_x \sqrt{|S_y(x)| \cdot |S_z(x)|} \le \sqrt{|S_x|} \sqrt{\sum_x |S_y(x)|} \sqrt{\sum_x |S_z(x)|}$$

$$= \sqrt{|S_x|} \sqrt{|S_y|} \sqrt{|S_z|},$$

συνεπώς $|S|^2 \le |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Για κάθε θετικό ακέραιο n, ορίζουμε $S(n)$ ως τον μεγαλύτερο ακέραιο για τον οποίο για κάθε θετικό ακέραιο $k \le S(n)$, ο αριθμός n^2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα k θετικών τετραγώνων.

(α) Να αποδείξετε ότι $S(n) \le n^2 - 14$ για κάθε $n \ge 4$.

(β) Να βρείτε έναν ακέραιο για τον οποίο $S(n) = n^2 - 14$.

(γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειροι ακέραιοι n τέτοιοι ώστε $S(n) = n^2 - 14$.

Λύση

(α) Έστω $N = n^2$. Υποθέτουμε ότι μπορούμε να γράψουμε τον N ως άθροισμα $N - 13$ τετραγώνων.

Έστω $x_1, x_2, x_3, \ldots$ το πλήθος των 4, των 9, των 16, κλπ. στη γραφή του N. Τότε πρέπει

$$13 = 3x_1 + 8x_2 + 15x_3 + \cdots$$

συνεπώς $x_3 = x_4 = \cdots = 0$, δηλαδή $13 = 3x_1 + 8x_2$, αδύνατο, οπότε $S(n) \le n^2 - 14$.

(β) Έχουμε $13^2 = 169 = 9 + 4 + 4 + 152 = 9 + 4 + 4 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{152 \text{ φορές}}$ δηλαδή άθροισμα $155 = 13^2 - 14$ τετραγώνων. Για τους αριθμούς $k < 155$ με $k \equiv 2 (\bmod 3)$, μπορούμε να εκφράσουμε το 13^2 ως άθροισμα k τετραγώνων αντικαθιστώντας τέσσερα ψηφία 1 με ένα 4, π.χ. για $k = 152$:

$$169 = 9 + 4 + 4 + 4 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{148 \text{ φορές}}$$

έως τον αριθμό $k = 41$:

$$169 = 9 + \underbrace{4 + 4 + \cdots + 4}_{40 \text{ φορές}}$$

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας τέσσερα ψηφία 4 με ένα 16 έχουμε τις περιπτώσεις $k \equiv 2(\bmod 3)$ με $k = 38, 35, \ldots, 11$, π.χ. για $k = 11$ είναι

$$169 = 9 + \underbrace{16 + 16 + \cdots + 16}_{10 \text{ φορές}}$$

Τέλος έχουμε:

$k = 8$: $\quad 169 = 9 + 64 + \underbrace{16 + 16 + \cdots + 16}_{6 \text{ φορές}}$

$k = 5$: $\quad 169 = 9 + 64 + 64 + 16 + 16$

$k = 2$: $\quad 169 = 144 + 25$.

Για τους αριθμούς $k < 155$ με $k \equiv 1(\bmod 3)$, ξεκινούμε με το άθροισμα: $169 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{149 \text{ φορές}}$

που δίνει την περίπτωση $k = 154$.

Αντικαθιστώντας τα ψηφία όπως προηγουμένως παίρνουμε τις περιπτώσεις $k = 151, 148, \ldots, 7$, όπου π.χ. για $k = 7$ έχουμε

$$169 = 64 + 64 + 16 + 16 + 4 + 4 + 1.$$

Τέλος για $k = 4$ έχουμε

$$169 = 10^2 + 8^2 + 2^2 + 1^2.$$

Για $k < 155$ με $k \equiv 0(\bmod 3)$ ξεκινούμε από το άθροισμα

$$169 = 9 + 9 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{151 \text{ φορές}}$$

που αντιστοιχεί σε $k = 153$. Εργαζόμαστε όπως προηγουμένως παίρνοντας τα αθροίσματα για $k = 150, 147, \ldots, 9$, όπου για $k = 9$ έχουμε

$$169 = 64 + 64 + 16 + 9 + 9 + 4 + 1 + 1 + 1.$$

Τέλος έχουμε:

$k=6:\quad 169=12^2+3^2+2^2+2^2+2^2+2^2$

$k=3:\quad 169=12^2+4^2+3^2$.

Άρα μπορούμε να γράψουμε τον $13^2=169$ ως άθροισμα k τετραγώνων για κάθε $k\le 155=13^2-14$.

(γ) Θα αποδείξουμε ότι $S\left(13^p\right)=13^{2p}-14$ για κάθε ακέραιο $p\ge 1$.

Για $p=1$ ισχύει από το (β).

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάθε $p\ge 1$, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε τον 13^{2p} ως άθροισμα k τετραγώνων για κάθε $k=1,2,\ldots,13^{2p}-14$.

Θεωρούμε τον $n=13^{p+1}$.

Επειδή $13^{2p+2}=13^{2p}\cdot 13^2$, μπορούμε να γράψουμε τον 13^{2p+2} ως άθροισμα k τετραγώνων όπου $k=1,2,3,\ldots,\left(13^{2p}-14\right)\left(13^2-14\right)$.

Επίσης, ο 13^{2p+2} γράφεται ως άθροισμα $13^{2p+2}-14$ τετραγώνων αφού

$$13^{2p+2}=9+4+4+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{13^{2p+2}-17\text{ φορές}}$$

Αντικαθιστώντας τα ψηφία 1, 4, όπως στο (β) μπορούμε να γράψουμε εκφράσεις για τον 13^{2p+2} για $k=13^{2p+2}-14, 13^{2p+2}-13,\ldots$ έως τουλάχιστον $\left[\dfrac{13^{2p+2}}{2}\right]$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\left[\dfrac{13^{2p+2}}{2}\right]\le\left(13^{2p}-14\right)\left(13^2-14\right)$.

Πράγματι, έχουμε:

$$\left(13^{2p}-14\right)\left(13^2-14\right)=13^{2p+2}-14(3^{2p}+155)>13^{2p+2}-13\cdot 85$$

$$\left(85=\frac{13^2+1}{2}\right)\text{ άρα }\left(13^{2p}-14\right)\left(13^2-14\right)\ge\left[\frac{13^{2p+2}}{2}\right]$$

και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.



$34^{η}$ Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1993

Τόπος Διοργάνωσης:	Τουρκία (Κωνσταντινούπολη)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	A. Askar (Παν/μιο Κων/λης)
Συμμετοχή:	73 χώρες με 6 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες Συμμετοχές:	Αλβανία, Αρμενία, Αζερμπαϊτζαν, Βοσνία-Ερζεγοβίνη, Λευκορωσσία, Εσθονία, Γεωργία, Κροατία, Καζακστάν, Κιργιστάν, Λιθουανία, Λεττονία, Μολδαβία, Π.Γ.Δ.Μ. Σλοβενία, Τουρκμενιστάν, Ουκρανία
Μέγιστη Βαθμολογία:	42 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες:	Κίνα (215), Γερμανία (189), Βουλγαρία (178), Ρωσσία (177), Ταϊβάν (162), Ιράν (153), Η.Π.Α. (151), Ουγγαρία (143).
Η Ελληνική ομάδα:	Δεν πήρε μέρος

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$, όπου $n>1$ είναι ένας ακέραιος. Να αποδείξετε ότι το $f(x)$ δεν μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο δύο μη σταθερών πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές.

Λύση:

Έστω $f(x)=\left(x^r+a_{r-1}x^{r-1}+\cdots+a_1x+3\right)\left(x^s+b_{s-1}x^{s-1}+\cdots+b_1x+1\right)$.

Θα δείξουμε ότι όλα τα a_i πρέπει να διαιρούνται με το 3.

Καταρχήν παρατηρούμε ότι $r\ge 2, s\ge 2$, αφού αν $r=1$ ή $s=1$ θα είχαμε τις ρίζες $x=-3$ ή $x=-1$, αντίστοιχα, που είναι αδύνατο.

Επειδή $r < n-1$, όλοι οι συντελεστές των $x, x^2, \ldots, x^r$ στο $f(x)$ είναι μηδέν, άρα $a_1 + 3b_1 = 0 \Rightarrow a_1 =$ πολ. (3) κλπ., άρα όλοι οι $a_1, a_2, \ldots, a_t$ είναι πολλαπλάσια του 3. Τότε για το a_{t+1} έχουμε:

- αν $s-1 \geq t+1$, το a_{t+1} είναι γραμμικός συνδυασμός των $a_1, a_2, \ldots, a_t, 3b_{t+1}$, άρα είναι πολλαπλάσιο του 3.
- αν $s-1 < t+1$, το a_{t+1} είναι γραμμικός συνδυασμός των $a_1, a_2, \ldots, a_t$, άρα πολλαπλάσιο του 3.

Επαγωγικά, καταλήγουμε ότι όλα τα a_i πρέπει να είναι πολλαπλάσια του 3.

Ο συντελεστής του x^r είναι 0 στο $f(x)$, όμως είναι πολ. $(3)+1$ στο γινόμενο, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.

Συνεπώς η γραφή του πολυωνύμου ως γινόμενο δύο μη σταθερών πολυωνύμων δεν είναι δυνατή. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν θεωρήσουμε τη γραφή:

$$f(x) = \left(x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \cdots + a_1 x - 3\right)\left(x^s + b_{s-1}x^{s-1} + \cdots + b_1 x - 1\right).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Έστω D εσωτερικό σημείο οξυγώνιου τριγώνου ABC τέτοιο ώστε $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + 90^\circ$ και $AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

(α) Να προσδιορίσετε το λόγο $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$.

(β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες στο C των κύκλων (A, C, D) και (B, C, D) είναι κάθετες.

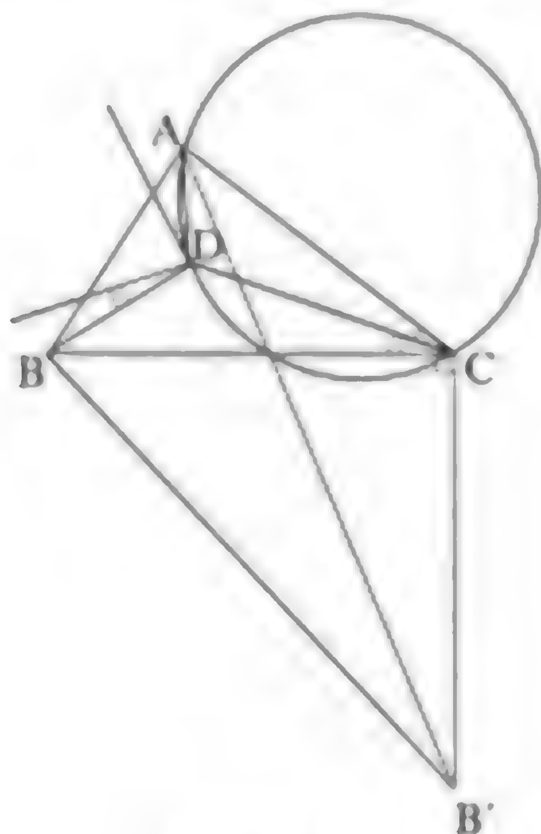
Λύση

Έστω B΄ το σημείο για το οποίο $CB = CB'$, $\widehat{BCB'} = 90^\circ$ και το B΄ είναι στην αντίθετη πλευρά της BC από ότι το A.

Τα τρίγωνα ADB και ACB΄ είναι όμοια, καθώς και τα DAC και BAB΄. Συνεπώς, έχουμε

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AB'}{B'C} \text{ και } \frac{CD}{AC} = \frac{BB'}{AB'}, \text{ οπότε } \frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \frac{BB'}{B'C} = \sqrt{2}.$$

Έστω XD η εφαπτομένη του κύκλου (A, D, C) στο D έτσι ώστε η XD να είναι στο εσωτερικό της $\widehat{ADB}$. Όμοια παίρνουμε YD εφαπτομένη του (B, D, C) στο D.



Σχήμα 113

Έχουμε $\widehat{ADX} = \widehat{ACD}$, $\widehat{BDY} = \widehat{BCD}$, οπότε θα είναι $\widehat{ADX} + \widehat{BDY} = \widehat{ACB}$ και $\widehat{XDY} = \widehat{ADB} - (\widehat{ADX} + \widehat{BDY}) = \widehat{ADB} - \widehat{ACB} = 90°$, δηλαδή οι εφαπτόμενες των κύκλων στο D είναι κάθετες, οπότε το ίδιο θα είναι και οι εφαπτόμενες των κύκλων στο C.

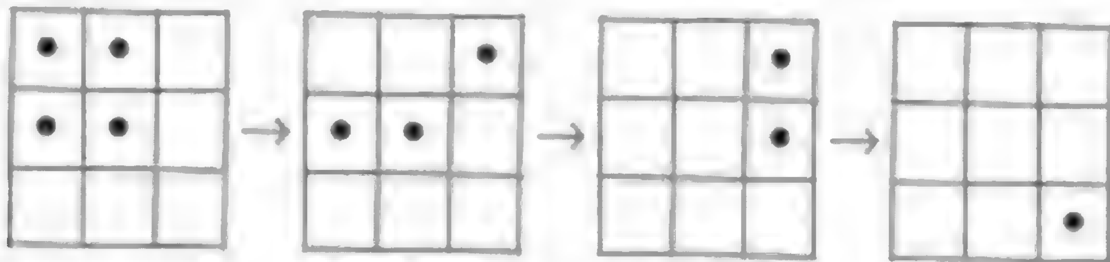
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Σε μια άπειρη σκακιέρα παίζουμε το εξής παιχνίδι: Στην αρχή n^2 πιόνια τοποθετούνται σε μία $n \times n$ περιοχή της σκακιέρας, ένα πιόνι σε κάθε τετράγωνο. Μια κίνηση του παιχνιδιού είναι ένα οριζόντιο ή κατακόρυφο πήδημα πάνω από ένα γειτονικό πιόνι σε ένα μη κατειλημένο τετράγωνο αμέσως δίπλα. Το πιόνι πάνω από το οποίο πέρασε το πρώτο αφαιρείται. Να βρείτε όλες τις τιμές του n για τις οποίες το παιχνίδι μπορεί να τελειώσει με ένα μόνο πιόνι στη σκακιέρα.

Λύση:

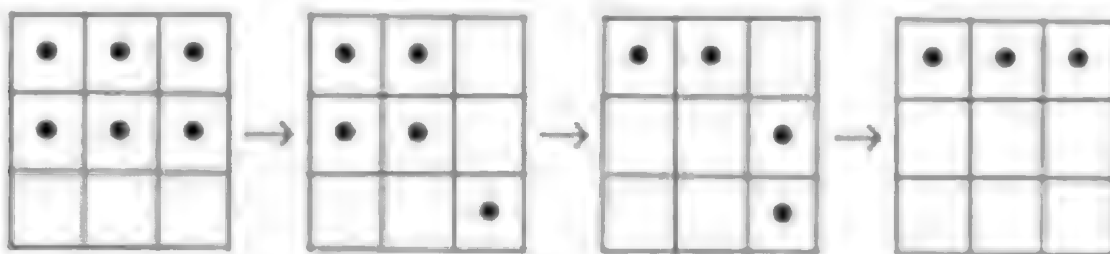
Το παιχνίδι τελειώνει με ένα πιόνι αν και μόνο αν $n = 2$, $n = 4$ ή ο n δεν είναι πολλαπλάσιο του 3.

Για $n = 2$:

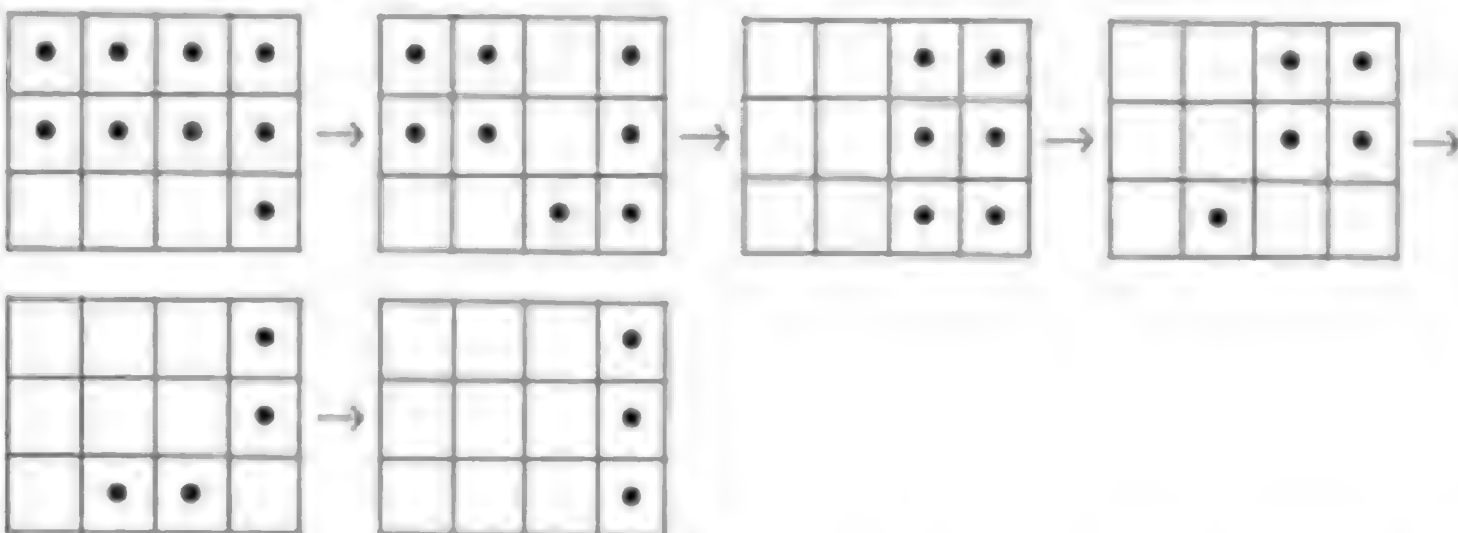


και για $n = 4$:

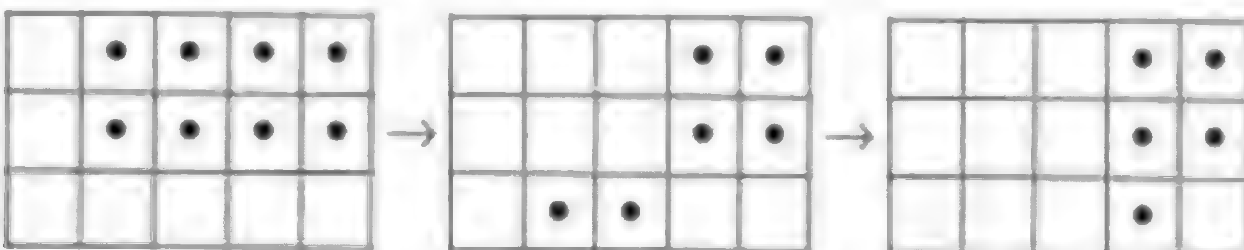
Για την γενική περίπτωση, παρατηρούμε ότι η παρακάτω κίνηση αφαιρεί 3 γειτονικά πιόνια, δεδομένου ότι υπάρχουν πιόνια πίσω τους:



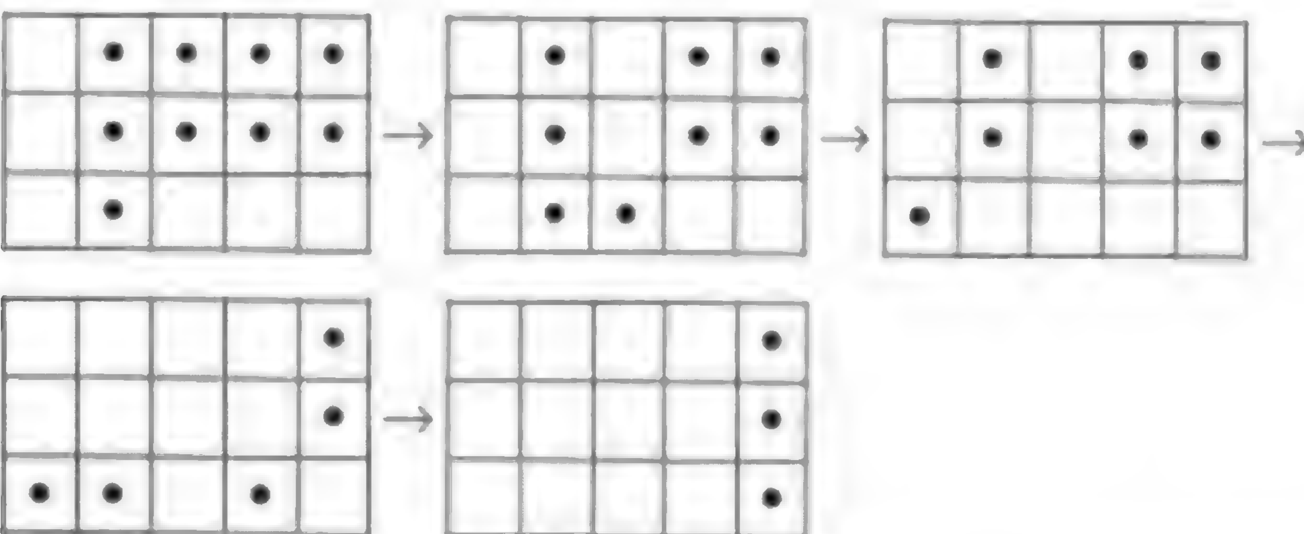
Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να μετατρέψουμε ένα $(r+3)\times s$ ορθογώνιο σε ένα $r\times s$ ορθογώνιο:



Συνεπώς ένα τετράγωνο με πλευρά $3m+2$ μπορεί να μετατραπεί σε ένα $(2m+2)\times 2$ ορθογώνιο. Στη συνέχεια αφαιρούμε ένα 2×2 τετράγωνο στην άκρη του ορθογωνίου:



και κατόπιν μπορούμε να ελαττώσουμε την πλευρά του ορθογωνίου κατά 3 ως εξής:



Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία ελαττώνουμε τις «στήλες» του ορθογωνίου κατά 3 κάθε φορά αφήνοντας μόνο ένα πιόνι στο τέλος.

Στην περίπτωση που το τετράγωνο έχει πλευρά $3m+1$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω τεχνική και να το μετατρέψουμε σε ένα 4×4 τετράγωνο και ύστερα να χρησιμοποιήσουμε τη λύση για το 4×4 τετράγωνο.

Μένει να αποδείξουμε ότι αν η πλευρά είναι ίση με $3m$ τότε δεν υπάρχει λύση.

Χρωματίζουμε τη σκακιέρα με τρία χρώματα, άσπρο, πράσινο, κόκκινο εναλλάξ ως εξής:

Κ	Α	Π	Κ	Α
Α	Π	Κ	Α	Π
Π	Κ	Α	Π	Κ
Κ	Α	Π	Κ	Α

Έστω ότι το τελευταίο πιόνι είναι σε κόκκινο τετράγωνο, και έστω A, B, C οι κινήσεις σε κόκκινο, άσπρο, πράσινο τετράγωνο αντίστοιχα. Μία κίνηση σε κόκκινο τετράγωνο αυξάνει κατά 1 το πλήθος των «κόκκινων» πιονιών και μειώνει κατά 1 το πλήθος των «άσπρων» και «πράσινων» πιονιών, κλπ..

Έστω ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι $n=3m$. Αρχικά υπάρχουν $3m^2$ πιόνια σε κόκκινα, άσπρα και πράσινα τετράγωνα, συνεπώς:

$$-A+B+C=3m^2-1,\ A-B+C=3m^2,\ A+B-C=3m^2$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε $A=3m^2$, $B=C=3m^2-\frac{1}{2}$, άτοπο, αφού οι A, B, C πρέπει να είναι ακέραιοι. Συνεπώς το ζητούμενο δε γίνεται για $n=3m$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Για κάθε τρία σημεία P, Q, R του επιπέδου ορίζουμε ως $m(PQR)$ το μήκος του μικρότερου από τα τρία ύψη του τριγώνου PQR ή 0 αν τα σημεία είναι συνευθειακά. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία A, B, C, X ισχύει

$$m(ABC)\le m(ABX)+m(AXC)+m(XBC).$$

Λύση:

Έχουμε προφανώς ότι $m(ABC)=\frac{2(ABC)}{\ell}$, όπου ℓ το μήκος της μεγαλύτερης πλευράς του ABC.

(α) Έστω ότι το X είναι στο εσωτερικό του ABC.

Έχουμε $(ABC)=(ABX)+(AXC)+(XBC)$, οπότε

$m(ABC)=\frac{2(ABX)}{\ell}+\frac{2(AXC)}{\ell}+\frac{2(XBC)}{\ell}$, όπου ℓ η μεγαλύτερη πλευρά του ABC. Έστω q, n, p οι μεγαλύτερες πλευρές των τριγώνων ABX, AXC, XBC αντίστοιχα. Τότε προφανώς $q\le\ell$, $n\le\ell$, $p\le\ell$, οπότε

$$m(ABC)\le\frac{2(ABX)}{q}+\frac{2(AXC)}{n}+\frac{2(XBC)}{p}$$

$$\text{ή } m(ABC)\le m(ABX)+m(AXC)+m(XBC).$$

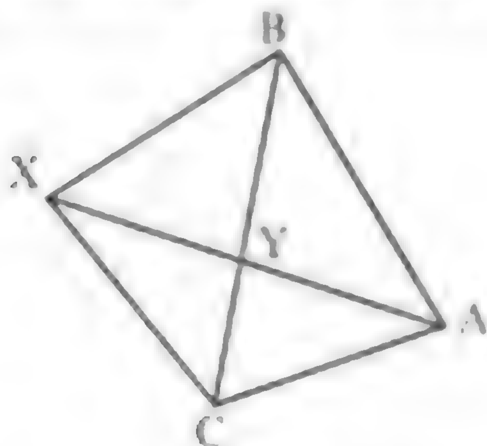
(β) Έστω ότι το X βρίσκεται στο εξωτερικό του X και ότι ένα από τα τμήματα XA, XB, XC τέμνει τα τμήματα BC, AC, AB αντίστοιχα, έστω ότι τέμνει το BC στο Y (σχήμα 1). Τότε έχουμε:

$$m(ABX)+m(AXC)+m(XBC)\ge m(ABY)+m(AYC)+m(YBC)\ge m(ABC).$$

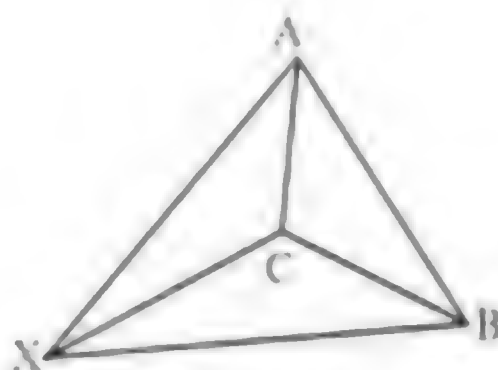
(γ) Έστω ότι κανένα από τα τρία ζεύγη ευθυγράμμων τμημάτων του (p) δεν τέμνονται. Τότε ένα από τα σημεία A, B, C θα είναι στο εσωτερικό του τριγώνου XBC, XAC, XAB αντίστοιχα, έστω ότι είναι το C (σχήμα 2). Έχουμε

$$m(ABX)+m(AXC)+m(XBC)\ge m(ABX)\ge m(ABC).$$

Άρα σε κάθε περίπτωση το ζητούμενο ισχύει.



Σχήμα 114 (i)



Σχήμα 114 (ii)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ τέτοια ώστε $f(1)=2$, $f(f(n))=f(n)+n$ για κάθε n και $f(n)<f(n+1)$ για κάθε n;

Λύση:
Η απάντηση είναι ναι.

Έστω $n=\sum_{r\geq 2} a_r F_r$ η γραφή του αριθμού n στην μορφή Fibonacci, δηλαδή $a_r=0$ ή 1 για $r\geq 0$, F_r είναι ο r-στός αριθμός Fibonacci δηλαδή $F_1=1, F_2=1, F_3=2, F_4=3, F_5=5$, κλπ. και αν $a_k=1$ για κάποιο k τότε $a_{k-1}=a_{k+1}=0$. Κάθε φυσικός έχει μοναδικό τρόπο γραφής σε αυτή τη μορφή. Μία συνάρτηση που ικανοποιεί τα ζητούμενα είναι η

$$f(n)=\sum_{r\geq 2} a_r F_{r+1}$$

αφού για κάθε $n\geq 1$ έχουμε

$$f(f(n))=\sum_{r\geq 2} a_r F_{r+2} \text{ και}$$

$$f(n)+n=\sum_{r\geq 2} a_r F_{r+1}+\sum_{r\geq 2} a_r F_r=\sum_{r\geq 2} a_r(F_{r+1}+F_r)=\sum_{r\geq 2} a_r F_{r+2}$$

για κάθε $n\geq 1$.

Επίσης ισχύει $1=1\cdot F_2$, οπότε $f(1)=1\cdot F_3=2$ και η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, αφού αν, $x=\sum_{r\geq 2} x_r F_r$, $y=\sum_{r\geq 2} y_r F_r$ τότε $x>y$ αν και μόνο αν $\sum_{r\geq 2} x_r 2^r>\sum_{r\geq 2} y_r 2^r$ το οποίο ισχύει αν, και μόνο αν,

$$2\sum_{r\geq 2} x_r 2^r>2\sum_{r\geq 2} y_r 2^r \Leftrightarrow \sum_{r\geq 2} x_r 2^{r+1}>\sum_{r\geq 2} y_r 2^{r+1} \Leftrightarrow \sum_{r\geq 2} x_r F_{r+1}>\sum_{r\geq 2} y_r F_{r+1} \Leftrightarrow f(x)>f(y).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Έχουμε $n>1$ λάμπες $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$ σε ένα κύκλο. Θεωρούμε ότι L_{n+k} σημαίνει L_k. Κάθε λάμπα είναι είτε αναμμένη είτε σβηστή. Εκτελούμε τα βήματα $S_0, S_1, \ldots$ ως εξής:

Στο βήμα S_i, αν η λάμπα L_{i-1} είναι αναμμένη, τότε ανάβουμε τη

λάμπα L_i αν είναι σβηστή και αντίστροφα, διαφορετικά δεν κάνουμε τίποτε. Να αποδείξετε ότι:

(α)Υπάρχει κάποιος θετικός ακέραιος $M(n)$ τέτοιος ώστε μετά από $M(n)$ βήματα όλες οι λάμπες είναι ξανά αναμμένες.

(β)Αν $n = 2^k$, τότε ένας πιθανός $M(n)$ είναι ο $n^2 - 1$.

(γ)Αν $n = 2^k + 1$, τότε ένας πιθανός $M(n)$ είναι ο $n^2 - n + 1$.

Λύση:

(α)Καταρχήν παρατηρούμε ότι η διαδικασία δεν γίνεται να τελειώσει, δηλαδή σε κάποιο βήμα όλες οι λάμπες να είναι σβηστές.

Αν συνέβαινε κάτι τέτοιο, στο προτελευταίο βήμα μία μόνο λάμπα θα έπρεπε να είναι αναμμένη, όμως τότε το τελευταίο βήμα δεν θα την έσβηνε αφού η γειτονικές της λάμπες είναι σβηστές.

Ακόμα επειδή κάθε βήμα προσδιορίζεται αποκλειστικά και μόνο από το προηγούμενο βήμα και υπάρχει πεπερασμένος αριθμός καταστάσεων 2^n, αφού έχουμε n διαφορετικές λάμπες σε κύκλο και καθεμία είναι αναμμένη ή σβηστή) η ακολουθία των καταστάσεων των λαμπών να επαναλαμβάνεται περιοδικά από ένα σημείο και μετά.

Για να αποδείξουμε ότι η διαδικασία είναι περιοδική από την αρχή, ας υποθέσουμε αντίθετα ότι υπάρχει μία αρχική ακολουθία βημάτων 1, 2, ..., k και από εκεί και ύστερα η ακολουθία γίνεται περιοδική, ξαναγυρίζοντας κάποτε στο k. Όμως τότε η κατάσταση $k+1$ θα είχε δύο διαφορετικές προηγούμενες καταστάσεις, αδύνατο αφού από κάποια κατάσταση μπορούμε να βρούμε την προηγούμενή της με μοναδικό τρόπο.

(β)Παρατηρούμε ότι στην πρώτη «κίνηση» της λάμπας $n-2$, η λάμπα θα σβήσει και θα παραμείνει σβηστή έως ότου κάθε λάμπα να έχει κάνει $n-1$ «κινήσεις».

Συνεπώς για τις $n-1$ πρώτες κινήσεις της λάμπας $n-1$, η λάμπα δεν επηρεάζεται και διατηρεί την αρχική της κατάσταση. Αφού κάθε λάμπα έχει κάνει $n-1$ κινήσεις, όλες οι λάμπες 1 έως $n-2$ είναι σβηστές. Τέλος στις επόμενες $n-1$ κινήσεις οι λάμπες 1 έως $n-2$ ανάβουν, άρα όλες οι λάμπες είναι ξανά αναμμένες. Θα αποδείξουμε με επαγωγή ότι τα παραπάνω ισχύουν για κάθε $n = 2^k$. Για $k = 2$ είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = 2^k$ και θεωρούμε ότι έχουμε $2n = 2^{k+1}$ λάμπες.

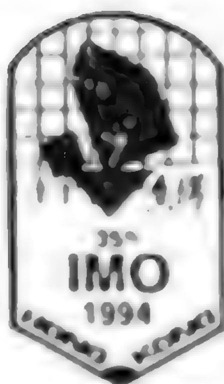
Για τις πρώτες $n-1$ κινήσεις κάθε λάμπας, οι n λάμπες στα αριστερά

και οι n λάμπες στα δεξιά είναι ουσιαστικά απομονωμένες, ενώ οι λάμπες $n-1$ και $2n-1$ είναι αναμμένες. Το γεγονός ότι η λάμπα $2n-1$ είναι αναμμένη σημαίνει ότι οι λάμπες 0 έως $n-2$ είναι στην ίδια κατάσταση με όταν είχαμε μόνο n λάμπες, και το ίδιο ισχύει για την λάμπα $n-1$ και τις λάμπες n έως $2n-2$. Συνεπώς, μετά από $n-1$ κινήσεις κάθε λάμπας όλες οι λάμπες είναι σβηστές εκτός από τις $n-1$ και $2n-1$. Στις επόμενες n κινήσεις οι λάμπες 1 έως $n-2$ ανάβουν, η λάμπα $n-1$ σβήνει, οι λάμπες n έως $2n-2$ παραμένουν σβηστές και η λάμπα $2n-1$ παραμένει αναμμένη. Στις επόμενες $n-1$ κινήσεις, η λάμπα $n-1$ δεν επηρεάζεται οπότε παραμένει σβηστή. Συνεπώς όλες οι λάμπες n έως $2n-2$ παραμένουν σβηστές και η λάμπα $2n-1$ αναμμένη.

Οι λάμπες 0 έως $n-2$ ακολουθούν την ίδια ακολουθία όπως όταν σε ένα σύνολο n λαμπών, άρα μετά από $n-1$ κινήσεις κάθε λάμπας όλες οι λάμπες είναι σβηστές εκτός από την $2n-1$. Τέλος στις επόμενες $2n-1$ κινήσεις οι λάμπες 0 έως $2n-2$ ανάβουν και τελειώνει η επαγωγή.

Μετρώντας τις κινήσεις, έχουμε $n-1$ ομάδες από n κινήσεις, ακολουθούμενες από $n-1$ κινήσεις, δηλαδή συνολικά n^2-1 κινήσεις.

(γ) Θα δείξουμε με επαγωγή στον αριθμό των κινήσεων ότι για $n=2^k+1$ λάμπες ότι αν κάθε λάμπα έχει κάνει m κινήσεις, η λάμπα $i+2$ είναι στην ίδια κατάσταση με την λάμπα i ενώ κάθε λάμπα έχει κάνει m κινήσεις σε ένα σύνολο από $n-1=2^k$ λάμπες, όπου $i=0,1,2,\dots,2^k-2$. Παρατηρούμε ότι αυτό ισχύει για $m=1$, αφού και στις δύο περιπτώσεις οι περιττές λάμπες είναι αναμμένες και οι άρτιες είναι σβηστές. Υποθέτουμε ότι ισχύει για τυχαίο m. Η λάμπα 2 είναι στην ίδια κατάσταση με την λάμπα 0 στην δεύτερη περίπτωση και οι δύο αλλάζουν κατάσταση αφού οι προηγούμενες λάμπες τους είναι αναμμένες. Συνεπώς οι λάμπες 3 έως $n-1$ συμπεριφέρονται το ίδιο με τις λάμπες 1 έως $n-3$ της δεύτερης περίπτωσης. Συνεπώς η λάμπα $n-1$ παραμένει σβηστή, άρα η λάμπα 0 δεν αλλάζει κατά την $(m+1)$ κίνησή της, και παραμένει σβηστή, οπότε η λάμπα 1 δεν αλλάζει κατάσταση στην $(m+1)$ κίνησή της, παραμένοντας αναμμένη, κλπ., και η επαγωγή σταματά όταν η λάμπα $n-2$ αλλάζει στην n-οστή κίνησή της στην δεύτερη περίπτωση. Έτσι μετά από $n-2$ κινήσεις κάθε λάμπας όλες είναι σβηστές εκτός από την 1. Στις επόμενες 2 κινήσεις δεν γίνεται τίποτε, ενώ στις επόμενες $n-1$ οι λάμπες 2 έως $n-1$ και 0 ανάβουν, δηλαδή όλες οι λάμπες ξανανάβουν μετά από $(n-2)n+n+1=n^2-n+1$ κινήσεις.



35^{η} Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1994

Τόπος Διοργάνωσης: Χονγκ - Κονγκ
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών: Kar – Ping Shum (Παν/μιο Χονγκ - Κονγκ)
Συμμετοχή: 69 χώρες με 6 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες Συμμετοχές: Χιλή
Μέγιστη Βαθμολογία: 42 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες: Η.Π.Α. (252), Κίνα (229), Ρωσσία (224) Βουλγαρία (223), Ουγγαρία (221), Βιετνάμ (207), Ην. Βασίλειο (206), Ιράν (203)

Η Ελληνική ομάδα: Η Ελληνική ομάδα πήρε μέρος με τους μαθητές: Γ. Σολιδάκη, Ι. Μαυροειδή, Ε. Ράππο, Ν. Ζύγουρα, Α. Οικονόμου και Θ. Σαγκβινάτσο. Αρχηγός της ομάδας ήταν ο κ. Θεόδωρος Μπόλης και υπαρχηγός ο κ. Δημήτρης Κοντογιάννης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω m, n φυσικοί αριθμοί και $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ ένα υποσύνολο του $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, τέτοιο ώστε, αν $a_i + a_j \le n$ για κάποιους δείκτες I, j με $1 \le i \le j \le m$, τότε ο αριθμός $a_i + a_j$ ανήκει επίσης στο A. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \ge \frac{n+1}{2}.$$

Λύση

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_1 > a_2 > \cdots > a_m$. Θα αποδείξουμε ότι $a_i + a_{m+1-i} > n+1$ για κάθε

$i = 1, 2, \dots, m$. Αν είχαμε $a_i + a_{m+1-i} \le n$ για κάποιο i, τότε

$$a_i < a_1 + a_m < a_1 + a_{m-1} < \cdots < a_i + a_{m+1-i} \le n,$$

συνεπώς οι αριθμοί $a_i + a_m$, $a_i + a_{m-1}$, ..., $a_i + a_{m+1-i}$ ανήκουν στο A. Οι παραπάνω αριθμοί είναι i στο πλήθος και είναι όλοι μεγαλύτεροι του a_i, άτοπο, αφού μόνο οι αριθμοί $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$ είναι μεγαλύτεροι του a_i. Έχουμε λοιπόν

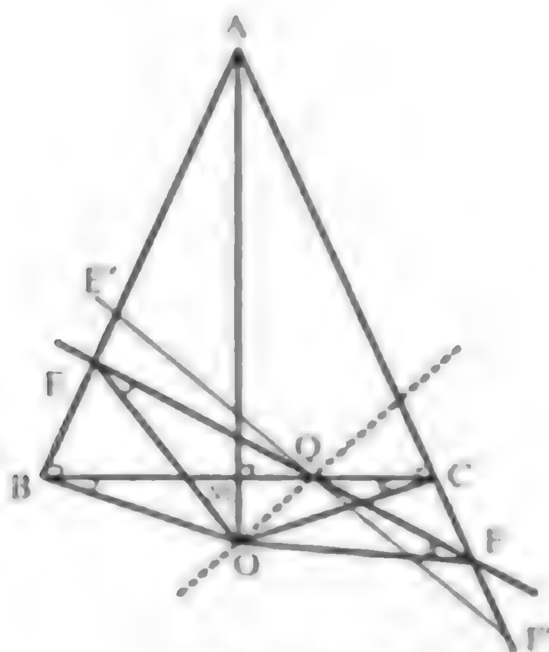
$$2(a_1 + a_2 + \cdots + a_m) = (a_1 + a_m) + (a_2 + a_{m-1}) + \cdots + (a_m + a_1) \ge m(n+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \ge \frac{n+1}{2}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Έστω ABC ένα ισοσκελές τρίγωνο με $AB = AC$. Έστω M το μέσο της BC και O σημείο της AM τέτοιο ώστε η OB να είναι κάθετη στην AB. Το σημείο Q είναι ένα τυχαίο σημείο της BC διάφορο των B, C, και τα σημεία E, F βρίσκονται στις ευθείες AB, AC αντίστοιχα, τέτοια ώστε τα σημεία E, Q, F να είναι συνευθειακά. Να αποδείξετε ότι $OQ \perp EF$ αν, και μόνο αν, $QE = QF$.

Λύση



Σχήμα 115

Έστω ότι $OQ \perp EF$. Τότε τα τετράπλευρα BEQO, FCQO είναι εγγράψιμα, αφού έχουν δύο γωνίες τους ορθές. Έτσι $\hat{OBQ} = \hat{OEQ}$ και $\hat{OCQ} = \hat{OFQ}$. Όμως από το ισοσκελές OBC έχουμε $\hat{OBQ} = \hat{OCQ}$, οπότε

$O\hat{E}Q = O\hat{F}Q$. Άρα το τρίγωνο OEF είναι ισοσκελές με $QE = QF$.

Αντίστροφα, έστω ότι $QE = QF$. Αν η OQ δεν είναι κάθετη στην EF, φέρνουμε την κάθετη $E'F' \perp OQ$, όπου $E' \in AB$, $F' \in AC$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε $QE' = QF'$ οπότε τα τρίγωνα QEE' και QFF' είναι ίσα. Συνεπώς $Q\hat{E}E' = Q\hat{F}F'$, δηλαδή $CA \parallel AB$, άτοπο. Άρα $OQ \perp EF$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Για κάθε θετικό ακέραιο k, έστω A_k το υποσύνολο του συνόλου $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$, το οποίο αποτελείται από όλα τα στοιχεία, τα ψηφία των οποίων στο δυαδικό σύστημα περιέχουν ακριβώς τρία 1. Έστω $f(k)$ το πλήθος των στοιχείων του A_k.

(α) Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο m, η εξίσωση $f(k) = m$ έχει τουλάχιστον μία λύση.

(β) Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους για τους οποίους η εξίσωση $f(k) = m$ έχει μοναδική λύση.

Λύση

(α) Έστω B_k το υποσύνολο του $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$, που αποτελείται από όλα τα στοιχεία με ακριβώς τρία 1 στο δυαδικό σύστημα. Έστω $g(k)$ το πλήθος των στοιχείων του B_k. Προφανώς οι $f(k)$ και $g(k)$ είναι αύξουσες συναρτήσεις, με $f(k) = g(2k) - g(k)$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} f(k+1) - f(k) &= g(2k+2) - g(k+1) - (g(2k) - g(k)) \\ &= g(2k+2) - g(2k) - (g(k+1) - g(k)) \end{aligned}$$

Συνεπώς είτε και οι δύο αριθμοί $2k+2 \in B_{2k+2}$ και $k+1 \in B_{k+1}$ ή κανένας, δηλαδή $2k+2 \notin B_{2k+2}$ και $k+1 \notin B_{k+1}$. Έτσι έχουμε $f(k+1) - f(k) = 1$ ή 0 ανάλογα αν $2k+1 \in B_{2k+2}$ ή όχι. Σε κάθε περίπτωση, η $f(k)$ θα αυξηθεί κατά 1 (το πολύ) κάθε φορά. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $f(k)$ δεν είναι φραγμένη άνω, για να αποδείξουμε ότι το πεδίο τιμών της $f(k)$ είναι όλοι οι θετικοί ακέραιοι, και συνεπώς η εξίσωση $f(k) = m$ έχει

πάντα λύση.

Πράγματι, ισχύει $g(2^n) = g(2^n - 1) = \binom{n}{3}$, οπότε

$$f(2^n) = g(2^{n+1}) - g(2^n) = \binom{n+1}{3} - \binom{n}{3} = \binom{n}{2},$$

δηλαδή η $f(k)$ δεν είναι φραγμένη άνω.

(β) Έστω ότι η $f(k) = m$ έχει μοναδική λύση. Τότε πρέπει

$$f(k+1) - f(k) = 1 = f(k) - f(k-1).$$

Αυτό ισχύει αν και μόνο αν $2k+1 \in B_{2k+2}$ ή ισοδύναμα αν υπάρχουν α- κριβώς δύο 1 στη δυαδική γραφή του k. Το ίδιο πρέπει να ισχύει για τον $k-1$. Αυτό είναι δυνατό αν και μόνο αν το τελευταίο ψηφίο του $k-1$ είναι 1, το προτελευταίο είναι 0 και υπάρχει ακριβώς ένα άλλο ψηφίο 1, δηλαδή αν $k = 2^n + 2$, για κάποιον ακέραιο $n \geq 2$. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(2^n + 2) &= g(2^{n+1} + 4) - g(2^n + 2) \\ &= 1 + g(2^{n+1}) - g(2^n) \\ &= 1 + \binom{n}{2} \end{aligned}$$

Συνεπώς το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων m για τους οποίους η εξίσωση $f(k) = m$ έχει μοναδική λύση είναι

$$\left\{ 1 + \binom{n}{2} \,\middle|\, n \geq 2 \right\}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (m, n) τέτοια ώστε ο αριθμός $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ να είναι ακέραιος.

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί $mn-1$ και m^3 είναι σχετικά πρώτοι, έτσι

το ότι ο αριθμός $mn-1$ διαιρεί τον n^3+1 είναι ισοδύναμο με τον αριθμό $mn-1$ να διαιρεί τον $m^3(n^3+1)=m^3n^3-1+m^3+1$ το οποίο είναι ισοδύναμο με τον αριθμό $mn-1$ να διαιρεί τον m^3+1.

Αν $m=n$, έχουμε $\frac{n^3+1}{n^2-1}=n+\frac{1}{n-1}$, ο οποίος είναι ακέραιος αν και μόνο αν $n=2$.

Έστω ότι $m>n$. Αν $n=1$, πρέπει ο $\frac{2}{m-1}$ να είναι ακέραιος, που ισχύει αν, και μόνο αν, $m=2$ ή $m=3$.

Έστω ότι $n\geq 2$. Επειδή $n^3+1\equiv 1(\bmod n)$ και $mn-1\equiv -1(\bmod n)$, θα ισχύει $\frac{n^3+1}{mn-1}=kn-1$ για κάποιο φυσικό k. Όμως $kn-1<\frac{n^3+1}{n^2-1}=n+\frac{1}{n-1}$ ή $(k-1)n<1+\frac{1}{n-1}$, δηλαδή $k=1$, οπότε $n^3+1=(mn-1)(n-1)$. Έχουμε τώρα $m=\frac{n^2+1}{n-1}=n+1+\frac{2}{n-1}$, ο οποίος είναι ακέραιος αν, και μόνο αν, $n=2$ ή 3.

Σε κάθε περίπτωση έχουμε $m=5$. Τελικά, οι λύσεις είναι οι: $(2,2)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(5,2)$, $(5,3)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,5)$, $(3,5)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Έστω S το σύνολο των πραγματικών αριθμών των μεγαλύτερων ή ίσων του –1. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f:S\to S$ τέτοιες ώστε:

(α) $f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x)$, για κάθε $x,y\in S$.

(β) $\frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα (-1, 0) και (0, +∞).

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $a\in S$ τέτοιο ώστε $f(a)=a$. Θέτοντας $x=y=a$ στη δοθείσα σχέση έχουμε

$$f(2a+a^2)=2a+a^2.$$

Αν $-1<a<0$ τότε $-1<2a+a^2<0$ και αν $0<a$ τότε $0<2a+a^2$. Όμως $\frac{f(a)}{a}=1=\frac{f(2a+a^2)}{2a+a^2}$, άτοπο, αφού η $\frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-1,0)$ και $(0,+\infty)$. Άρα το a πρέπει να είναι ίσο με το μηδέν.

Η ύπαρξη του a εξασφαλίζεται αν θέσουμε $x=y=0$ στην αρχική σχέση, οπότε έχουμε $f(f(0))=f(0)$ και το $f(0)$ είναι μια τιμή που ικανοποιεί τον ορισμό για το a.

Συνεπώς η μοναδική τιμή του x για την οποία $f(x)=x$ είναι $x=0$.

Θέτοντας $x=y$ στην αρχική σχέση έχουμε

$$f(x+f(x)+xf(x))=x+f(x)+xf(x)$$

Άρα πρέπει $x+f(x)+xf(x)=0$ για κάθε $x\in S$, οπότε

$$f(x)=-\frac{x}{x+1}.$$

Με επαλήθευση διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί τις συνθήκες (α), (β) οπότε είναι η ζητούμενη συνάρτηση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

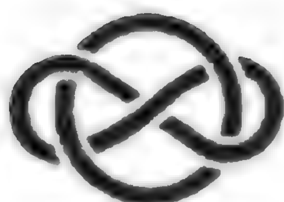
Να βρείτε ένα σύνολο A θετικών ακεραίων με την εξής ιδιότητα: για κάθε άπειρο σύνολο S πρώτων αριθμών, υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $m\in A$, $n\notin A$ καθένας από τους οποίους είναι γινόμενο k διαφορετικών στοιχείων του S, για κάποιο $k\geq 2$.

Λύση

Έστω A το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων της μορφής $k=q_1q_2\ldots q_{q_1}$, όπου οι αριθμοί $q_1<q_2<q_3<\cdots<q_{q_1}$ είναι πρώτοι, δηλαδή

$$A=\{2\cdot3,2\cdot5,2\cdot7,\ldots\}\cup\{3\cdot5\cdot7,3\cdot5\cdot11,\ldots\}\cup\{5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17,\ldots\}\cup\ldots$$

Για κάθε άπειρο σύνολο πρώτων $S=\{p_1,p_2,p_3,\cdots\}$ με $p_1<p_2<p_3<\ldots$, οι συνθήκες του προβλήματος ικανοποιούνται αν θέσουμε $m=p_1p_2\ldots p_{p_1}$ και $n=p_2p_3\ldots p_{p_1+1}$.



36^{η} Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1995

Τόπος Διοργάνωσης: Καναδάς (Τορόντο)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών: P. Stewart (Παν/μιο Dalhousie U. Halifax)
Συμμετοχή: 73 χώρες με 6 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες Συμμετοχές: Σρέι-Λάνκα, Μαλαισία
Μέγιστη Βαθμολογία: 42 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες: Κίνα (236), Ρουμανία (230), Ρωσσία (227)), Βιετνάμ (220), Ουγγαρία (210), Βουλγαρία (207), Ν. Κορέα (203), Ιράν (202)

Η Ελληνική ομάδα πήρε μέρος με τους μαθητές Δ. Κουρούνη, Ι. Μαυροειδή, Ε. Ράππο, Γ. Σολιδάκη, Γ. Τάκο και Π. Μπρέγιαννη. Αρχηγός της ομάδας ήταν ο κ. Θεόδωρος Μπόλης και υπαρχηγός ο κ. Δημήτρης Κοντογιάννης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω A, B, C, D τέσσερα διαφορετικά σημεία μιας ευθείας, με αυτή τη σειρά. Οι κύκλοι με διάμετρο AC και BD τέμνονται στα X, Y. Η ευθεία XY τέμνει την BC στο Z. Έστω P σημείο της ευθείας XY διάφορο του Z. Η ευθεία CP τέμνει τον κύκλο με διάμετρο AC στα C, M και η ευθεία BP τέμνει τον κύκλο με διάμετρο BD στα B, N. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες AM, DN, XY περνούν από το ίδιο σημείο.

Λύση

Λόγω συμμετρίας, $AD \perp XY$.

Είναι: $BN \perp ND$ (αφού BD διάμετρος)

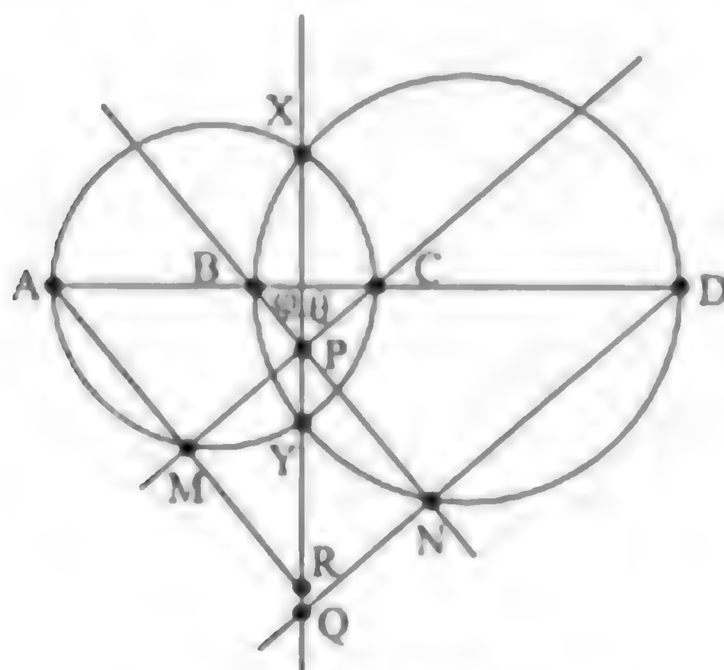
$AM \perp CM$ (αφού AC διάμετρος)

Έστω $\widehat{\varphi} = \widehat{BPZ}$, $\widehat{\theta} = \widehat{CPZ}$, $Q \equiv (XY \cap ND)$, $R \equiv (XY \cap AM)$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $Q \equiv R \Leftrightarrow PQ = PR \Leftrightarrow \dfrac{PN}{\cos\varphi} = \dfrac{PM}{\cos\theta}$ (1)

Το P ανήκει στον ριζικό άξονα των δύο κύκλων, δηλαδή

$$D_P^{c_1} = D_P^{c_2} \Rightarrow PN \cdot PB = PM \cdot PC \Leftrightarrow PN = \frac{PM \cdot PC}{PB} \qquad (2)$$



Σχήμα 116

Η (1) $\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \dfrac{PM \cdot PC}{PB \cdot \cos\varphi} = \dfrac{PM}{\cos\theta} \Leftrightarrow \dfrac{PC}{\cos\varphi} = \dfrac{PB}{\cos\theta} \Leftrightarrow PC\cos\theta = PB\cos\varphi$
$\Leftrightarrow PZ = PZ$, που ισχύει.

Άρα $P \equiv Q$ και το ζητούμενο έχει δειχθεί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Έστω a, b, c θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $abc = 1$. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Λύση

Θέτουμε $a = \dfrac{1}{x}$, $b = \dfrac{1}{y}$, $c = \dfrac{1}{z}$, οπότε έχουμε $xyz = 1$ και η ζητούμενη σχέση γίνεται

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}. \qquad (1)$$

Από την ανισότητα του Cauchy έχουμε

$$\left[\left(\sqrt{y+z}\right)^2+\left(\sqrt{z+x}\right)^2+\left(\sqrt{x+y}\right)^2\right]\left[\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{z+x}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)^2\right]\ge(x+y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow\left[(y+z)+(z+x)+(x+y)\right]\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right)\ge(x+y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{x+y+z}{2}, \qquad (2).$$

Επιπλέον από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου έχουμε:

$$\frac{x+y+z}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{x+y+z}{3}\ge\frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2}, \qquad (3)$$

αφού $xyz=1$.

Από τις (2) και (3) προκύπτει η (1).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Να προσδιορίσετε όλους τους ακέραιους $n>3$ για τους οποίους υπάρχουν n σημεία $A_1, A_2, \dots, A_n$ του επιπέδου, ανά τρία μη συνευθειακά, και n πραγματικοί αριθμοί $r_1, r_2, \dots, r_n$ έτσι ώστε για κάθε i, j, k $(i\ne j\ne k\ne i)$ το εμβαδόν του τριγώνου $A_iA_jA_k$ να είναι $r_i+r_j+r_k$.

Λύση

Καταρχήν παρατηρούμε ότι για $n=4$ μπορούμε να θεωρήσουμε τις κορυφές ενός τετραγώνου, και ότι αν για έναν ακέραιο n δεν υπάρχουν τα ζητούμενα σημεία, τότε αυτά δεν υπάρχουν για κάθε ακέραιο μεγαλύτερο του n. Θα αποδείξουμε ότι για $n=5$ κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό.

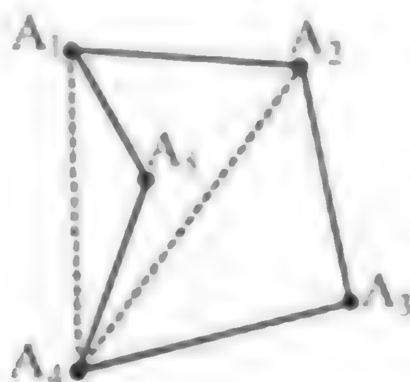
Αν τα πέντε σημεία είναι κορυφές κυρτού πενταγώνου, τότε θεωρώντας ότι το τετράπλευρο $A_1A_2A_3A_4$ αποτελείται από δύο τρίγωνα με δύο τρόπους προκύπτει ότι $r_1+r_3=r_2+r_4$. Όμοια από το $A_1A_2A_3A_5$ έχουμε $r_1+r_3=r_2+r_5$ συνεπώς $r_4=r_5$.

Θα αποδείξουμε ότι για $n=5$ δεν μπορεί δύο από τους r_1, r_2, r_3, r_4, r_5

να είναι ίσοι. Αν είχαμε $r_4 = r_5$, τότε $(A_1A_2A_4) = (A_1A_2A_5)$ οπότε θα έχουμε $A_4A_5 \parallel A_1A_2$ ή το μέσο του A_4A_5 θα ανήκει στην A_1A_2 (ανάλογα εάν τα σημεία A_4, A_5 βρίσκονται στο ίδιο μέρος της A_1A_2). Το ίδιο θα ισχύει και για τα ζεύγη σημείων A_1, A_3 και A_2, A_3. Όμως τότε θα είχαμε είτε δύο από τις τρεις ευθείες A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3 παράλληλες στην A_4A_5 ή το μέσο του A_4A_5 θα ανήκει σε δύο από τις ευθείες A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3. Και στις δύο περιπτώσεις θα έχουμε τρία σημεία συνευθειακά, άτοπο. Συνεπώς οι αριθμοί $r_1, r_2, \ldots, r_5$ είναι όλοι διαφορετικοί.

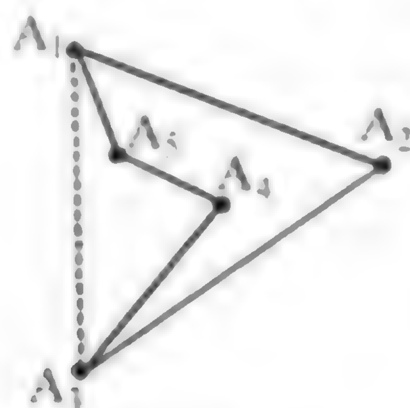
Έτσι τα πέντε σημεία δεν μπορεί να είναι κορυφές κυρτού πενταγώνου.

Έστω ότι το πεντάγωνο δεν είναι κυρτό. Τότε η κυρτή θήκη* του πενταγώνου θα είναι τετράπλευρο ή τρίγωνο.



Σχήμα 117

Στην πρώτη περίπτωση, έστω ότι αυτό είναι το $A_1A_2A_3A_4$. Το A_5 θα ανήκει είτε στο εσωτερικό του $A_2A_3A_4$ ή του $A_1A_2A_4$. Έστω ότι ανήκει στο $A_1A_2A_4$. Το τετράπλευρο $A_2A_3A_4A_5$ είναι κυρτό, οπότε έχουμε $r_2 + r_4 = r_1 + r_3$ και $r_2 + r_4 = r_1 + r_5$ δηλαδή $r_3 = r_5$, άτοπο.



Σχήμα 118

* Η κυρτή θήκη ενός μη-κυρτού πολυγώνου ορίζεται ως το ελάχιστο κυρτό πολύγωνο με κορυφές τις κορυφές του πολυγώνου το οποίο περικλείει το αρχικό πολύγωνο.

Στη δεύτερη περίπτωση έστω ότι το τρίγωνο είναι το $A_1A_2A_3$. Από την ισότητα των εμβαδών έχουμε $(r_1+r_2+r_4)+(r_2+r_3+r_4)+(r_1+r_3+r_4)=(r_1+r_2+r_5)+(r_2+r_3+r_5)+(r_1+r_3+r_5)$ ή $r_4=r_5$, άτοπο.

Συνεπώς η ζητούμενη τιμή είναι $n=4$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να βρείτε τη μέγιστη τιμή x_0 για την οποία υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{1995}$ τέτοιοι ώστε

(i) $x_0 = x_{1995}$.

(ii) $x_{i-1} + \dfrac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \dfrac{1}{x_i}$, για κάθε $i = 1,2,\ldots,1995$.

Λύση

Η δοθείσα σχέση γράφεται

$$(2x_i - x_{i-1})(x_i x_{i-1} - 1) = 0$$

η οποία έχει λύσεις $x_i = \dfrac{x_{i-1}}{2}$ ή $x_i = \dfrac{1}{x_{i-1}}$ για $i = 1,2,\ldots,1995$.

Έστω ότι οι ζητούμενοι αριθμοί είναι $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Αν ο $n=2m$ είναι άρτιος τότε για οποιοδήποτε x_0 μπορούμε να βρούμε $x_1, \ldots, x_n$ ώστε να ικανοποιούνται οι δύο συνθήκες.

Ορίζουμε $x_1 = \dfrac{x_0}{2}$, $x_2 = \dfrac{x_1}{2} = \dfrac{x_0}{2^2}$, $x_3 = \dfrac{x_2}{2} = \dfrac{x_0}{2^3}$, ... , $x_{m-1} = \dfrac{x_0}{2^{m-1}}$,

$x_m = \dfrac{1}{x_{m-1}} = \dfrac{2^{m-1}}{x_0}$, $x_{m+1} = \dfrac{x_m}{2} = \dfrac{2^{m-2}}{x_0}$, ..., $x_{n-1} = \dfrac{1}{x_0}$, $x_n = x_0$.

Όμως $n = 1995$, δηλαδή περιττός. Οι παραπάνω τιμές ισχύουν όταν ο n είναι περιττός, υπό τον όρο ότι $x_0 = 2^{n-1/2}$.

Πράγματι, αν n = 2m+1, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τους αριθμούς

$$x_0,\quad x_1 = \frac{x_0}{2}, \ldots,\ x_{2m} = \frac{x_0}{2^{2m}},\ x_{2m+1} = \frac{1}{x_{2m}} = \frac{2^{2m}}{x_0},$$

και αφού πρέπει $x_n = x_{2m+1} = x_0$, θα έχουμε $\dfrac{2^{n-1}}{x_0} = x_0$ ή $x_0 = 2^{(n-1)/2}$.

Θα αποδείξουμε ότι αυτή είναι η μέγιστη δυνατή τιμή του x_0. Έστω ότι

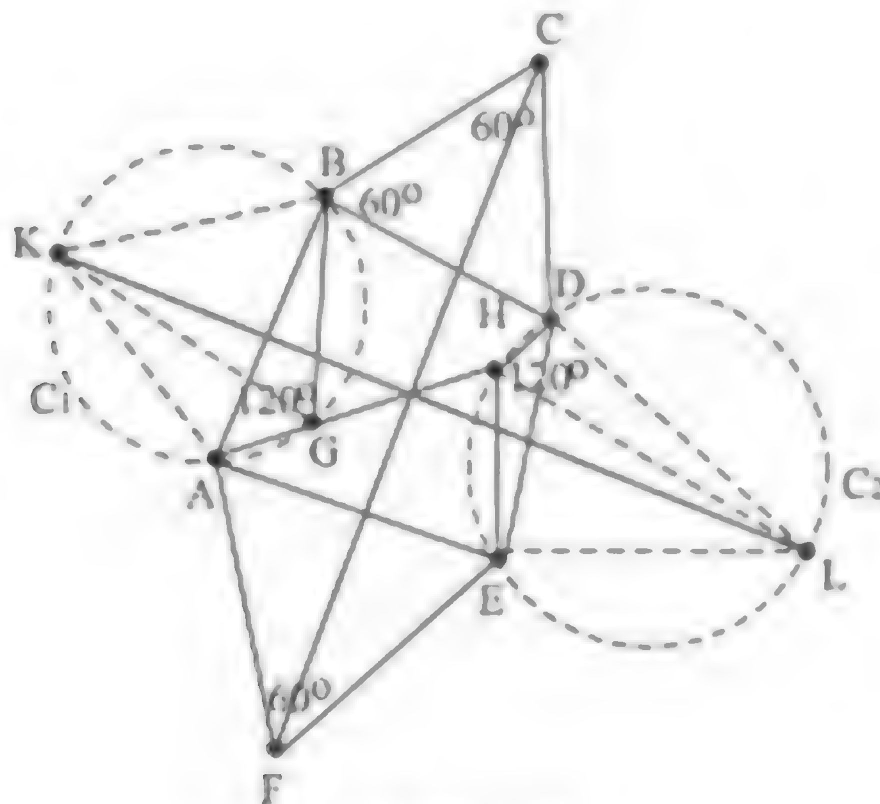
η ακολουθία $x_1, x_2, \ldots, x_n$ προκύπτει πραγματοποιώντας x_1 διαιρέσεις με το 2 ακολουθούμενη από μία αντιστροφή, κατόπιν x_2 διαιρέσεις με το 2, κατόπιν μια αντιστροφή, κλπ.. Αν ο αριθμός των αντιστροφών είναι περιττός, τότε καταλήγουμε στον $x_n = \dfrac{1}{x_0} 2^{x_1 - x_2 + x_3 - \ldots}$, ενώ, αν είναι άρτιος, τότε $x_n = \dfrac{x_0}{2^{x_1 - x_2 + x_3 - \ldots}}$. Για να έχουμε $x_0 = x_n$ πρέπει, στην πρώτη περίπτωση, να έχουμε $x_0 = 2^{(x_1 - x_2 + x_3 - \ldots)/2}$. Επειδή $x_1, x_2, \ldots \geq 0$, η μέγιστη τιμή του x_0 επιτυγχάνεται αν κάνουμε μία μόνο αντιστροφή και $x_1 = n - 1$. Στη δεύτερη περίπτωση πρέπει $2^{x_1 - x_2 + x_3 - \ldots} = 1$ άρα $x_1 - x_2 + x_3 - \ldots = 0$, οπότε $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots =$ άρτιος, άτοπο, αφού n = περιττός. Συνεπώς η μέγιστη τιμή του x_0 είναι $2^{(1995-1)/2} = 2^{997}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Έστω ABCDEF ένα κυρτό εξάγωνο με AB = BC = CD και DE = EF = FA και $\widehat{BCD} = \widehat{EFA} = 60°$. Έστω G, H σημεία στο εσωτερικό του εξαγώνου τέτοια ώστε $\widehat{AGB} = \widehat{DHE} = 120°$.

Να αποδείξετε ότι AG + GB + GH + DH + HE ⩾ CF.

Λύση



Σχήμα 119

Κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $\widehat{ABK}$, $\widehat{EDL}$ εκτός του εξαγώνου.

Έστω O_1, O_2, R_1, R_2 τα κέντρα και οι ακτίνες των περιγεγραμμένων κύκλων στα $\widehat{ABK}$, $\widehat{EDL}$.

Τότε: $G \in (O_1, R_1)$, $H \in (O_2, R_2)$, αφού $\widehat{BGA} = 120°$, $\widehat{DHE} = 120°$ (από τα εγγράψιμα AKBG, LEHD).

Λόγω συμμετρίας, $CF = KL$, και επειδή $KL \leqslant KG + GH + HL$ (αφού KL = ευθεία ή KGHL = τεθλασμένη), αρκεί να δείξουμε ότι:

$$AG + GB + GH + HD + HE \geqslant KG + GH + HL$$

$$\Rightarrow AG + GB + HD + HE \geqslant KG + HL \, (1)$$

Από το θ. Πτολεμαίου στο έχουμε ότι:

$$AG \cdot KB + BG \cdot KA \geqslant AB \cdot KG \Leftrightarrow^{[KB = KA = AB]}_{\text{ισόπλευρο}} \Leftrightarrow AG + BG \geqslant KG \qquad (2)$$

Όμοια στο HDEL:

$$HD \cdot EL + HWE \cdot DL \geqslant HL \cdot DE \Leftrightarrow^{[DE = EL = DL]}_{\text{ισόπλευρο}} \Leftrightarrow HD + HE \geqslant HL \qquad (3)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2), (3) προκύπτει ότι:

$$AG + BG + HD + HE \geqslant KG + HL,$$

οπότε το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Η ισότητα ισχύει όταν τα σημεία K, G, H, L είναι συνευθειακά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Έστω p ένας περιττός πρώτος. Να βρείτε το πλήθος των υποσυνόλων A του $\{1,2,\ldots,2p\}$, τα οποία έχουν p στοιχεία και το άθροισμα των στοιχείων του A να διαιρείται με το p.

Λύση

Η απάντηση είναι $2+\frac{1}{p}\left[\binom{2p}{p}-2\right]$.

Έστω $A \subseteq \{1,2,\ldots,2p\}$ διάφορο των $\{1,2,\ldots,p\}$ και $\{p+1,p+2,\ldots,2p\}$.

Θεωρούμε όλα τα στοιχεία $i \in A$ με $1 \leq i \leq p$, και έστω k το πλήθος τους. Προσθέτοντας 1 σε κάθε στοιχείο και ανάγοντας $\bmod p$ αν χρειαστεί,

μπορούμε να παράγουμε $p-1$ νέα σύνολα με k στοιχεία, π.χ. αν $p=7$ ξεκινώντας από το σύνολο $\{2,5\}$ έχουμε τα νέα σύνολα

$$\{3,6\},\{4,7\},\{5,1\},\{6,2\},\{7,3\},\{1,4\}$$

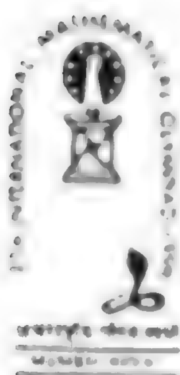
Το άθροισμα κάθε συνόλου αυξάνει κατά k κάθε φορά. Επειδή ο p είναι πρώτος, τα αθροίσματα θα αποτελούν ένα πλήρες σύνολο υπολοίπων $\bmod p$, συνεπώς όλα τα αθροίσματα θα είναι διαφορετικά άρα και τα υποσύνολα αυτά θα είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

Θεωρούμε τώρα τα σύνολα A, τα οποία έχουν κάποιο στοιχείο στο $\{p+1,p+2,\dots,2p\}$. Αν τα στοιχεία της τιμής του A με το σύνολο $\{p+1,p+2,\dots,2p\}$ έχουν άθροισμα $x(\bmod p)$ τότε, ομοίως με παραπάνω, μπορούμε να βρούμε ένα μονάχα υποσύνολο που να έχει άθροισμα $-x(\bmod p)$ (αφού τα αθροίσματα αποτελούν πλήρες σύνολο υπολοίπων $\bmod p$) έτσι ώστε το συνολικό άθροισμα να είναι $0(\bmod p)$. Σε κάθε περίπτωση, μόνο ένα από τα p παραγόμενα υποσύνολα θα έχει άθροισμα $0(\bmod p)$.

Το σύνολο $\{1,2,\dots,2p\}$ έχει $\binom{2p}{p}$ υποσύνολα με p στοιχεία. Αφαιρώντας τα σύνολα $\{1,2,\dots,2p\}$ και $\{p+1,p+2,\dots,2p\}$ έχουμε $\binom{2p}{p}-2$.

Αποδείξαμε ότι μόνο $\frac{1}{p}\left[\binom{2p}{p}-2\right]$ από αυτά έχουν άθροισμα πολλαπλάσιο του p.

Επίσης, τα δύο σύνολα που αφαιρέσαμε έχουν άθροισμα $0(\bmod p)$, οπότε έχουμε συνολικά $2+\frac{1}{p}\left[\binom{2p}{p}-2\right]$ υποσύνολα.



$37^{η}$ Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1996

Τόπος Διοργάνωσης:	Ινδία (Βομβάη)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	A.M. Vaidya (Gujarat U. Ahmedabat)
Συμμετοχή:	75 χώρες με 6 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες Συμμετοχές:	--
Μέγιστη Βαθμολογία:	42 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες:	Ρουμανία (187), Η.Π.Α. (185), Ουγγαρία (167), Ρωσσία (162), Ην. Βασίλειο (161), Κίνα (160), Βιετνάμ (155), Ν. Κορέα (151).

Η Ελληνική ομάδαπήρε μέρος με τους μαθητές: Π. Μπρέγιαννη (Αργυρό μετάλλιο), Αλεξάκη Σπύρο (Χάλκινο μετάλλιο), Μαλικιώση Ρωμανό (Χάλκινο μετάλλιο), Μιχαλάκη Νίκο (Χάλκινο μετάλλιο), Ρουτζούνη Σταύρο (Χάλκινο μετάλλιο), Τάκο Γεώργιο (Χάλκινο μετάλλιο). Αρχηγός της ομάδας ήταν ο κ. Μιχάλης Λάμπρου και υπαρχηγός ο κ. Δημήτρης Κοντογιάννης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω r ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Θεωρούμε μία ορθογώνια σκακιέρα χωρισμένη σε 20×12 μοναδιαία τετράγωνα. Οι παρακάτω κινήσεις επιτρέπονται στη σκακιέρα: μπορούμε να μετακινηθούμε από ένα τετράγωνο σε ένα άλλο, μόνο αν η απόσταση μεταξύ των κέντρων των δύο τετραγώνων είναι ίση με $\sqrt{r}$. Ο σκοπός είναι να βρούμε μία ακολουθία κινήσεων που να ενώνει δύο γωνίες της σκακιέρας που βρίσκονται κατά μήκος της μεγάλης πλευράς στην ίδια πλευρά.

(α) Να αποδείξετε ότι ο σκοπός δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί, αν ο r διαιρείται από το 2 ή το 3.

(β) Να αποδείξετε ότι ο σκοπός μπορεί πραγματοποιηθεί, αν $r = 73$.

(γ) Μπορεί ο σκοπός να πραγματοποιηθεί αν r = 97 ;

Λύση

(α) Έστω ότι μια κίνηση γίνεται α μονάδες προς την μία κατεύθυνση και β προς την άλλη. Τότε πρέπει $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$ αν ο r διαιρείται με το 2, τότε οι α, β είναι και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί. Αυτό σημαίνει ότι οι κινήσεις γίνονται πάντα σε τετράγωνα του ίδιου χρώματος (άσπρου ή μαύρου), αλλά τα ζητούμενα τετράγωνα είναι το ένα μαύρο και το άλλο άσπρο, συνεπώς δεν μπορεί να γίνει το ζητούμενο.

Επειδή $x^2\equiv 0$ ή $1(\bmod 3)$, αν ο r διαιρείται με το 3 τότε πρέπει οι α, β να διαιρούνται με το 3 επίσης. Αν το αρχικό τετράγωνο είναι το $(0,0)$, τότε μπορούμε να μετακινηθούμε μόνο σε τετράγωνα της μορφής $(3\kappa,3\lambda)$. Όμως το τελικό τετράγωνο είναι το $(19,0)$, που δεν είναι της μορφής αυτής.

(β) Αν $r=73$, τότε από τη σχέση $\alpha^2+\beta^2=73$ πρέπει να έχουμε $\alpha=8$, $\beta=3$ ή $\alpha=3$, $\beta=8$. Έχουμε τις εξής κινήσεις:

$$\text{Α: } (x,y)\to(x+8,y+3) \qquad \text{Β: } (x,y)\to(x+3,y+8)$$

$$\Gamma\text{: } (x,y)\to(x+8,y-3) \qquad \Delta\text{: } (x,y)\to(x+3,y-8)$$

Αν για τη μετακίνηση χρησιμοποιήσουμε n_A κινήσεις Α, n_B κινήσεις Β, n_Γ κινήσεις Γ και n_Δ κινήσεις Δ τότε πρέπει

$$8(n_A+n_\Gamma)+3(n_B+n_\Delta)=19$$

$$3(n_A-n_\Gamma)+8(n_B-n_\Delta)=0$$

Μία λύση είναι η $n_A=5$, $n_B=-1$, $n_\Gamma=-3$, $n_\Delta=2$ όπου η αρνητική τιμή $n_B=-1$ ερμηνεύεται ως $(x,y)\to(x-3,y-8)$ κλπ. Οι ζητούμενες κινήσεις είναι οι:

$$(0,0)\to(8,3)\to(16,6)\to(8,9)\to(11,1)\to(19,4)\to(11,7)\to$$

$$\to(19,10)\to(16,2)\to(8,5)\to(16,8)\to(19,0)$$

(γ) Αν $r=97$, τότε πρέπει να έχουμε $\alpha=9$, $\beta=4$ (ή αντίστροφα). Ονομάζουμε κινήσεις «αλλαγής» τις κινήσεις για τις οποίες η τιμή του y αλλάζει κατά 4 μονάδες. Θεωρούμε την κεντρική ζώνη της σκακιέρας που αποτελείται από τα τετράγωνα $\upsilon=4,5,6,7$. Οι κινήσεις αλλαγής μας μετα-

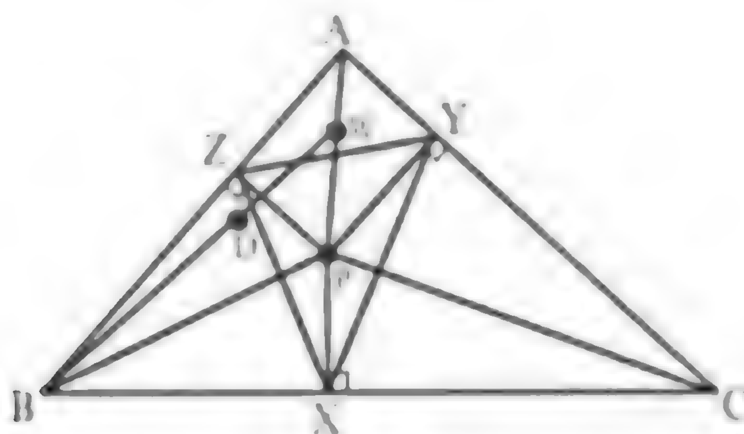
φέρουν στην κεντρική ζώνη αν είμαστε έξω από αυτήν ή μας βγάζουν από την κεντρική ζώνη αν είμαστε εκεί. Οι κινήσεις που δεν είναι κινήσεις αλλαγής μπορούν να γίνουν μόνο αν είμαστε εκτός της κεντρικής ζώνης, και μας οδηγούν σε ένα τετράγωνο που είναι επίσης εκτός της ζώνης. Επιπλέον, οι κινήσεις αλλαγής αλλάζουν την αρτιότητα της x-συντεταγμένης ενώ οι υπόλοιπες κινήσεις την διατηρούν.

Επειδή πρέπει να ξεκινήσουμε και να τελειώσουμε εκτός της κεντρικής ζώνης, χρειαζόμαστε ένα άρτιο πλήθος κινήσεων αλλαγής. Επειδή πρέπει να ξεκινήσουμε από άρτια x-συντεταγμένη και να καταλήξουμε σε περιττή, χρειαζόμαστε περιττό πλήθος κινήσεων αλλαγής, αδύνατο. Συνεπώς ο σκοπός δεν μπορεί να επιτευχθεί!

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Έστω P ένα εσωτερικό σημείο του τριγώνου ABC τέτοιο ώστε $\hat{APB} - \hat{ACB} = \hat{APC} - \hat{ABC}$, και έστω D, E τα έκκεντρα των τριγώνων APB και APC αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες AP, BD, CE διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Λύση



Σχήμα 120

Έστω X, Y, Z οι προβολές του σημείου P στις πλευρές BC, AC, AB αντίστοιχα. Έχουμε $PA = \dfrac{YZ}{\eta\mu A}$, $PB = \dfrac{XZ}{\eta\mu B}$, $PC = \dfrac{XY}{\eta\mu C}$ και

$\hat{APB} - \hat{C} = \hat{XZY}$, $\hat{BPC} - \hat{A} = \hat{ZXY}$, $\hat{CPA} - \hat{B} = \hat{XYZ}$.

Από την υπόθεση έχουμε $\hat{APB} - \hat{C} = \hat{APC} - \hat{B}$ άρα $\hat{XZY} = \hat{XYZ}$, δηλαδή το τρίγωνο XYZ είναι ισοσκελές ($XZ = XY$). Άρα $(PC)\eta\mu C = (PB)\eta\mu B$.

Έστω W το σημείο τομής της BD με την AP. Από το θεώρημα διχοτό-

μου έχουμε $\frac{BA}{BP}=\frac{AW}{WP}$.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $(AC)\eta\mu C=(AB)\eta\mu B$ έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{AW}{WP}=\frac{BA}{BP}=\frac{(AC)\frac{\eta\mu C}{\eta\mu B}}{(PC)\frac{\eta\mu C}{\eta\mu B}}=\frac{AC}{PC},$$

δηλαδή το θεώρημα διχοτόμου ισχύει στο τρίγωνο APC οπότε η CW είναι διχοτόμος του τριγώνου APC. Έτσι οι ευθείες AP, BD, CE διέρχονται από το ίδιο σημείο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω S το σύνολο {0, 1, 2, 3,...}. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις f από το S στο S τέτοιες ώστε $f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$ για κάθε $m, n \in S$.

Λύση

Θέτουμε $m = n = 0$, οπότε έχουμε $f(f(0)) = f(f(0) + f(0))$, δηλαδή $f(0) = 0$, οπότε και $f(f(0)) = 0$.

Θέτοντας $m = 0$ έχουμε $f(f(n)) = f(n)$ για κάθε $n \in S$, οπότε η δεδομένη σχέση γράφεται ισοδύναμα

$$f(m + f(n)) = f(m) + f(n),\ \text{για κάθε } m, n \in S$$

Έστω $\kappa \neq 0$ ο μικρότερος αριθμός του S για τον οποίο ισχύει $f(\kappa) = \kappa$.

Αν το κ δεν υπάρχει τότε έχουμε $f(n) = 0$ για κάθε $n \in S$ λόγω της σχέσης $f(f(n)) = f(n)$.

Αν το κ υπάρχει, τότε έχουμε

$$f(2\kappa) = f(\kappa + \kappa) = f(\kappa + f(\kappa)) = f(\kappa) + f(\kappa) = 2\kappa$$

οπότε επαγωγικά προκύπτει $f(\alpha\kappa) = \alpha\kappa$ για κάθε φυσικό α.

Έστω $z \in S$ ένας άλλος αριθμός τέτοιος ώστε $f(z) = z$. Τότε θα είναι $z>\kappa$,

Θέτουμε $z = \alpha\kappa + b$, όπου $0 \leqslant b < \kappa$, οπότε θα έχουμε

$$f(z) = f(b + f(\alpha\kappa)) = f(b) + f(f(\alpha\kappa)) = f(b) + \alpha\kappa$$

δηλαδή $f(b) = b$, οπότε $b = 0$, αφού $b < \kappa$ και ο κ είναι ο μικρότερος μη μηδενικός αριθμός του S με αυτή την ιδιότητα.

Άρα λοιπόν όλοι οι αριθμοί x του S για τους οποίους $f(x) = x$ είναι τα πολλαπλάσια του κ και μόνο αυτά.

Επειδή όμως $f(f(n)) = f(n)$ για κάθε n, συμπεραίνουμε ότι οι $f(n)$ είναι πολλαπλάσια του κ για κάθε n. Η γενικότερη συνάρτηση που μπορούμε να κατασκευάσουμε είναι να διαλέξουμε κ τυχαίους αριθμούς του S (όπου $κ \neq 0$ ένας τυχαίος φυσικός) $z_0 = 0, z_1, z_2, z_3, \dots, z_{κ-1}$ και να ορίσουμε για κάθε αριθμό $n \in S$ με $n = ακ + b$, $0 \leqslant b < κ$

$$f(n) = f(ακ + b) = ακ + z_b κ.$$

Με επαλήθευση διαπιστώνουμε ότι η παραπάνω συνάρτηση ικανοποιεί την αρχική σχέση.

Συνεπώς, όλες οι δυνατές συναρτήσεις f είναι αυτές που περιγράφονται με την παραπάνω διατύπωση καθώς και η συνάρτηση $f(n) = 0$ για κάθε $n \in S$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Έστω α, β θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε οι αριθμοί $15α + 16β$ και $16α - 15β$ να είναι τέλεια τετράγωνα. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το μικρότερο από τα δύο τετράγωνα;

Λύση

Έστω $15α + 16β = m^2$ και $16α - 15β = n^2$. Τότε $m^4 + n^4 = 481\left(α^2 + β^2\right)$.

Αν ένας από τους m, n δεν είναι πολλαπλάσιο του 13 (π.χ. ο m) τότε θα υπάρχει αντίστροφος m' του m ως προς mod13, δηλαδή $mm' \equiv 1 \pmod{13}$.

Επομένως από τη σχέση

$m^4 + n^4 \equiv 0 \pmod{13}$ θα έχουμε $(m')^4 m^4 + (m')^4 n^4 \equiv 0 \pmod{13}$ ή $(m'n)^4 \equiv -1 \pmod{13}$, οπότε $(m'n)^{12} \equiv -1 \pmod{13}$, το οποίο είναι αδύνατο, αφού $x^{12} \equiv 1$ ή $0 \pmod{13}$ για κάθε ακέραιο x.

Συνεπώς οι m, n πρέπει να είναι πολλαπλάσια του 13. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι οι m, n πρέπει να είναι πολλαπλάσια του 37, οπότε και του $13 \cdot 37 = 481$. Θέτοντας $m = n = 481$ παίρνουμε τη λύση $α = 31 \cdot 481$, $β = 481$ οπότε η ζητούμενη τιμή είναι 481^2.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

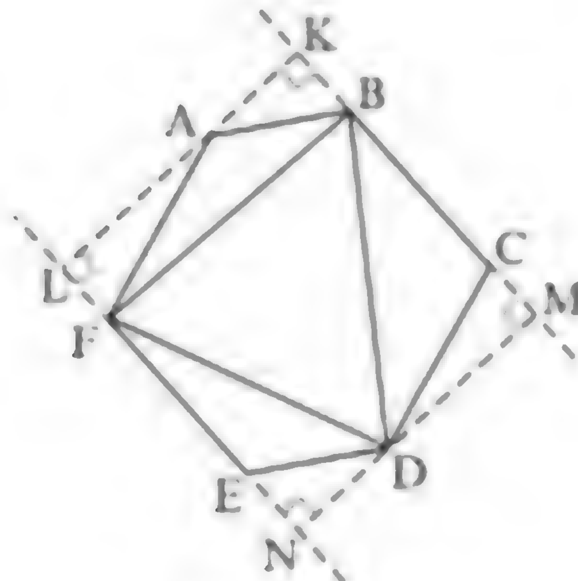
Έστω ABCDEF ένα κυρτό εξάγωνο τέτοιο ώστε η AB να είναι παράλληλη στην DE, η BC παράλληλη στην EF και η CD παράλληλη στην FA.

Έστω R_A, R_C, R_E οι ακτίνες των περιγεγραμμένων κύκλων των

τριγώνων FAB, BCD, DEF αντίστοιχα και p η περίμετρος του εξαγώνου. Να αποδείξετε ότι

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}.$$

Λύση



Σχήμα 121

Η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ίση με $R = \frac{\alpha}{2\eta\mu\hat{A}} = \frac{\beta}{2\eta\mu\hat{B}} = \frac{\gamma}{2\eta\mu\hat{\Gamma}}$ οπότε έχουμε

$$R_A + R_C + R_E = \frac{BF}{2\eta\mu\hat{A}} + \frac{BD}{2\eta\mu\hat{C}} + \frac{FD}{2\eta\mu\hat{E}}.$$

Όμως έχουμε $BF \geq KL = AB\eta\mu\hat{B} + AF\eta\mu\hat{F}$ και $BF \geq MN = CD\eta\mu\hat{C} + DE\eta\mu\hat{E}$, (η BF είναι μεγαλύτερη της κάθετης απόστασης μεταξύ των παραλλήλων BC, FE) οπότε

$$2BF \geq AB\eta\mu\hat{B} + AF\eta\mu\hat{F} + CD\eta\mu\hat{C} + DE\eta\mu\hat{E}. \quad (1)$$

Και όμοια για τις BD, DF έχουμε:

$$2BD \geq BC\eta\mu\hat{B} + CD\eta\mu\hat{D} + AF\eta\mu\hat{A} + EF\eta\mu\hat{E} \quad (2)$$

$$2DF \geq AB\eta\mu\hat{A} + BC\eta\mu\hat{C} + DE\eta\mu\hat{D} + EF\eta\mu\hat{F} \quad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) και (3) και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{C} = \hat{F}$ (λόγω παραλληλίας) των πλευρών τους) έχουμε:

$$2\left(\frac{BF}{\eta\mu A} + \frac{BD}{\eta\mu C} + \frac{FD}{\eta\mu E}\right) \geq 2p \quad \text{ή} \quad R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}$$

(Χρησιμοποιήσαμε ότι για κάθε $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Έστω p, q, n είναι τρεις θετικοί ακέραιοι με $p+q<n$. Θεωρούμε και τους ακέραιους $x_0, x_1, \ldots, x_n$, που είναι τέτοιοι ώστε $x_0 = x_n = 0$ και για κάθε $1 \leq i \leq n$ ισχύει ότι $x_i - x_{i-1} = p$ ή $-q$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δείκτες $i<j$ με $(i,j) \neq (0,n)$ τέτοιοι ώστε $x_i = x_j$.

Λύση

Έστω ότι ισχύει $x_i - x_{i-1} = p$ για r τιμές του i και ισχύει $x_i - x_{i-1} = -q$ για s τιμές του i. Τότε βεβαίως θα είναι $r+s=n$, ενώ αν προσθέσουμε κατά μέλη τις n ισότητες

$$x_i - x_{i-1} = p \text{ ή } -q,\ 1 \leq i \leq n,$$

προκύπτει η ισότητα $pr - qs = 0$.

Αν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί p και q έχουν ένα κοινό διαιρέτη $d>1$, τότε θεωρούμε τους αριθμούς $y_i = \frac{x_i}{d}$, $i = 0,1,2,\ldots,n$, για τους οποίους ισχύουν οι ισότητες

$$y_i - y_{i-1} = \frac{p}{d} \text{ ή } -\frac{q}{d},\ 1 \leq i \leq n$$

και αφού $x_0 = x_n = 0$ είναι φανερό ότι όλοι οι αριθμοί $y_0, y_1, \ldots, y_n$ είναι ακέραιοι. Έτσι, αν αποδείξουμε το ζητούμενο για τους αριθμούς $y_0, y_1, \ldots, y_n$ με τους $\frac{p}{d}$, $\frac{q}{d}$, τότε το ίδιο θα ισχύει και για τους αριθμούς $x_0, x_1, \ldots, x_n$ με τους p και q.

Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε μόνο τη περίπτωση $(p,q)=1$. Τότε από την ισότητα $pr - qs = 0$ ή $pr = qs$ προκύπτει ότι ο p διαιρεί τον s, δηλαδή υπάρχει θετικός ακέραιος κ τέτοιος ώστε $s = \kappa p$.

Αν είναι $\kappa = 1$, τότε $p = s$ και $q = r$, οπότε θα είναι $p+q = s+r = n$, το οποίο είναι άτοπο γιατί από την υπόθεση έχουμε $p+q<n$.

Άρα θα είναι $\kappa > 1$ και από την ισότητα $pr - qs = 0$ προκύπτει ότι $r = \kappa q$, οπότε θα έχουμε

$$p+q = \frac{s}{\kappa} + \frac{r}{\kappa} = \frac{s+r}{\kappa} = \frac{n}{\kappa} \equiv m.$$

Στην συνέχεια παρατηρούμε πρώτα από όλα ότι πρέπει να ισχύει

$$x_{i+m} - x_i = \pi o\lambda.m\,,\ i = 0,1,\dots,n-m\,.$$

Πράγματι, αν t από τις διαφορές $x_{i+m} - x_{i+m-1}, \cdots, x_{i+1} - x_i$ είναι ίσες με p, τότε $m - t$ από αυτές θα είναι ίσες με $-q$, οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} x_{i+m} - x_i &= \left(x_{i+m} - x_{i+m-1}\right) + \cdots + \left(x_{i+1} - x_i\right) \\ &= tp - (m-t)q = t(p+q) - mp = (t-q)m. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια ονομάζουμε $d_i \equiv x_{i+m} - x_i = \pi o\lambda.m$, $i = 0,1,\dots,n-m$ και θα αποδείξουμε ότι ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς d_i, $i = 0,1,\dots,n-m$, είναι ίσος με 0.

Κατ' αρχήν έχουμε

$$\begin{aligned} d_{i+1} - d_i &= \left(x_{i+m+1} - x_{i+1}\right) - \left(x_{i+m} - x_i\right) \\ &= \left(x_{i+m+1} - x_{i+m}\right) - \left(x_{i+1} - x_i\right) \\ &= (p \text{ ή } -q) - (p \text{ ή } -q) \\ &= 0 \text{ ή } p+q \text{ ή } -(p+q) \\ &= 0 \text{ ή } m \text{ ή } -m. \end{aligned}$$

Επομένως, αν καμμία από τις διαφορές d_{i+1}, d_i δεν είναι 0, τότε υπάρχουν μόνο δύο δυνατότητες:

- d_{i+1}, d_i είναι και οι δύο θετικές,
- d_{i+1}, d_i είναι και οι δύο αρνητικές.

Αυτό συμβαίνει γιατί αν οι διαφορές d_{i+1}, d_i ήταν ετερόσημες, τότε η μεταπήδηση από μία αρνητική σε θετική ή αντιστρόφως, θα απαιτούσε μία από αυτές να είναι τουλάχιστον $2m$.

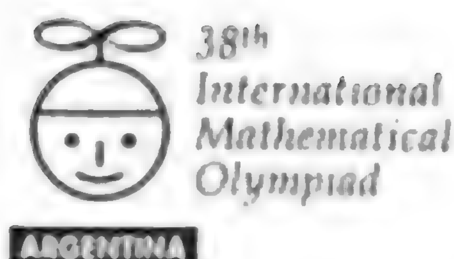
Έτσι, αν καμία από τις διαφορές d_i δεν είναι 0, καταλήγουμε στο ότι όλες οι διαφορές d_i είναι θετικές ή όλες είναι αρνητικές. Τότε θα είναι

$$d_0 + d_m + \cdots + d_{(\kappa-1)m} \neq 0\,,$$

που είναι άτοπο γιατί έχουμε

$$\begin{aligned} d_0 + d_m + \cdots + d_{(\kappa-1)m} &= \left(x_m - x_0\right) + \left(x_{2m} - x_m\right) + \cdots + \left(x_{\kappa m} - x_{(\kappa-1)m}\right) \\ &= x_{\kappa m} - x_0 \\ &= x_n - x_0 = 0. \end{aligned}$$

Άρα μία τουλάχιστον από τις διαφορές d_i είναι 0, οπότε θα ισχύει η ισότητα $x_{i+m} = x_i$ για κάποιο i τέτοιο ώστε $i < i+m$ και $(i, i+m) \neq (0, n)$.



38η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1997

Τόπος Διοργάνωσης: Αργεντινή (Mar del Plata)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών: L. Caffarelli (Gourant Inst., New York)
Συμμετοχή: 82 χώρες με 6 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες Συμμετοχές: Βολιβία, Γουατεμάλα, Πορτο-Ρίκο, Παραγουάη, Ουζμπεκιστάν
Μέγιστη Βαθμολογία: 42 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες: Κίνα (223), Ουγγαρία (219), Ιράν (217), Ρωσσία και Η.Π.Α. (202), Ουκρανία (195), Βουλγαρία και Ρουμανία (191).

Η Ελληνική ομάδα πήρε μέρος με τους μαθητές: Π. Μπρέγιαννη (Αργυρό μετάλλιο), Αντωνακόπουλο Σπ. (εύφημος μνεία), Μιχαλάκη Σπ. (εύφημος μνεία), Ρόκα Κ. (εύφημος μνεία), Κουϊμά Α. και Μπουρνή Θ. Αρχηγός της ομάδας ήταν ο κ. Μιχάλης Λάμπρου και υπαρχηγός ο κ. Αδάμ Αγγελής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Στο καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία με ακέραιες συντεταγμένες είναι κορυφές τετραγώνων με πλευρά μήκους ένα. Τα τετράγωνα αυτά χρωματίζονται εναλλάξ μαύρα ή άσπρα (όπως σε μία σκακιέρα).

Για κάθε ζεύγος γνήσια θετικών ακεραίων m και n, θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο για το οποίο ισχύουν ότι:

i) οι κορυφές του είναι σημεία με ακέραιες συντεταγμένες

ii) οι κάθετες πλευρές του βρίσκονται κατά μήκος των πλευρών των παραπάνω τετραγώνων

iii) οι κάθετες αυτές πλευρές έχουν μήκος m η μια και n η άλλη.

Έστω S_1 το συνολικό εμβαδόν εκείνου του τμήματος του τριγώνου που είναι χρωματισμένο μαύρο και έστω S_2 το συνολικό εμβαδόν εκεί-

νου του τμήματος του τριγώνου που είναι χρωματισμένο άσπρο. Θέτουμε $f(m, n) = |S_1 - S_2|$.

α) Να υπολογίσετε τα f(m, n) για κάθε ζεύγος γνήσια θετικών ακεραίων m και n οι οποίοι είναι είτε και οι δύο άρτιοι είτε και οι δύο περιττοί.

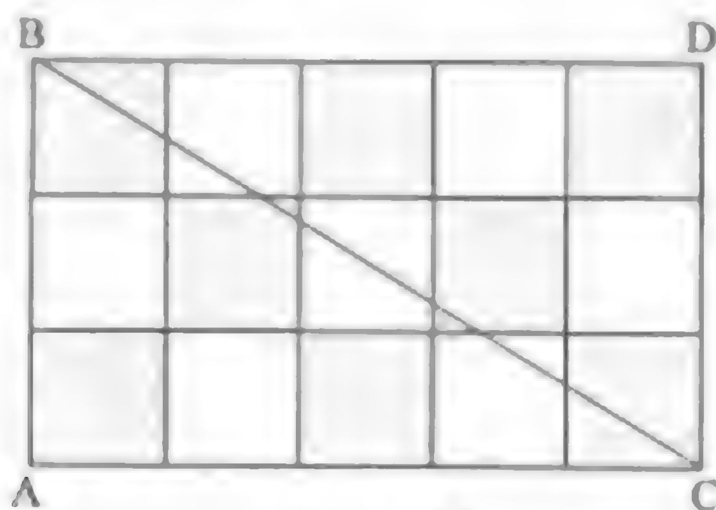
β) Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος γνήσια θετικών ακεραίων m, n ισχύει

$$f(m, n) \leq \frac{1}{2}\max\{m, n\}.$$

γ) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε ζεύγος γνήσια θετικών ακεραίων m, n να ισχύει f(m, n) < c.

Λύση

(α) Έστω ABC το ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου οι κάθετες πλευρές έχουν ακέραια μέτρα και οι κορυφές του είναι κορυφές των δοσμένων τετραγώνων με $\widehat{A} = 90°$, AB = m και AC = n. Ας θεωρήσουμε το $m \times n$ ορθογώνιο ABDC, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.



σχήμα 125

Έστω ένα τυχαίο πολυγώνο P και ας συμβολίσουμε με $S_1(P)$ το μέρος της επιφάνειας του P, που είναι χρωματισμένο μαύρο και με $S_2(P)$ το μέρος της επιφάνειας του P, που είναι χρωματισμένο άσπρο.

Όταν τα m και n είναι και τα δύο άρτια ή και τα δύο περιττά ο χρωματισμός του ορθογωνίου έχει κέντρο συμμετρίας το μέσον της υποτείνουσας BC. Τότε έχουμε: $S_1(ABC) = S_1(BCD)$ και $S_2(ABC) = S_2(BCD)$.

Επομένως $f(m, n) = |S_1(ABC) - S_2(ABC)| = \frac{1}{2}|S_1(ABDC) - S_2(ABDC)|$.

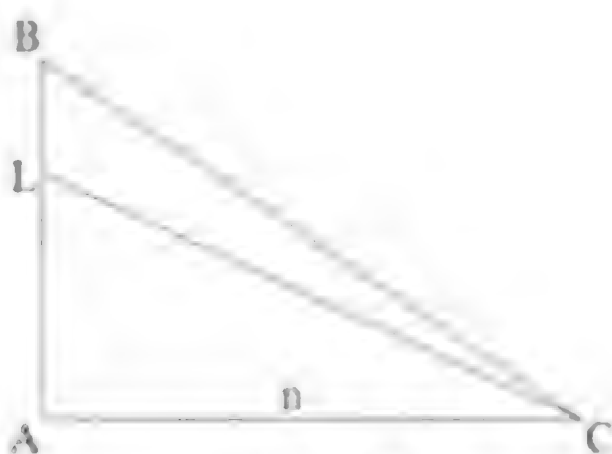
Παρατηρούμε ότι f(m, n) = 0 όταν m και n είναι και τα δύο άρτια και

$f(m, n) = \frac{1}{2}$ όταν τα m και n είναι και τα δύο περιττά.

(β) Έστω τώρα ότι το m είναι περιττό και το n άρτιο. Ας θεωρήσουμε ένα σημείο L στην AB τέτοιο ώστε $AL = m - 1$ όπως φαίνεται στο σχήμα 2.

Αφού ο $m - 1$ είναι άρτιος, έχουμε ότι $f(m - 1, n) = 0$ και $S_1(ALC) = S_2(ALC)$.

Επομένως $f(m, n) = |S_1(ABC) - S_2(ABC)| = |S_1(LBC) - S_2(LBC)| \leq$ Εμβαδόν $(LBC) = \frac{n}{2} \leq \frac{1}{2}\max\{m, n\}$.



σχήμα 126

(γ) Ας υπολογίσουμε το $f(2k + 1, 2k)$. Όπως και στο (β) θα θεωρήσουμε ένα σημείο L στην AB, τέτοιο ώστε $AL = 2k$. Αφού $f(2k, 2k) = 0$ και $S_1(LBC) = S_2(ALC)$, έχουμε ότι $f(2k + 1, 2k) = |S_1(LBC) - S_2(LBC)|$

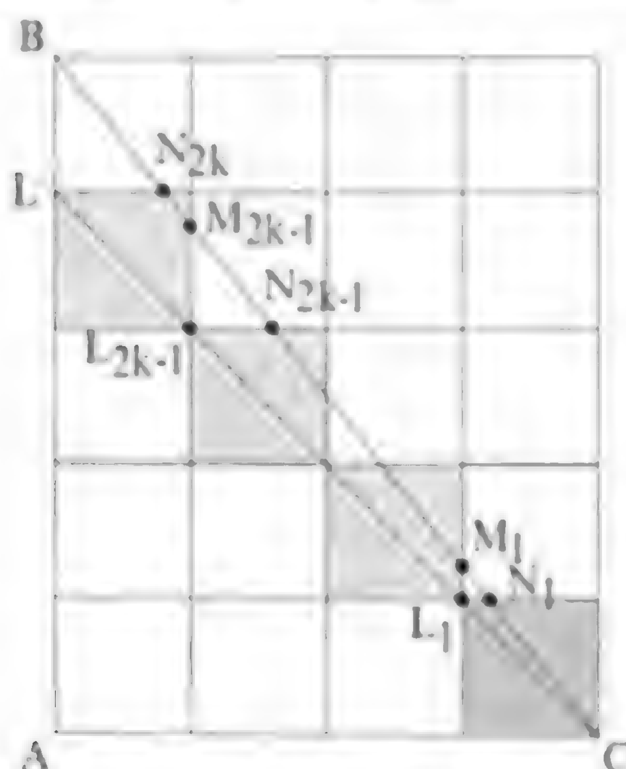
Το εμβαδόν του τριγώνου LBC είναι k. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι η διαγώνιος LC διέρχεται μόνο από μαύρα τετράγωνα (δες το ακόλουθο σχήμα 3). Τότε το μέρος του LBC που είναι χρωματισμένο άσπρο αποτελείται από τα τρίγωνα BLN_{2k}, $M_{2k-1}L_{2k-1}N_{2k-1}, \ldots, M_1L_1N_1$, τα οποία είναι όμοια με το BAC. Το συνολικό εμβαδόν που καταλαμβάνουν είναι:

$$S_2(LBC) = \frac{1}{2}\frac{2k}{2k+1}\left(\left(\frac{2k}{2k}\right)^2 + \left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2k}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4k(2k+1)}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + (2k)^2\right) = \frac{4k+1}{12}$$

Επομένως $S_1(LBC) = k - \frac{1}{12}(4k + 1) = \frac{1}{12}(8k - 1)$ και $f(2k + 1, 2k) = \frac{2k - 1}{6}$

Η συνάρτηση αυτή παίρνει αυθαίρετα μεγάλες τιμές.



σχήμα 127

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Έστω τρίγωνο ABC του οποίου η μικρότερη γωνία είναι η A. Τα σημεία B και C διαιρούν τον περιγεγραμμένο περί το τρίγωνο ABC κύκλο σε δύο τόξα. Στο τόξο BC που δεν περιέχει το A παίρνουμε ένα σημείο U, διαφορετικό από τα B και C.

Έστω ότι οι μεσοκάθετες των ευθυγράμμων τμημάτων AB και AC τέμνουν την ευθεία AU στα σημεία V και W αντίστοιχα. Έστω ακόμα ότι οι ευθείες BV και CW τέμνονται στο σημείο T. Να αποδείξετε ότι ισχύει AU = TB + TC.

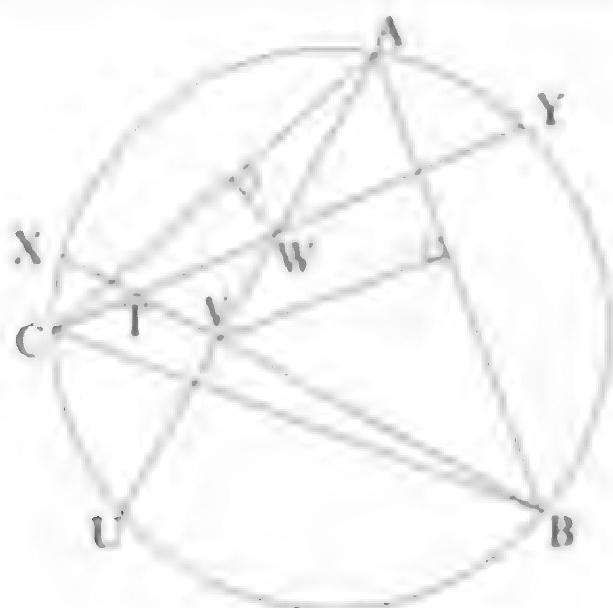
Λύση

Ας συμβολίσουμε με b και c τις διαμέτρους που είναι μεσοκάθετες των AB και AC αντίστοιχα και ας ορίσουμε έναν προσανατολισμό για τα τόξα. Τότε ο συμβολισμός $\widehat{PQ}$ ορίζει ένα μοναδικό τόξο του κύκλου.

Έστω X, Y τα σημεία στα οποία τέμνουν τον κύκλο οι ευθείες BV και CW αντίστοιχα. Τότε $\widehat{YC} = \widehat{AU}$ και $\widehat{XB} = \widehat{AU}$ λόγω συμμετρίας. Συνεπώς, $\widehat{XB} = \widehat{YC}$, οπότε οι χορδές BX και YC είναι συμμετρικές ως προς τη διάμετρο d, που διέρχεται από το μέσον του τόξου BY (σχήμα 4).

Αφού το σημείο T ανήκει στη μεσοκάθετο d των BY και CX, προκύπτει ότι TB = TY και TC = TX.

Επομένως, AU = BX = BT + TX = TB + TC.



σχήμα 128

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_n$ πραγματικοί αριθμοί ,που ικανοποιούν τις συνθήκες $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| = 1$ και $|x_i| \leq \frac{n+1}{2}$, για $i = 1, 2, \ldots, n$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει μετάθεση $y_1, y_2, \ldots, y_n$ των $x_1, x_2, \ldots, x_n$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$|y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}.$$

Λύση

Σε κάθε μετάθεση $\pi = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ των $x_1, x_2, \ldots, x_n$ αντιστοιχούμε την τιμή $S(\pi)$ που εκφράζει το άθροισμα $y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n$. Έστω $r = \frac{(n+1)}{2}$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι $|S(\pi)| \leq r$, για κάποια μετάθεση π.

Ας θεωρήσουμε την ταυτοτική μετάθεση $\pi_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και την αντίστροφη μετάθεση $\tilde{\pi} = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)$. Αν $|S(\pi_0)| \leq r$ ή $|S(\tilde{\pi})| \leq r$, τότε ο ισχυρισμός είναι αληθής. Έστω ότι $|S(\pi_0)| > r$ και $|S(\tilde{\pi})| > r$. Τότε:

$$S(\pi_0) + S(\tilde{\pi}) = (x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n) + (x_n + 2x_n - 1 + \ldots + nx_1) = (n+1)(x_1 + \ldots + x_n)$$

επομένως έχουμε ότι $|S(\pi_0) + S(\tilde{\pi})| = (n + 1) = 2r$. Αφού καθένας από τους αριθμούς $S(\pi_0)$, $S(\tilde{\pi})$ ξεπερνά κατ' απόλυτη τιμή το r, θα πρέπει να είναι ε-

τερόσημοι, δηλ. ο ένας θα είναι μεγαλύτερος του r, ενώ ο άλλος μικρότερος του $-r$.

Ξεκινώντας από την π_0, μπορούμε να κατασκευάσουμε μεταθέσεις με συνεχείς εναλλαγές διαδοχικών στοιχείων. Πιο συγκεκριμένα υπάρχει μία ακολουθία μεταθέσεων $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_m$ τέτοια ώστε $\pi_m = \tilde{\pi}$ και για κάθε $i \in \{0, \ldots, m-1\}$, η μετάθεση π_{i+1} προκύπτει από την π_i με εναλλαγή δύο διαδοχικών της όρων.

Επομένως, για τις δύο μεταθέσεις $\pi_i = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ και $\pi_{i+1} = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ θα υπάρχει ένας δείκτης $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ τέτοιος ώστε:

$$z_k = y_{k+1},\ z_{k+1} = y_k,\ z_j = y_j \text{ για } j \neq k, k+1.$$

Αφού οι αριθμοί x_j δεν ξεπερνούν κατ' απόλυτη τιμή το r, θα έχουμε ότι

$$|S(\pi_{i+1}) - S(\pi_i)| = |kz_k + (k+1)z_{k+1} - ky_k - (k+1)y_{k+1}| = |y_k - y_{k+1}| \leq$$

$$|y_k| + |y_{k+1}| \leq 2r.$$

Συνεπώς, η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας $S(\pi_0), S(\pi_1), \ldots, S(\pi_m)$ δεν ξεπερνά το $2r$.

Όμως οι πραγματικοί αριθμοί $S(\pi_0)$, $S(\pi_m)$ βρίσκονται εκτός του διαστήματος $[-r, r]$ και είναι ετερόσημοι. Συνεπώς, ένας τουλάχιστον από τους $S(\pi_i)$ θα ανήκει στο διάστημα αυτό, δηλ. $|S(\pi_i)| \leq r$ και έχουμε αποδείξει το ζητούμενο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Θεωρούμε $n \times n$ τετραγωνικούς πίνακες που όλα τα στοιχεία τους ανήκουν στο σύνολο $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$. Ένας τέτοιος πίνακας ονομάζεται "ασημένιος" αν, επιπλέον, έχει την ιδιότητα: για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, τα στοιχεία της i γραμμής του μαζί με τα στοιχεία της i στήλης του περιέχουν όλα τα στοιχεία του S.
Να αποδείξετε ότι:

i. δεν υπάρχει ασημένιος πίνακας στην περίπτωση $n = 1997$,

ii. υπάρχουν άπειρες το πλήθος τιμές του n για τις οποίες υπάρχουν ασημένιοι πίνακες.

Απόδειξη

(i) Έστω $n > 1$ ένας ακέραιος. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας **"αση-**

μένιος" πίνακας A $n \times n$. Έστω x ένα σταθερό στοιχείο του συνόλου $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$, το οποίο δεν ανήκει στην κύρια διαγώνιο του πίνακα A. (Ένα τέτοιο στοιχείο υπάρχει, αφού το πλήθος των στοιχείων του πίνακα είναι $2n-1$, ενώ η διαγώνιος αποτελείται από n). Την ένωση των στοιχείων της i–γραμμής και της i–στήλης θα την καλούμε "**i–σταυρό**". Το δοσμένο στοιχείο x θα εμφανίζεται ακριβώς μια φορά σε κάθε σταυρό. Αν λοιπόν το x βρισκεται στην i–γραμμή και στη j–στήλη, τότε θα ανήκει ταυτόχρονα στον " **i–σταυρό**" και στον " **j–σταυρό**". Θα λέμε τότε ότι οι δύο αυτοί σταυροί είναι "x–συνδεδεμένοι". (Π.χ. στον ακόλουθο πίνακα A ο $1^{ος}$ και ο $4^{ος}$ σταυρός είναι 6–συνδεδεμένοι). Επομένως, όλοι οι n σταυροί σχηματίζουν ζεύγη x–συνδεδεμένα, άρα ο n πρέπει να είναι άρτιος, ενώ ο 1997 είναι περιττός.

(ii) Για $n = 2$ ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ είναι "**ασημένιος**". Για $n = 4$ έχουμε τους

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Η κατασκευή τέτοιων πινάκων γενικεύεται. Έστω ότι υπάρχει ένας $n \times n$ "**ασημένιος**" πίνακας A. Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν $2n \times 2n$ "**ασημένιο**" πίνακα D της μορφής: $D = \begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix}$, όπου ο B είναι ο $n \times n$ πίνακας, που προκύπτει αν σε κάθε στοιχείο του A προσθέσουμε το 2n, ενώ ο C προκύπτει αν στον πίνακα B αντικαταστήσουμε όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του με 2n. Τότε ο πίνακας D που προκύπτει είναι "**ασημένιος**".

Για να το αποδείξουμε ας θεωρήσουμε τον "**i–σταυρό**" του D και έστω ότι $i \leq n$ (η άλλη περίπτωση αποδεικνύεται όμοια). Ο σταυρός αυτός αποτελείται από τον "**i–σταυρό**" του A, την i–γραμμή του B και την i–στήλη του C. Ο "**i–σταυρός**" του A περιέχει όλα τα στοιχεία του συνόλου $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$, ενώ η i–γραμμή του B και η i–στήλη του C περιέχουν όλα τα στοιχεία του συνόλου $\{2n, 2n+1, \ldots, 4n-1\}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Να βρεθούν όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (α, β) ακεραίων $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$,

που ικανοποιούν την εξίσωση $\alpha^{(\beta^2)} = \beta^\alpha$.

Λύση

Έστω (α, β) μία λύση της εξίσωσης και d ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α, β. Τότε $\alpha = du$ και $\beta = dv$, όπου u, v είναι σχετικά πρώτοι. Η δοσμένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη:

$$(du)^{dv^2} = (dv)^u \qquad (1)$$

Συγκρίνοντας τους εκθέτες dv^2 και u, προκύπτουν οι ακόλουθες περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. $dv^2 = u$

Τότε από την (1) έχουμε ότι u = v. Αφού οι u, v είναι σχετικά πρώτοι θα έχουμε ότι u = v = 1 και από την $dv^2 = u$ προκύπτει ότι d = 1. Επομένως, α = β = 1, η οποία είναι λύση της (1).

Περίπτωση 2. $dv^2 > u$

Τότε η (1) γράφεται ως εξής: $d^{dv^2 - u} \cdot u^{dv^2} = v^u$ (2) και έχουμε ότι το u^{dv^2} διαιρεί το v^u. Αφού οι u, v είναι σχετικά πρώτοι, έχουμε ότι u = 1 και η (2) γίνεται $d^{dv^2 - 1} = v$ (3).

Αν d = 1 τότε λόγω της (3) θα είναι και v = 1 και η ανισότητα $dv^2 > u$ είναι αδύνατη. Για $d \geq 2$ έχουμε ότι $d^{dv^2 - 1} \geq 2^{2v^2 - 1} \geq 2^{2v - 1} > v$, για v = 1, 2, 3, … και η ανισότητα αυτή έρχεται σε αντίφαση με την (3), οπότε δεν υπάρχουν λύσεις στην περίπτωση αυτή.

Περίπτωση 3. $dv^2 < u$

Οπότε d < u. Τότε η (1) γράφεται ως εξής: $u^{dv^2} = d^{u - dv^2} \cdot v^u$ (4) και έχουμε ότι το v^u διαιρεί το u^{dv^2}. Αφού οι u, v είναι σχετικά πρώτοι, προκύπτει ότι v = 1 και η (4) γίνεται $u^d = d^{u - d}$ (5)

Οι βάσεις της εκθετικής αυτής εξίσωσης ικανοποιούν την ανίσωση d < u, επομένως οι εκθέτες θα έχουν την αντίθετη διάταξη, δηλ. d < u – d.

Λόγω της (5), κάθε πρώτος διαιρέτης p του d, θα είναι και πρώτος διαιρέτης του u. Θεωρώντας y, z τους μέγιστους εκθέτες για τους οποίους ισχύ-

ει ότι $p^y|u$, $p^z|d$, έχουμε λόγω της (5) ότι $yd = z(u - d)$, οπότε $y > z$. Επομένως το d διαιρεί το u, δηλ. $u = kd$, για κάποιον ακέραιο k. Παρατηρούμε ότι $k \geq 3$, καθώς $u > 2d$. Αντικαθιστώντας όπου $u = kd$ στη σχέση (5), έχουμε ότι

$$k = d^{k-2} \quad (6).$$

Τότε το d δεν είναι 1. Επομένως, $d \geq 2$.

Αν $k = 3$, τότε λόγω της (6) είναι $d = 3$, οπότε $u = 9$, $\alpha = 27$, $\beta = 3$.

Αν $k = 4$, τότε λόγω της (6) είναι $d^2 = 4$, οπότε $d = 2$, $u = 8$, $\alpha = 16$, $\beta = 2$.

Αν $k \geq 5$, τότε $d^{k-2} \geq 2^{k-2} > k$ και η (6) είναι αδύνατη.

Επομένως η εξίσωση έχει τρεις λύσεις: $(\alpha, \beta) = (1, 1)$, $(27, 3)$ και $(16, 2)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Έστω n γνήσια θετικός ακέραιος. Συμβολίζουμε με f(n) το πλήθος των τρόπων που μπορεί να παρασταθεί ο n ως άθροισμα δυνάμεων του 2 με ακέραιους εκθέτες οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι από το μηδέν.

Παραστάσεις οι οποίες διαφέρουν μόνο ως προς τη διάταξη των προσθετέων, θεωρούνται ως ταυτόσημες. Παραδείγματος χάριν ισχύει f(4) = 4, διότι ο αριθμός 4 μπορεί να παρασταθεί με τους ακόλουθους τέσσερις τρόπους:

$$\mathbf{4 \text{ ή } 2 + 2 \text{ ή } 2 + 1 + 1 \text{ ή } 1 + 1 + 1 + 1.}$$

Να αποδείξετε, ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 3$, ισχύει $2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{4}}$.

Απόδειξη

Αν $n = 2k + 1$ είναι ένας περιττός αριθμός μεγαλύτερος του 1, τότε κάθε αναπαράσταση του n στη δοσμένη μορφή θα έχει προσθετέο το "1". Σβήνοντας το "1" θα έχουμε μία αναπαράσταση του αριθμού 2k και αντιστρόφως. Έχουμε λοιπόν την ακόλουθη αναγωγική σχέση:

$$f(2k + 1) = f(2k) \qquad (1)$$

Επιπλέον, αν $n = 2k$ είναι ένας άρτιος ακέραιος, τότε κάθε αναπαράσταση του n στη δοσμένη μορφή θα έχει δύο τύπους: είτε θα περιέχει προσθετέους ίσους με 1 ή όχι. Στην πρώτη περίπτωση σβήνοντας ένα "1" έχου-

με μία αναπαράσταση του $2k - 1$ όπως προηγουμένως. Επομένως, έχουμε μία $1 - 1$ σχέση των αναπαραστάσεων $1^{ου}$ τύπου του $2k$ και όλων των αναπαραστάσεων του $2k - 1$. Στην περίπτωση του $2^{ου}$ τύπου αναπαραστάσεων (χωρίς προσθετέους ίσους με "1"), μπορούμε να διαιρέσουμε όλους τους προσθετέους με 2 και να επιτύχουμε μία αναπαράσταση του k και η αντιστοίχιση αυτή είναι $1 - 1$. Έχουμε λοιπόν την ακόλουθη αναγωγική σχέση:

$$f(2k) = f(2k - 1) + f(k) \qquad (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) ισχύουν για κάθε ακέραιο $k \geq 1$. Προφανώς, $f(1) = 1$.

Ας θέσουμε $f(0) = 1$, ώστε η σχέση (1) να ισχύει και για $k = 0$. Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι αύξουσα.

Αντικαθιστώντας στη (2) το $f(2k - 1)$ με $f(2k - 2)$ –λόγω της (1)– καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$f(2k) - f(2k - 2) = f(k), \text{ για } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις αυτές για $k = 1, 2, \ldots, n$, έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$f(2n) = f(0) + f(1) + \ldots + f(n), \text{ για } n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (3)$$

Θα υπολογίσουμε κατόπιν τα ζητούμενα φράγματα της ακολουθίας $f(2^n)$, για $n = 1, 2, \ldots$

Ο υπολογισμός του άνω φράγματος είναι εύκολος, καθώς οι προσθετέοι στη σχέση (3) είναι όλοι μικρότεροι από τον τελευταίο. Επιπλέον, αφού $2 = f(2) \leq f(n)$, για $n \geq 2$, έχουμε ότι

$$f(2n) =2 + (f(2) + \ldots + f(n)) \leq 2 + (n - 1)f(n) \leq f(n) + (n - 1)f(n) = nf(n), \text{ για } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Συνεπώς,

$$f(2^n) \leq 2^{n-1} \cdot f(2^{n-1}) \leq 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot f(2^{n-2}) \leq 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot 2^{n-3} \cdot f(2^{n-3}) \leq \ldots \leq$$

$$2^{(n-1)+(n-2)+\ldots+1} \cdot f(2) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2.$$

Αφού $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2 < 2^{\frac{n^2}{2}}$, για $v \geq 3$, έχουμε αποδείξει το άνω φράγμα.

Για το κάτω φράγμα θα αποδείξουμε πρώτα ότι:

$$f(b + 1) - f(b) \geq f(\alpha + 1) - f(\alpha) \qquad (4)$$

όπου $b \geq \alpha > 0$ ακέραιοι είτε και οι δύο άρτιοι είτε και οι δύο περιττοί.

Πράγματι, αν οι α και b είναι και οι δύο άρτιοι, τότε λόγω της (1) θα έχουμε μηδενικά και από τα δύο μέλη της (4), ενώ αν είναι και οι δύο περιττοί, τότε λόγω της (2) θα έχουμε

$f(b+1) - f(b) = f\left(\frac{b+1}{2}\right)$, $f(\alpha+1) - f(\alpha) = f\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$ και η ανισότητα (4) ισχύει αφού η f είναι αύξουσα.

Ας θεωρήσουμε τους ακεραίους $r \geq k \geq 1$, όπου r άρτιος. Με διαδοχικές αντικαταστάσεις στην (4) των αριθμών $\alpha = r - j$, $b = r + j$ για $j = 0, \ldots, k-1$ και προσθέτοντας τις ανισότητες που προκύπτουν, καταλήγουμε στην $f(r+k) - f(r) \geq f(r+1) - f(r-k+1)$.

Αφού ο r είναι άρτιος, θα έχουμε ότι $f(r+1) = f(r)$, επομένως $f(r+k) + f(r-k+1) \geq 2f(r)$, για $k = 1, \ldots, r$

Προσθέτοντας τις ανισότητες για $k = 1, \ldots, r$ έχουμε ότι: $f(1) + f(2) + \ldots + f(2r) \geq 2rf(r)$.

Λόγω της (3) το άθροισμα του δεξιού μέλους της ανισότητας ισούται με $f(4r) - 1$, οπότε

$$f(4r) \geq 2rf(r) + 1 > 2rf(r), \text{ για κάθε ακέραιο } r \geq 2.$$

Θέτοντας $r = 2^{m-2}$ έχουμε ότι $f(2^m) > 2^{m-1} \cdot f(2^{m-2})$ (5)

Για να εξασφαλίσουμε ότι ο $r = 2^{m-2}$ είναι άρτιος θα πρέπει $m > 2$, ωστόσο η (5) ισχύει και για $m = 2$.

Ας θεωρήσουμε κατόπιν έναν ακέραιο n μεγαλύτερο του 1. Έστω s θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε $2s \leq n$ και ας εφαρμόσουμε την ανισότητα (5) για $m = n, n-1, \ldots, n-2s+2$, οπότε παίρνουμε

$$f(2^n) > 2^{n-1} \cdot f(2^{n-2}) > 2^{n-1} \cdot 2^{n-3} \cdot f(2^{n-4}) > 2^{n-1} \cdot 2^{n-3} \cdot 2^{n-5} \cdot f(2^{n-6}) > \ldots >$$

$$2^{(n-1)+(n-3)+\ldots+(n-2s+1)} \cdot f(2^{n-2s}) = 2^{s(n-s)} \cdot f(2^{n-2s})$$

Αν τώρα ο n είναι άρτιος, θέτουμε $s = \frac{n}{2}$, ενώ αν ο n είναι περιττός θέτουμε $s = \frac{n-1}{2}$.

Προκύπτουν τότε οι ανισότητες:

$f(2^n) > 2^{\frac{n^2}{4}} \cdot f(2^0) = 2^{\frac{n^2}{4}}$, αν ο n είναι άρτιος $f(2^n) > 2^{\frac{(n^2-1)}{4}} \cdot f(2^1) = 2^{\frac{(n^2-1)}{4}} \cdot 2 > 2^{\frac{n^2}{4}}$, αν ο n είναι περιττός.

Έχουμε λοιπόν υπολογίσει το ζητούμενο κάτω φράγμα για κάθε ακέραιο $n \geq 2$ (το οποίο επίσης ισχύει και για $n = 1$).



39^{η} Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1998

Τόπος Διοργάνωσης: Ταϊβαν (Ταϊπέι)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών: Jen-Chung Chuan (Παν/μιο Tsing Hua)
Συμμετοχή: 76 χώρες με 6 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες Συμμετοχές: --
Μέγιστη Βαθμολογία: 42 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες: Ιράν (211), Βουλγαρία (195), Κίνα (223), Ουγγαρία και Η.Π.Α. (186), Ταϊβαν (184), Ρωσσία (175), Ινδία (174), Ουκρανία (166).

Η Ελληνική ομάδα πήρε μέρος με τους μαθητές: Π. Μπρέγιαννη (Αργυρό μετάλλιο), Ρωμανό-Διογένη Μαλικιώση (Αργυρό μετάλλιο), Θ. Ματσούκα (Χάλκινο μετάλλιο), Θ. Μπουρνή (εύφημος μνεία), Α. Παναγιωτίδη και Κ. Ρόκα. Αρχηγός της ομάδας ήταν ο κ. Θεόδωρος Μπόλης και υπαρχηγός ο κ. Ευστράτιος Ράππος.

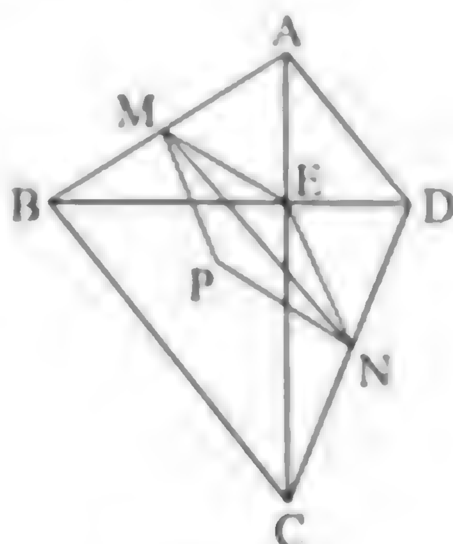
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Σε ένα κυρτό τετράπλευρο ABCD οι διαγώνιοι AC και BD είναι κάθετες μεταξύ τους και οι απέναντι πλευρές AB, DC δεν είναι παράλληλες. Υποθέτουμε ότι το σημείο P, όπου οι μεσοκάθετες των πλευρών AB και DC τέμνονται, βρίσκεται στο εσωτερικό του τετραπλεύρου ABCD. Να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο ABCD είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν και μόνο αν τα τρίγωνα ABP και CDP έχουν ίσα εμβαδά.

Λύση (1ος τρόπος)

Έστω E το σημείο τομής των AC, BD. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το σημείο P βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου BEC. Έστω $\widehat{ABE} = \varphi$ και $\widehat{ACD} = \theta$.

Αν M και N είναι τα μέσα των AB και CD αντίστοιχα, τότε $PM \perp AB$ και $PN \perp CD$ και τα τρίγωνα ABP και CDP είναι ισοσκελή.



Σχήμα 129

Φέρουμε την EM που είναι διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου οπότε

$$\widehat{BEM} = \varphi,\ \widehat{AME} = 2\varphi,\ \widehat{EMP} = 90^\circ - 2\varphi.$$

Όμοια $\widehat{CEN} = \theta$, $\widehat{DNE} = 2\theta$, $\widehat{ENP} = 90^\circ - 2\theta$.

Άρα $\widehat{MEN} = 90^\circ + \varphi + \theta$, οπότε

$$\widehat{NPM} = 360^\circ - (\widehat{EMP} + \widehat{MEN} + \widehat{ENP}) = 90^\circ + \varphi + \theta = \widehat{MEN}.$$

Επειδή $AB = 2EM$ και $CD = 2EN$, έχουμε $(ABP) = (CDP)$ αν, και μόνο αν

$$EM \cdot PM = EN \cdot PN \quad \text{ή} \quad \frac{EM}{EN} = \frac{PN}{PM},$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το ισχυρισμό ότι τα τρίγωνα EMN και PNM να είναι όμοια.

Αυτό ισχύει αν και μόνο αν, $\widehat{EMN} = \widehat{PNM}$ και $\widehat{ENM} = \widehat{PMN}$, το οποίο σημαίνει ότι το EMPN είναι παραλληλόγραμμο. Αλλά επειδή οι απέναντι γωνίες του στα E και P είναι πάντοτε ίσες, είναι παραλληλόγραμμο, αν, και μόνο αν $\widehat{EMP} = \widehat{ENP} \Leftrightarrow 90^\circ - 2\varphi = 90^\circ - 2\theta \Leftrightarrow \varphi = \theta \Leftrightarrow$ το ABCD είναι εγγράψιμο.

2^{ος} τρόπος

Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων με άξονες πάνω στις πλευρές AC και BD, οπότε οι συντεταγμένες των A, B, C, D είναι $(0, \alpha)$, $(\beta, 0)$, $(0, \gamma)$ και $(\delta, 0)$ αντίστοιχα.

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων $2\beta x - 2\alpha y = \beta^2 - \alpha^2$ και $2\delta x - 2\gamma y = \delta^2 - \gamma^2$ βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου $P(x_0, y_0)$:

$$x_0 = \frac{-\gamma(\beta^2 - \alpha^2) + \alpha(\delta^2 - \gamma^2)}{2(\alpha\delta - \beta\gamma)},\ y_0 = \frac{-\delta(\beta^2 - \alpha^2) + \beta(\delta^2 - \gamma^2)}{2(\alpha\delta - \beta\gamma)}$$

[$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ επειδή οι AB, CD δεν είναι παράλληλες].

Το σημείο P είναι στο εσωτερικό του ABCD, οπότε τα σημεία A, B, P και C, D, P έχουν τον ίδιο προσανατολισμό.

Έτσι, $(ABP) = (CDP) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ \beta & 0 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \gamma & 1 \\ \delta & 0 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow \alpha x_0 + \beta y_0 - \alpha\beta = \gamma x_0 + \delta y_0 - \gamma\delta$.

Αντικαθιστώντας τα x_0, y_0 προκύπτει

$$(\alpha\gamma - \beta\delta)\,[\,(\alpha - \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2] = 0.$$

Επειδή όμως τα α, γ και β, δ έχουν αντίθετα πρόσημα, ο δεύτερος παράγοντας είναι πάντα θετικός, οπότε $(ABP) = (CDP)$ αν και μόνο αν $\alpha\gamma = \beta\delta \Leftrightarrow AE \cdot CE = BE \cdot DE \Leftrightarrow$ ABCD εγγράψιμο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Σε ένα διαγωνισμό υπάρχουν a υποψήφιοι και b κριτές, όπου $b \geqslant 3$ είναι ένας περιττός ακέραιος. Κάθε κριτής βαθμολογεί τον κάθε υποψήφιο με «επιτυχία» ή «αποτυχία». Υποθέτουμε ότι ο κ είναι ένας αριθμός τέτοιος ώστε, για κάθε δύο κριτές, οι βαθμολογίες τους συμπίπτουν για το πολύ κ υποψηφίους. Να αποδειχθεί ότι $\frac{\kappa}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}$.

Λύση

Θα μετρήσουμε το συνολικό πλήθος «συμφωνιών» μεταξύ των κριτών με δύο τρόπους. Καταρχήν, επειδή υπάρχουν $\binom{b}{2}$ ζεύγη κριτών και κάθε ζεύγος συμφωνεί το πολύ σε κ υποψηφίους, ο συνολικός αριθμός «συμφωνιών» είναι το πολύ $\kappa\binom{b}{2}$.

Από την άλλη, για τον i υποψήφιο ($1 \leqslant i \leqslant a$) υποθέτουμε ότι x_i κριτές τον έχουν βαθμολογήσει με «επιτυχία» και y_i με «αποτυχία», όπου $x_i + y_i = b$. Τότε ο αριθμός των ζευγών κριτών που συμφωνούν σε αυτόν τον υποψήφιο είναι

$$\binom{x_i}{2}+\binom{y_i}{2}=\frac{1}{2}(x_i^2+y_i^2-x_i-y_i)\geqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x_i+y_i)^2-b\right]$$
$$=\frac{1}{4}[(b-1)^2-1]$$

Επειδή το b είναι περιττός, αυτό το κάτω όριο μπορεί να γραφεί ως $\frac{1}{4}(b-1)^2$ αφού το αριστερό μέλος είναι πάντα ακέραιος.

Έτσι έχουμε ότι: $\kappa\binom{b}{2}\geqslant\sum_{i=1}^{\alpha}\left[\binom{x_i}{2}+\binom{y_i}{2}\right]\geqslant\frac{\alpha(b-1)^2}{4}$

$\Rightarrow \frac{\kappa}{\alpha}\geqslant\frac{b-1}{2b}$

[**Παρατήρηση:** η ανισότητα είναι γνήσια, δηλαδή δεν ισχύει ποτέ η ι-σότητα.]

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Για κάθε θετικό ακέραιο n συμβολίζουμε με d(n) τον αριθμό των θετικών διαιρετών του n (συμπεριλαμβανομένων του 1 και του n). Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι κ για τους οποίους υπάρχει κάποιος n τέτοιος, ώστε να ισχύει $\frac{d(n^2)}{d(n)}=\kappa$.

Λύση

Αν $n=p_1^{\kappa_1}p_2^{\kappa_2}\dots p_s^{\kappa_s}$ όπου $p_1, p_2, \dots p_s$ διαφορετικοί πρώτοι, τότε το πλήθος των διαιρετών του είναι $d(n)=(\kappa_1+1)(\kappa_2+1)\dots(\kappa_s+1)$ οπότε $d(n^2)=(2\kappa_1+1)(2\kappa_2+1)\dots(2\kappa_s+1)$, δηλαδή ο $d(n^2)$ είναι περιττός.

Από τη σχέση $\frac{d(n^2)}{d(n)}=\kappa$ παίρνουμε ότι και οι d(n) και κ πρέπει να είναι περιττοί.

Θα αποδείξουμε ότι όλοι οι περιττοί κ μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{d(n^2)}{d(n)}$ για κάποιο n.

Το κ =1 γράφεται, αφού $\frac{d(1^2)}{d(1)}=1$.

Υποθέτουμε ότι το κ είναι ένας περιττός > 1, και ότι όλοι οι περιττοί < κ γράφονται σε αυτή τη μορφή.

Θα αποδείξουμε ότι και το κ γράφεται σε αυτή τη μορφή.

Θέτουμε $\kappa = 2^r m - 1$, όπου m περιττός, $m < \kappa$.

Θα υπάρχει φυσικός n_0 τέτοιος ώστε $\dfrac{d(n_0^2)}{d(n_0)} = m$.

Θεωρούμε τους αριθμούς $x_0 = (2^r - 1)m - 1$, $x_i = 2^i x_0$, για $i = 1, 2, \ldots, r$.

Έστω $p_0, p_1, \ldots, p_{r-1}$ διαφορετικοί πρώτοι που είναι σχετικά πρώτοι με το n_0.

Τότε ο αριθμός $n = p_0^{x_0} p_1^{x_1} \ldots p_{r-1}^{x_{r-1}} n_0$ είναι ο ζητούμενος.

Πράγματι,
$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = \frac{2x_0 + 1}{x_0 + 1} \cdot \frac{2x_1 + 1}{x_1 + 1} \cdots \frac{2x_{r-1} + 1}{x_{r-1} + 1} \cdot \frac{d(n_0^2)}{d(n_0)}$$
$$= \frac{x_1 + 1}{x_0 + 1} \cdot \frac{x_2 + 1}{x_1 + 1} \cdots \frac{x_r + 1}{x_{r-1} + 1} \cdot m \quad (\text{αφού } x_{i+1} = 2x_i)$$
$$= \frac{x_r + 1}{x_0 + 1} \cdot m = \frac{x_r + 1}{(2^r - 1)m} m$$
$$= \frac{2^r x_0 + 1}{2^r - 1} = \frac{2^r (x_0 + 1)}{2^r - 1} - 1$$
$$= 2^r m - 1 = \kappa.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να βρεθούν όλα τα ζεύγη (α, b) θετικών αριθμών τέτοιων ώστε ο αριθμός $\alpha^2 b + \alpha + b$ να διαιρείται με τον αριθμό $\alpha b^2 + b + 7$.

Λύση

Αν ο αριθμός $\alpha^2 b + \alpha + b$ διαιρείται από τον $\alpha b^2 + b + 7$ τότε το ίδιο συμβαίνει και για τον αριθμό
$$b(\alpha^2 b + \alpha + b) - \alpha(\alpha b^2 + b + 7) = b^2 - 7\alpha$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $b^2 - 7\alpha > 0$.

Τότε θα έχουμε $b^2 - 7\alpha \geqslant \alpha b^2 + b + 7$, αφού ο $\alpha b^2 + b + 7$ διαιρεί τον $b^2 - 7\alpha$, το οποίο είναι αδύνατο, αφού για $\alpha \geqslant 1$, $b^2 - 7\alpha < \alpha b^2 + b + 7$.

- $b^2 - 7\alpha = 0$

Τότε το 7 διαιρεί το b, οπότε έχουμε $(\alpha, b) = (7\kappa^2, 7\kappa)$ για κάποιο θετικό ακέραιο κ. Σε αυτή την περίπτωση, ο $\alpha^2 b + \alpha + b = 7\kappa(49\kappa^4 + \kappa + 1)$ διαιρείται πάντα από τον $\alpha b^2 + b + 7 = 7(49\kappa^4 + \kappa + 1)$.

- $b^2 - 7\alpha < 0$

Τότε ο θετικός $7\alpha - b^2$ θέλουμε να διαιρείται από τον $\alpha b^2 + b + 7$. Αυτό είναι δυνατό μόνο αν $b = 1$ ή $b = 2$, αφού διαφορετικά $\alpha b^2 + b + 7 > 9\alpha > 7\alpha > 7\alpha - b^2$.

Για $b = 1$ θέλουμε το $7\alpha - 1$ να διαιρείται από το $\alpha + 8$. Αλλά επειδή $7\alpha - 1 = 7(\alpha + 8) - 57$ θα πρέπει ο $\alpha + 8$ να είναι παράγοντας του $57 = 3 \cdot 19 = 1 \cdot 57$.

Επομένως οι μόνες δυνατές τιμές του α είναι $\alpha = 11$ ή $\alpha = 49$.

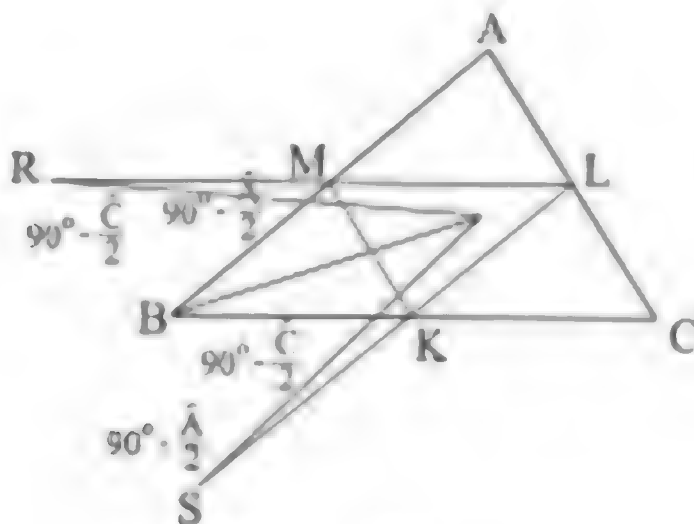
Αντικαθιστώντας διαπιστώνουμε ότι και οι δύο είναι δεκτές αφού το 19 διαιρεί το 133 και το 57 διαιρεί το 2451.

Για $b = 2$ θέλουμε το $7\alpha - 4$ να διαιρείται από το $4\alpha + 9$. Όμως $4(7\alpha - 4) = 7(4\alpha + 9) - 79$, αλλά το 79 δεν έχει κανένα παράγοντα της μορφής $4\alpha + 9$, οπότε δεν προκύπτουν νέες λύσεις.

Έτσι τα ζητούμενα ζεύγη είναι $(\alpha, b) = (7\kappa^2, 7\kappa)$, $\kappa = 1, 2, \ldots$, $(\alpha, b) = (11, 1)$ και $(\alpha, b) = (49, 1)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Έστω I το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC. Έστω ότι ο εγγεγραμμένος κύκλος του ABC εφάπτεται με τις πλευρές BC, CA και AB στα σημεία K, L και M αντίστοιχα. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο B και είναι παράλληλη προς την MK τέμνει τις ευθείες LM και LK στα σημεία R και S αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι η γωνία $\widehat{RIS}$ είναι οξεία.



Σχήμα 130

Λύση

Στο τρίγωνο RMB έχουμε $\widehat{RMB} = \widehat{AML} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$ (κατακορυφήν) και

$\widehat{BRM} = \widehat{KML} = 90^\circ = \frac{\widehat{C}}{2}$

[αφού $\widehat{KML} = 180^\circ - \widehat{AML} - \widehat{BMK} = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\widehat{C}}{2}$].

Όμοια στο τρίγωνο SKB έχουμε $\widehat{BSK} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$ και $\widehat{BKS} = 90^\circ - \frac{\widehat{C}}{2}$, οπότε τα δύο τρίγωνα είναι όμοια αφού έχουν δύο από τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Άρα $\frac{BM}{BS} = \frac{BR}{BK} \Leftrightarrow BR \cdot BS = BM^2$ [BM = BK].

Έτσι έχουμε

$$IR^2 + IS^2 - RS^2 = (IB^2 + BR^2) + (IB^2 + BS^2) - (RB + BS)^2$$

[Πυθαγόρειο θεώρημα στα IRB και ISB]

$$= 2(IB^2 - RB \cdot BS) = 2\,(IB^2 - BM^2) = 2\,IM^2 > 0$$

Άρα $IR^2 + IS^2 > RS^2 \Leftrightarrow \widehat{RIS} < 90^\circ$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6.

Θεωρούμε όλες τις συναρτήσεις f ορισμένες στο σύνολο N των θετικών ακεραίων και με πεδίο τιμών το N που ικανοποιούν τη σχέση

$$f(t^2 f(s)) = s(f(t))^2$$

για όλα τα s και t στο N. Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του f(1998).

Λύση

Έστω S το σύνολο των συναρτήσεων που ικανοποιούν την υπόθεση και έστω $f \in S$. Θέτουμε $f(1) = \alpha$ και για $s = 1$ και $t = 1$ η δοσμένη σχέση δίνει

$$f(f(s)) = \alpha^2 s$$

$$f(\alpha t^2) = [f(t)]^2, \text{ για κάθε } s, t \in \mathbb{N}.$$

Από αυτές τις σχέσεις και χρησιμοποιώντας την αρχική προκύπτει

$$[f(s)\, f(t)]^2 = [f(s)]^2 f(\alpha t^2) = f(s^2 f(f(\alpha t^2)))$$

$$= f(s^2\, \alpha^2\, \alpha t^2)$$

$= f(\alpha\,(\alpha st)^2)$

$= [\,f(\alpha st)]^2$

Άρα f(s) f(t) = f(αst) για όλα τα s, t ∈ $\mathbb{N}$., οπότε αν s = 1,

αf(t) = f(αt), για κάθε s. Επομένως θα είναι

$$\alpha f(st) = f(\alpha st) = f(s)\,f(t) \qquad (1)$$

Θα αποδείξουμε ότι το f(s) διαιρείται με το α για κάθε s ∈ $\mathbb{N}$. Για έναν πρώτο p έστω p^i, p^j οι μέγιστες δυνάμεις του p που διαιρούν τον α και τον f(s) αντίστοιχα. Από την (1) για s = t προκύπτει ότι $[f(s)]^n = \alpha^{n-1} f(s^n)$ για κάθε n ∈ $\mathbb{N}$ (επαγωγή).

Η μέγιστη δύναμη του p που διαιρεί το αριστερό μέλος είναι p^{nj} ενώ αυτή που διαιρεί το δεξί μέλος είναι τουλάχιστον $p^{(n-1)i}$. Άρα $nj \geqslant (n-1)\,i$ για κάθε n ∈ $\mathbb{N}$, το οποίο είναι δυνατό μόνο αν $j \geqslant i$. Αυτό ισχύει για οποιονδήποτε πρώτο p, οπότε το α διαιρεί το f(s).

Θέτουμε $g(s) = \frac{f(s)}{\alpha}$, $g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Τα παραπάνω αποτελέσματα μας δίνουν

$$g(\alpha) = \alpha,\ g(st) = g(s)\,g(t),\ g(g(s)) = s, \text{ για κάθε } s, t \in \mathbb{N}. \qquad (2)$$

[$g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$, η g(st) = g(s) g(t) είναι ισοδύναμη με την (1) και

$$\alpha g(g(s)) = g(\alpha)\,g(g(s)) = g(\alpha g(s) = g(f(s)) = \frac{f(f(s))}{\alpha} = \frac{\alpha^2 s}{\alpha} = \alpha s].$$

Από τη (2) έχουμε ότι $g(t^2 g(s)) = g(t^2)g(g(s)) = s\,[g(t)]^2$ για κάθε s, t ∈ $\mathbb{N}$, οπότε g ∈ S.

Επειδή όμως οι τιμές της g δε ξεπερνούν τις αντίστοιχες τιμές της f, αρκεί να μελετήσουμε τις συναρτήσεις g που ικανοποιούν τη (2). Το σημαντικό με αυτές τις συναρτήσεις είναι ότι κάθε πρώτος απεικονίζεται σε πρώτο.

Πράγματι, αν p πρώτος και g(p) = mn, με m, n θετικούς ακεραίους, τότε

p = g(g(p)) = g(mn) = g(m) g(n) οπότε ένας από τους αριθμούς g(m), g(n) είναι ίσος με τη μονάδα. Αν, π.χ., g(m) = 1 τότε m = g(g(m)) = g(1) = 1, που σημαίνει ότι το g(p) είναι πρώτος.

Για να βρούμε τη ζητούμενη τιμή, θεωρούμε μία συνάρτηση g που ικανοποιεί τη (2). Αυτή η συνάρτηση είναι 1 – 1, αφού

$g(m) = g(n) \Rightarrow g(g(m)) = g(g(n)) \Rightarrow m = n$, οπότε διαφορετικοί πρώτοι απεικονίζονται σε διαφορετικούς πρώτους.

Άρα ένα κάτω φράγμα για το

$$g(1998) = g(2 \cdot 3^3 \cdot 37) = g(2)\,[\,g(3)]^3\, g(37)$$

επιτυγχάνεται αν τα $g(2)$, $g(3)$, $g(37)$ είναι οι τρεις μικρότεροι πρώτοι 2, 3, 5 με $g(3) = 2$.

Άρα $g(1998) \geqslant 3 \cdot 2^3 \cdot 5 = 120$, για κάθε $g \in S$. Επειδή υπάρχει συνάρτηση $g \in S$ με $g(1998) = 120$, η ζητούμενη ελάχιστη τιμή για το $g(1998)$ είναι 120.

Η συνάρτηση αυτή ορίζεται ως εξής:

$g(2) = 3$, $g(3) = 2$, $g(5) = 37$, $g(37) = 5$, …, $g(p) = p$ για κάθε p πρώτο, $p \neq 2, 3, 5, 37$ και αν $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, $g(n) = g(p_1)^{\alpha_1} g(p_2)^{\alpha_2} \dots g(p_k)^{\alpha_k}$.

Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί τις σχέσεις (2) (με $\alpha = 1$) οπότε $g \in S$ και $g(1998) = 120$.



40η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 1999

Τόπος Διοργάνωσης:	Ρουμανία (Μπρασόφ – Βουκουρέστι)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	Viorel Barbu (Μέλος Ρουμανικής Ακαδημίας)
Συμμετοχή:	81 χώρες με 6 το πολύ μαθητές η καθεμία
Μέγιστη Βαθμολογία:	42 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες:	Κίνα και Ρωσία (182), Βιετνάμ (177), Ρουμανία (173), Βουλγαρία (170), Λευκορωσία (167), Ν. Κορέα (164), Ιράν (159).

Η Ελληνική ομάδα πήρε μέρος με τους μαθητές Σ. Αντωνακόπουλο (αργυρό μετάλλιο), Θ. Ματσούκα (αργυρό μετάλλιο), Θ. Μπουρνή, Μ. Σταυρόπουλο, Α. Οικονόμου και Γ. Χαλούλο. Αρχηγός της ομάδας ήταν ο κ. Ανάργυρος Φελλούρης και υπαρχηγός ο κ. Ευστράτιος Ράππος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε όλα τα πεπερασμένα σύνολα S που αποτελούνται από τρία τουλάχιστον σημεία του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν την ακόλουθη συνθήκη: για οποιαδήποτε δύο διαφορετικά σημεία Α και Β του S, η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ είναι άξονας συμμετρίας του S.

Λύση

Θεωρούμε την κυρτή θήκη του συνόλου S το οποίο ικανοποιεί τη δεδομένη συνθήκη και υποθέτουμε ότι υπάρχουν n σημεία του συνόλου S πάνω σε αυτήν, τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ με τη σειρά που τα δίνουμε.

Κατ' αρχήν θα αποδείξουμε την ακόλουθη βοηθητική πρόταση:

Λήμμα 1: Δεν υπάρχουν τρία σημεία του S που είναι συγγραμμικά.

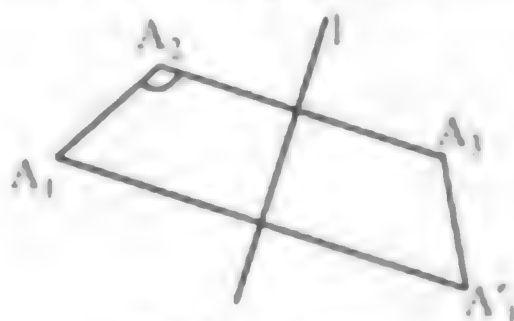
Απόδειξη



Σχήμα 131

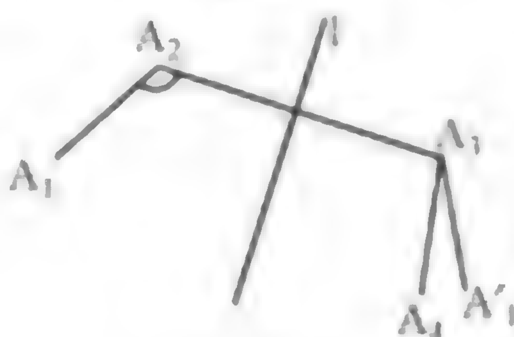
Υποθέτουμε ότι τα σημεία X, Y, Z του S είναι συγγραμμικά. Έστω l και m οι μεσοκάθετοι των ευθυγράμμων τμημάτων XY και YZ, αντιστοίχως. Ονομάζουμε R_l και R_m τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς συμμετρίας ως προς τις ευθείες l και m, αντιστοίχως. Τότε έχουμε $R_l(X)=Y$, $R_m(Y)=Z$, ενώ η σύνθεση $R_m \circ R_l$ θα είναι μία μεταφορά με $R_m \circ R_l(X)=Z$. Έτσι με επαναληπτική εφαρμογή της $R_m \circ R_l$ θα βρούμε άπειρα σημεία του συνόλου S πάνω στην ευθεία XYZ (άτοπο, αφού το S είναι πεπερασμένο).

Στη συνέχεια, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η γωνία $A_1\hat{A}_2A_3$ είναι η μεγαλύτερη γωνία της κυρτής θήκης του S. Αν l είναι η μεσοκάθετος του A_2A_3 τότε $R_l(A_2)=A_3$, $R_l(A_3)=A_2$ και έστω $R_l(A_1)=A_1'$ και πρέπει ακόμη το $R_l(A_1')$ να είναι ένα σημείο του S.



Σχήμα 132

Αν είναι $A_2\hat{A}_3A_1' > A_2\hat{A}_3A_4$, τότε το A_1' βρίσκεται στο εξωτερικό της κυρτής θήκης του S, που είναι αδύνατο.



Σχήμα 133

Αν είναι $A_2\hat{A}_3A_1' < A_2\hat{A}_3A_4$, τότε $A_1\hat{A}_2A_3 = A_2\hat{A}_3A_1'$ δεν είναι η μεγαλύτερη γωνία της κυρτής θήκης $A_1A_2\ldots A_n$ του συνόλου S.

Άρα θα πρέπει να είναι $A_1\hat{A}_2A_3 = A_2\hat{A}_3A_1' = A_2\hat{A}_3A_4$ και συνεχίζοντας με την ίδια διαδικασία αποδεικνύουμε ότι όλες οι γωνίες του πολυγώνου $A_1A_2\ldots A_n$ είναι ίσες.

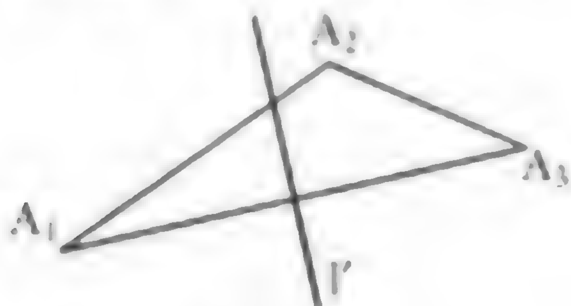
Σύμφωνα με το Λήμμα 1, επειδή τα σημεία A_3, A_4, A_1' είναι συγγραμμικά θα πρέπει $A_4 = A_1'$ και έτσι $A_1A_2 = A_3A_4$.

Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία θα έχουμε

$$A_1A_2 = A_3A_4 = A_5A_6 = \cdots \quad (1)$$

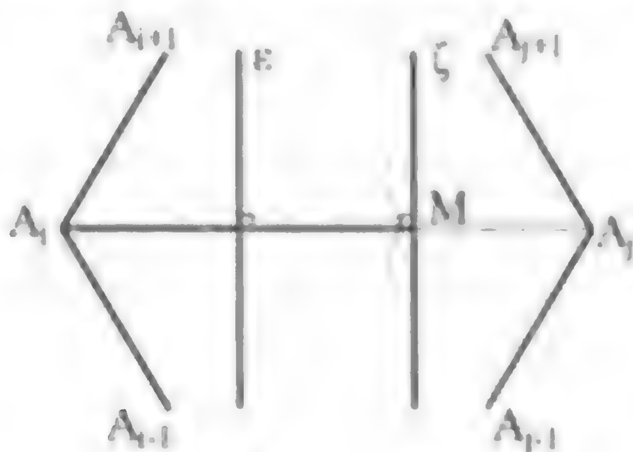
και ομοίως

$$A_2A_3 = A_4A_5 = A_6A_7 = \cdots. \quad (2)$$



Σχήμα 134

Στη συνέχεια, θεωρούμε την μεσοκάθετο l' του A_1A_3 και έστω $R_{l'}(A_2) = A_2'$. Τότε πρέπει $A_2' \in S$ και αν είναι $A_2' \neq A_2$, τότε το A_2' είναι εξωτερικό της κυρτής θήκης του S. Επομένως θα είναι $A_2' \equiv A_2$, οπότε $A_2 \in l'$, με συνέπεια την ισότητα $A_1A_2 = A_2A_3$. Έτσι από τις (1) και (2) και την ισότητα όλων των γωνιών της κυρτής θήκης $A_1A_2\ldots A_n$ του S προκύπτει ότι η κυρτή θήκη του S είναι ένα κανονικό n-γώνο $A_1A_2\ldots A_n$.



Σχήμα 135

Ας υποθέσουμε ότι M είναι ένα σημείο του S, το οποίο δεν ανήκει στην κυρτή θήκη του, οπότε, λόγω του Λήμματος 1, αυτό θα ανήκει στο εσωτερικό του πολυγώνου $A_1A_2\ldots A_n$. Έστω A_i η κορυφή του $A_1A_2\ldots A_n$ που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από το M και ε ονομάζουμε τη μεσοκάθετο του A_iM. Αν ζ είναι η παράλληλη προς την ε που περνάει από το M, επειδή το M είναι στο εσωτερικό του πολυγώνου $A_1A_2\ldots A_n$, θα υπάρχει κορυφή, έστω A_j, του $A_1A_2\ldots A_n$ τέτοια ώστε αυτή και η ευθεία ε να βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ζ. Αν είναι $A'_j = R_\varepsilon(A_j)$, τότε πρέπει $A'_j \in S$, αφού η ε είναι άξονας συμμετρίας του S.

Αν με $d(\varepsilon,\zeta)$ συμβολίσουμε την απόσταση των ευθειών ε και ζ και με $d(\varepsilon, A_i)$ συμβολίσουμε την απόσταση του σημείου A_i από την ευθεία ε, τότε θα έχουμε

$$d(\varepsilon,\zeta) = d(\varepsilon, A_i)$$

$$d(\varepsilon, A'_j) = d(\varepsilon, A_j) = d(\varepsilon,\zeta) + d(\zeta, A_j) > d(\varepsilon, A_i),$$

οπότε θα είναι και

$$d(M, A'_j) > d(M, A_i),$$

που είναι άτοπο, γιατί το A_i απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από το M.

Άρα το σημείο M δεν μπορεί να ανήκει στο S.

Επομένως οι μοναδικές πιθανές λύσεις του προβλήματος είναι τα κανονικά n-γωνα με $n \geq 3$.

Αντίστροφα, αν τα σημεία του S ορίζουν ένα κανονικό n-γώνο, τότε είναι φανερό ότι αυτό ικανοποιεί τη συνθήκη του προβλήματος. Έτσι λύσεις του προβλήματος είναι όλα τα κανονικά n-γωνα με $n \geq 3$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Έστω n ένας σταθερός ακέραιος με $n \geq 2$.

(α) Να προσδιορίσετε την ελάχιστη σταθερά C που είναι τέτοια ώστε η ανισότητα

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \left(x_i^2 + x_j^2\right) \leq C \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4,$$

να ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς $x_1, \ldots, x_n \geq 0$.

(β) Για τη σταθερά C που θα βρείτε, να προσδιορίσετε πότε ισχύει η ισότητα.

Λύση (1ος τρόπος, από R. Liu, μέλος της ομάδας της Κίνας στη ΔΜΟ 1999)

(α) Αν ορίσουμε

$$S = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$
$$T = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

τότε θα έχουμε

$$\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j\left(x_i^2 + x_j^2\right) \le \sum_{i,j} x_i x_j S$$
$$= \frac{1}{2}\left[S \cdot 2\sum_{i,j} x_i x_j\right]$$
$$\le \frac{1}{2}\left[\left(\frac{S + 2\sum x_i x_j}{2}\right)^2\right] \quad \left[\begin{array}{l}\text{ανισότητα αριθμητικού-}\\ \text{γεωμετρικού μέσου}\end{array}\right]$$
$$\le \frac{1}{2}\cdot\frac{T^4}{4} = \frac{1}{8}T^4.$$

Επιπλέον, αν θέσουμε $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = \cdots = x_n = 0$, τότε θα έχουμε από τη δοθείσα ανισότητα $2 \le C \cdot 2^4$, οπότε προκύπτει ότι $C \ge \frac{1}{8}$.

Επομένως από τα παραπάνω προκύπτει ότι η ελάχιστη τιμή της σταθεράς C είναι $\frac{1}{8}$.

(β) Η ισότητα ισχύει όταν δύο από τις μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι ίσες και όλες οι άλλες είναι μηδέν.

2ος τρόπος (M. Kuczma, Αρχηγός της Πολωνικής ομάδας στη ΔΜΟ 1999)

Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας είναι ομογενή τετάρτου βαθμού, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j\left(x_i^2 + x_j^2\right) \le \frac{1}{8}, \text{ για κάθε } n \ge 2.$$

Έστω

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i<j}x_i^3x_j+\sum_{i<j}x_ix_j^3=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^3\cdot\sum_{j\neq i}x_j\right).$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ισχύει

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^3(1-x_i) \qquad (1)$$

Στη συνέχεια να αποδείξουμε μια βοηθητική πρόταση:

Λήμμα 1: Αν $0<x\le b\le\frac{1}{2}$, τότε $x^2-x^3\le b^2-b^3$.

Απόδειξη

Έχουμε

$$b+x\ge(b+x)^2\ge b^2+bx+x^2$$

$$b^2-x^2\ge b^3-x^3 \text{ (πολλαπλασιασμός επί } b-x\ge 0\text{)}$$

$$b^2-b^3\ge x^2-x^3.$$

Επειδή η ζητούμενη ανισότητα είναι συμμετρική, μπορούμε να υποθέσουμε ότι: $x_1\ge x_2\ge\cdots\ge x_n\ge 0$.

Διακρίνουμε τώρα τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

I. Αν είναι $\frac{1}{2}\ge x_1\ge x_2\ge\cdots\ge x_n$, τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned}F(x_1,x_2,\ldots,x_n)&=\sum_i x_i^3(1-x_i) && \text{[λόγω της (1)]}\\&=\sum_i x_i\left(x_i^2-x_i^3\right)\\&\le\sum_i x_i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right) && \text{[από Λήμμα 1]}\\&=\frac{1}{8} && \text{[αφού } x_1+x_2+\cdots+x_n=1\text{]}.\end{aligned}$$

II. Αν είναι $x_1>\frac{1}{2}\ge x_2\ge\cdots\ge x_n$ και θέσουμε $x_1=a$, $x_2+x_3+\cdots+x_n=b$, τότε θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a^3 b + \sum_{i \geq 2} x_i \left(x_i^2 - x_i^3\right) \text{ [λόγω της (1)]} \\
&\leq a^3 b + \sum_{i \geq 2} x_i \left(b^2 - b^3\right) \text{ [από Λήμμα 1]} \\
&= a^3 b + b\left(b^2 - b^3\right) \\
&= a^3 b + b^3 (1 - b) \\
&= ab\left(a^2 + b^2\right) \text{ [αφού } 1 - b = a \text{]} \\
&< \frac{1}{8} \text{ [αφού } a \neq b \text{]}.
\end{aligned}
$$

Για να δείξουμε ότι το $\frac{1}{8}$ είναι η ελάχιστη τιμή για τη σταθερά C, θεωρούμε $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \cdots = x_n = 0$, όπως και στον πρώτο τρόπο.

(β) Όπως και στον πρώτο τρόπο.

3ος τρόπος

Η ανισότητα είναι ομογενής βαθμού 4, οπότε αρκεί να ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση που είναι $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Η ελάχιστη τιμή του C που ζητάμε είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \left(x_i^2 + x_j^2\right),$$

υπό τον όρο ότι $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$.

Έστω C_n η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f, όταν $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Επειδή στις n-άδες $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ υπάρχουν και κάποιες που έχουν τις τελευταίες n-m συνιστώσες ίσες με 0, εύκολα προκύπτει ότι

$$C_m \leq C_n \text{, όταν } m < n \tag{1}$$

Για να αποδείξουμε την αντίστροφη της παραπάνω σχέσης, πρέπει να αποδείξουμε ότι οι τιμές της f δεν υπερβαίνουν την τιμή της όταν κάποιοι από τους x_i είναι 0.

Επειδή η f είναι συμμετρική, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_{n-1} \ge x_n \ge 0$. Θεωρούμε $n \ge 3$.

Για $n = 3$, αν είναι $x_1 \ge \frac{1}{3}$ τότε $x_2 + x_3 \le \frac{2}{3}$.

Για $n \ge 4$, αν είναι $x_n \le \frac{1}{n}$ και $x_{n-1} \le \frac{1}{n-1}$, τότε $x_n + x_{n-1} \le \frac{1}{4} + \frac{1}{3} < \frac{3}{4}$.

Έχουμε ακόμη ότι

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le i < j \le n} x_i^3 x_j + x_j^3 x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \left(\sum_{j \ne i} x_j \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^3 (1 - x_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^3 - x_i^4 \right),$$

οπότε

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1} + x_n, 0) - f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$$

$$= (x_{n-1} + x_n)^3 - (x_{n-1} + x_n)^4 - x_{n-1}^3 + x_{n-1}^4 - x_n^3 + x_n^4$$

$$= x_{n-1} x_n \cdot \left(3x_{n-1} + 3x_n - 4x_{n-1}^2 - 6x_{n-1} x_n - 4x_n^2 \right)$$

$$= x_{n-1} x_n \cdot \left[(x_{n-1} + x_n)(3 + 4(x_{n-1} + x_n)) + 2x_{n-1} x_n \right] \ge 0.$$

Επειδή ισχύει

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1} + x_n, 0) \le C_{n-1},$$

για κάθε συνάρτηση f, έπεται ότι:

$$C_n \le C_{n-1}, \text{ για κάθε } n \ge 3. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) έχουμε $C_n = C_2$.

Έστω τώρα $x_1 + x_2 = 1$. Τότε

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 1 - 2x_1 x_2$$

και

$$x_1 x_2 \left(x_1^2 + x_2^2 \right) = \frac{1}{2} \cdot 2x_1 x_2 \cdot (1 - 2x_1 x_2) \le \frac{1}{8},$$

ενώ η ισότητα αληθεύει αν, και μόνο αν, $2x_1 x_2 = \frac{1}{2}$, δηλαδή $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$.

Επομένως, σύμφωνα με τα προηγούμενα, η ζητούμενη τιμή του C είναι $\frac{1}{8}$ και η ισότητα ισχύει, αν, και μόνο αν, $x_1 = x_2$ και $x_3 = x_4 = \cdots = x_n = 0$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Θεωρούμε έναν τετραγωνικό πίνακα πλευράς n, όπου n είναι ένας σταθερός άρτιος θετικός ακέραιος. Υποδιαιρούμε τον παραπάνω πίνακα σε n^2 τετράγωνα πλευράς ένα. Λέμε ότι δύο τετράγωνα του πίνακα είναι γειτονικά, αν έχουν μία κοινή πλευρά.

Σημαδεύουμε με ένα σταυρό N μοναδιαία τετράγωνα του πίνακα έτσι ώστε κάθε μοναδιαίο τετράγωνο (σημαδεμένο ή μη σημαδεμένο) του πίνακα να είναι γειτονικό με ένα τουλάχιστον σημαδεμένο τετράγωνο.

Να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή τιμή του N.

Λύση

Κατ' αρχήν χρωματίζουμε τον πίνακα μαύρο-άσπρο, όπως ακριβώς ένα σκακιστικό πίνακα (εναλλάξ μαύρο-άσπρο).

Έστω $N = f(n)$ ο ζητούμενος αριθμός και έστω

$f_w(n) =$ ο ελάχιστος αριθμός άσπρων τετραγώνων που πρέπει να υπάρχουν έτσι ώστε κάθε μαύρο τετράγωνο να έχει ένα τουλάχιστον γειτονικό άσπρο τετράγωνο.

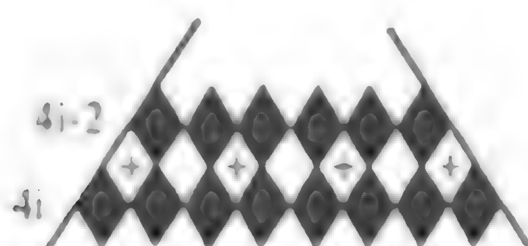
Ανάλογα ορίζουμε και τη συνάρτηση $f_b(n)$ και λόγω της συμμετρίας του πίνακα, αφού $n = 2k$ (άρτιος), θα πρέπει να έχουμε

$$f_w(n) = f_b(n)$$

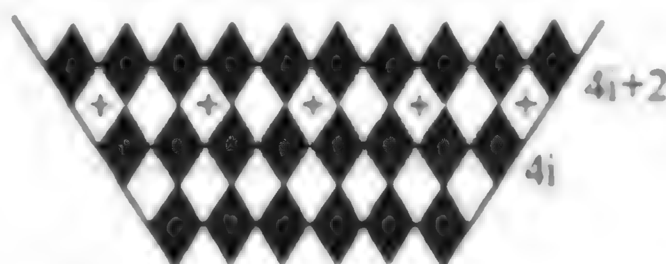
και ακόμα

$$N = f(n) = f_w(n) + f_b(n).$$

Είναι κατάλληλο να θεωρήσουμε τον πίνακα ως προς τις διαγώνιες ευθείες που είναι παράλληλες προς την μεγαλύτερη μαύρη διαγώνιο, τις οποίες και τοποθετούμε οριζοντίως. Έτσι το πλήθος των τετραγώνων αυτών των μαύρων διαγωνίων είναι 2, 4, ..., 2k, ..., 4, 2.



Σχήμα 136 (i)



Σχήμα 136 (ii)

Σημαδεύουμε με ένα σταυρό τα «περιττά» τετράγωνα των άσπρων διαγωνίων, που είναι ακριβώς κάτω από τις μαύρες διαγωνίους «μήκους» $4i-2$.

Στην πρώτη περίπτωση (πάνω από τη διαγώνιο) υπάρχουν $2i$ σημαδεμένα άσπρα τετράγωνα, ενώ στη δεύτερη περίπτωση (κάτω από τη διαγώνιο) υπάρχουν $2i+1$ σημαδεμένα άσπρα τετράγωνα.

Επομένως έχουμε σημαδέψει

$$2+4+\cdots+k+(k-1)+\cdots+3+1=\frac{k(k+1)}{2},$$

άσπρα τετράγωνα.

Είναι πλέον εύκολο να διαπιστώσουμε ότι

$$f_w(n)\leq\frac{k(k+1)}{2},$$

αφού κάθε μαύρο τετράγωνο έχει ένα γειτονικό άσπρο σημαδεμένο τετράγωνο.

Παρατηρούμε ακόμη ότι τα $\frac{k(k+1)}{2}$ σημαδεμένα άσπρα τετράγωνα, δεν έχουν κανένα κοινό γειτονικό μαύρο τετράγωνο, οπότε χρειαζόμαστε να σημαδέψουμε τουλάχιστον $\frac{k(k+1)}{2}$ μαύρα τετράγωνα για να πληρούται η υπόθεση του προβλήματος για τα $\frac{k(k+1)}{2}$ σημαδεμένα άσπρα τετράγωνα, οπότε θα έχουμε

$$f_b(n)\geq\frac{k(k+1)}{2}.$$

Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι

$$f_w(n)=f_b(n)=\frac{k(k+1)}{2},$$

$$N = f(n) = f_w(n) + f_b(n) = k(k+1) = \frac{n(n+2)}{4}.$$

Παρατήρηση

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

$$f(n) = \begin{cases} 4k^2, & \text{αν } n = 4k-1 \\ (2k+1)^2, & \text{αν } n = 4k+1. \end{cases}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη (n,p) θετικών ακεραίων, που είναι τέτοια ώστε:

ο p είναι πρώτος, $n \le 2p$, και

ο $(p+1)^n + 1$ διαιρείται από τον n^{p-1}.

Λύση

Αν είναι $p = 2$, τότε $n = 1, 2, 3$ ή 4, αφού $n \le 2p$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι για $n = 1$ ή 2 ικανοποιείται και η τρίτη απαίτηση του προβλήματος, ενώ για $n = 3$ ή 4 δεν συμβαίνει το ίδιο.

Επιπλέον για $n = 1$, οι απαιτήσεις του προβλήματος ικανοποιούνται για κάθε πρώτο αριθμό p.

Έτσι μέχρι τώρα έχουμε βρει τις λύσεις $(1,p)$, όπου p πρώτος αριθμός, και $(2,2)$.

Υποθέτουμε ότι $p \ge 3$ πρώτος και $n \ge 2$.

Επειδή ο p είναι περιττός, ο $(p-1)^n + 1$ θα είναι περιττός, οπότε για να τον διαιρεί ο n^{p-1} θα πρέπει ο n να είναι περιττός. Έστω q ο ελάχιστος πρώτος διαιρέτης του n και έστω $n = kq$.

Τώρα έχουμε

$$n^{p-1} \mid (p-1)^n + 1.$$

$$\Leftrightarrow (p-1)^n \equiv -1 \pmod{n^{p-1}}$$

$$\Leftrightarrow (p-1)^{2n} = (p-1)^{2kq} \equiv 1 \pmod{q}.$$

Επειδή ο q διαιρεί τον $(p-1)^n+1$, οι αριθμοί $p-1$ και q είναι πρώτοι μεταξύ τους, οπότε

$$(p-1)^{q-1}\equiv 1 (\bmod q).$$

Έστω $d=(2kq,q-1)$. Τότε υπάρχουν ακέραιοι a, b τέτοιοι ώστε $a\cdot 2kq+b\cdot(q-1)=d$ και

$$\begin{aligned}(p-1)^d &= (p-1)^{(2kq)a}\cdot(p-1)^{(q-1)b}\\ &\equiv 1^a\cdot 1^b (\bmod q)\equiv 1(\bmod q).\end{aligned}$$

Επειδή ο q είναι ο ελάχιστος πρώτος διαιρέτης του n, δεν υπάρχει πρώτος διαιρέτης του k μικρότερος του q, οπότε $(k,q-1)=1$, $(q,q-1)=1$. Έτσι έχουμε $d=(2kq,q-1)=2$, οπότε $(p-1)^2\equiv 1(\bmod q)$ και ο q διαιρεί τον $(p-1)^2-1=p(p-2)$.

Επομένως θα είναι $q=p$ ή ο q διαιρεί τον $p-2$.

Περίπτωση 1. Έστω $q=p$.

Τότε $n=p$ ή $n=2p$, και αφού ο n είναι περιττός, θα έχουμε $n=p$, οπότε

$$p^{p-1}\mid(p-1)^p+1$$

$$\Leftrightarrow p^{p-1}\mid p^p-\binom{p}{1}p^{p-1}+\binom{p}{2}p^{p-2}-\cdots-\binom{p}{2}p^2+\binom{p}{1}p-1+1$$

$$\Leftrightarrow p^{p-1}\mid p^p-\binom{p}{1}p^{p-1}+\binom{p}{2}p^{p-2}-\cdots-\binom{p}{2}p^2+\binom{p}{1}p:=A.$$

Ο αριθμός $\binom{p}{m}$ διαιρείται με το p, αν $1\le m\le p-1$, οπότε ο p^3 διαιρεί όλους τους όρους της παράστασης A εκτός του όρου $\binom{p}{1}p=p^2$. Επομένως η μεγαλύτερη δύναμη του p πού διαιρεί τον αριθμό A είναι η p^2, οπότε πρέπει $p-1\le 2\Leftrightarrow p\le 3$.

Άρα είναι $p=3$, οπότε θα είναι και $n=3$, δηλαδή το ζεύγος $(3,3)$ είναι μία λύση.

Περίπτωση 2. Έστω $q \mid p-2$.

Τότε θα έχουμε $p-2=mq$ για κάποιο $m \in \mathbb{Z}$ ή $p-1=mq+1$ και

$$q^{p-1} \mid n^{p-1} \text{ και } n^{p-1} \mid (p-1)^n+1=(mq+1)^n+1,$$

οπότε

$$q \mid (mq)^n+\binom{n}{1}(mq)^{n-1}+\cdots+nmq+1+1$$

$$\Leftrightarrow q \mid (mq)^n+\binom{n}{1}(mq)^{n-1}+\cdots+nmq+2.$$

Άρα $q \mid 2$, οπότε θα είναι $q=2$, ενώ ο n είναι περιττός (άτοπο).

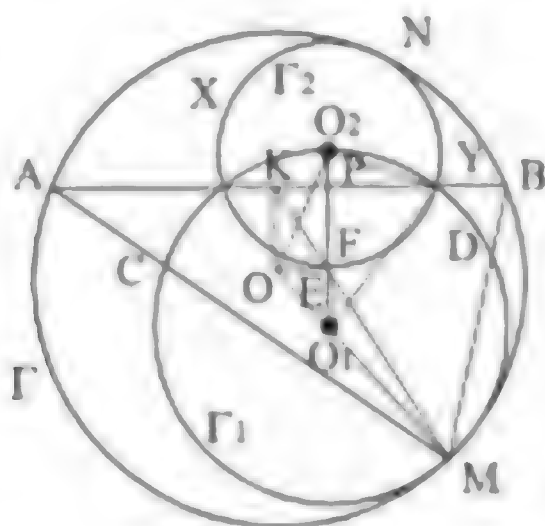
Έτσι έχουμε βρει τις λύσεις

$(n,p)=(2,2),(3,3)$ ή $(1,p)$, όπου p τυχαίος πρώτος αριθμός.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Δύο κύκλοι Γ_1 και Γ_2 περιέχονται στο εσωτερικό του κύκλου Γ και εφάπτονται εσωτερικά του Γ στα διαφορετικά σημεία M και N, αντιστοίχως. Ο κύκλος Γ_1 περνάει από το κέντρο του κύκλου Γ_2. Η ευθεία που ορίζεται από τα δύο σημεία τομής των κύκλων Γ_1 και Γ_2 τέμνει τον κύκλο Γ στα σημεία A και B. Οι ευθείες MA και MB τέμνουν τον κύκλο Γ_1 στα C και D, αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι η CD εφάπτεται του κύκλου Γ_2.

Λύση



Σχήμα 137

Έστω ότι οι κύκλοι Γ, Γ_1 και Γ_2 έχουν κέντρα O, O_1 και O_2 και ακτίνες r, r_1 και r_2, αντιστοίχως. Θα θεωρήσουμε ότι $r_1 > r_2$, αφού οι περιπτώσεις με $r_1 = r_2$ ή $r_1 < r_2$ είναι όμοιες.

Έστω ότι η κοινή χορδή AB των κύκλων Γ_1 και Γ_2 τέμνει την O_1O_2 στο P. Θα είναι $O_1O_2 \perp AB$. Έστω ακόμη K το ίχνος της κάθετης από το O προς την AB, E το ίχνος της κάθετης από το O προς την O_1O_2, F το σημείο τομής των O_1O_2 και KM, και Y το σημείο τομής των Γ_1 και Γ_2 που είναι μεταξύ των P και B.

Θα έχουμε

$$O_1O_2 = r_1 = O_1Y,\ O_2Y = r_2,\ OO_2 = r - r_2,\ OM = r,\ O_1M = r_1,\ OO_1 = r - r_1.$$

Επειδή είναι $O_1F \parallel OK$, τα τρίγωνα MO_1F και MOK θα είναι όμοια, οπότε

$$O_1F = \frac{r_1}{r}OK = \frac{r_1}{r}(O_1P - O_1E).$$

Επομένως από τα τρίγωνα O_2O_1Y και OO_1O_2 και το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$\text{συν}\, O_2\hat{O}_1Y = \frac{r_1^2 + r_1^2 - r_2^2}{2r_1^2}$$

$$\text{συν}\, O\hat{O}_1O_2 = \frac{(r-r_1)^2 + r_1^2 - (r-r_2)^2}{2(r-r_1)r_1} = \frac{2r_1^2 - 2rr_1 + 2rr_2 - r_2^2}{2(r-r_1)r_1}.$$

Άρα έχουμε

$$O_1F = \frac{r_1}{r}\left(\frac{2r_1^2 - r_2^2}{2r_1^2}\cdot r_1 - \frac{2r_1^2 - 2rr_1 + 2rr_2 - r_2^2}{2(r-r_1)r_1}\cdot(r-r_1)\right) = \frac{2r_1^2 - r_2^2 - 2r_1^2 + 2rr_1 - 2rr_2 + r_2^2}{2r} = r_1 - r_2$$

οπότε θα είναι και $O_2F = r_2$ και το σημείο F ανήκει στον κύκλο Γ_2.

Τελικώς θεωρούμε ομοιοθεσία με κέντρο M και λόγο $\frac{r_1}{r}$, η οποία απεικονίζει το ευθύγραμμο τμήμα AB στο CD και το σημείο K στο σημείο F. Έτσι το F ανήκει στο CD και $AB \parallel CD$. Επομένως η CFD είναι κάθετη προς την O_2F και η CD είναι εφαπτομένη του κύκλου Γ_2.

$2^{ος}$ τρόπος

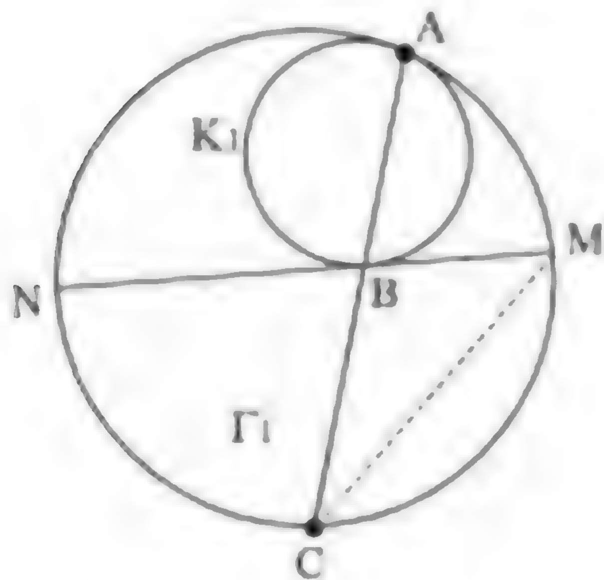
Λήμμα: Θεωρούμε κύκλο K και κύκλο K_1 εσωτερικά του K και εφαπτόμενο του K στο σημείο A. Έστω NM μία χορδή του K εφαπτόμενη του K_1 στο σημείο B και έστω C το μέσον του τόξου NM του κύκλου K που δεν περιέχει το A.

Τότε τα σημεία A, B και C είναι συνευθειακά και $CA \cdot CB = CM^2$.

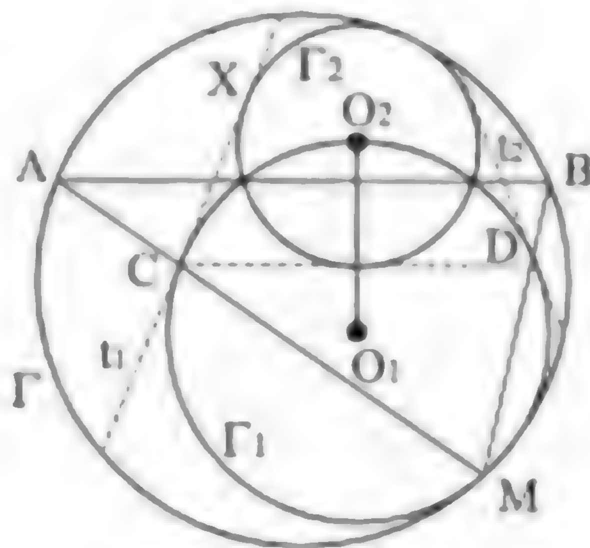
Απόδειξη

Η ομοιοθεσία με κέντρο A, η οποία μετασχηματίζει τον κύκλο K_1 στον κύκλο K, μετασχηματίζει και την ευθεία NM στην εφαπτομένη του K που είναι παράλληλη προς την NM, δηλαδή στην εφαπτομένη του K στο σημείο C, αφού το C είναι μέσον του τόξου NM.

Επομένως τα σημεία A, B και C είναι συνευθειακά.



Σχήμα 138



Σχήμα 139

Για το δεύτερο μέρος, παρατηρούμε ότι $N\hat{M}C = C\hat{A}M$, οπότε τα τρίγωνα ACM και MCB είναι όμοια, οπότε θα έχουμε

$$\frac{CA}{CM} = \frac{CM}{CB} \text{ ή } CA \cdot CB = CM^2.$$

• Για την απόδειξη του προβλήματος, έστω O_1, O_2 τα κέντρα των κύκλων Γ_1, Γ_2, αντιστοίχως, και t_1, t_2 οι εξωτερικές εφαπτόμενες των κύκλων Γ_1 και Γ_2, όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω α και β τα τόξα που ορίζονται στον κύκλο Γ από τις t_1 και t_2, που δεν περιέχουν τα σημεία επαφής του με τους κύκλους Γ_1 και Γ_2.

Σύμφωνα με το Λήμμα, τα μέσα των τόξων α και β έχουν ίσες δυνάμεις ως προς τους κύκλους Γ_1 και Γ_2, οπότε ανήκουν στο ριζικό άξονα των δύο κύκλων, δηλαδή ανήκουν στην κοινή χορδή τους. Επομένως τα σημεία A και B είναι τα μέσα των τόξων α και β, αντιστοίχως. Από το Λήμμα επίσης προκύπτει ότι τα σημεία C και D είναι τα σημεία επαφής του κύκλου Γ_1 με τις t_1 και t_2, αντιστοίχως. Αν θεωρήσουμε ομοιοθεσία κέντρου M, η οποία μετασχηματίζει τον κύκλο Γ_1 στον κύκλο Γ, τότε αυτή θα μετασχηματίζει το ευθύγραμμο τμήμα CD στο AB, οπότε θα είναι $AB \parallel CD$. Επομένως θα είναι $CD \perp O_1O_2$ και το O_2 θα είναι το μέσον του τόξου CD του κύκλου Γ_1.

Αν η t_1 εφάπτεται του Γ_2 στο σημείο X, τότε $X\hat{C}O_2 = \frac{1}{2}\cdot C\hat{O_1}O_2 = D\hat{C}O_2$, οπότε το O_2 ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $X\hat{C}D$, δηλαδή η CD είναι εφαπτομένη του κύκλου Γ_2.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$f(x-f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1,$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Λύση

Έστω $A = f(\mathbb{R}) := \{y = f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ το σύνολο τιμών της f και $c = f(0)$. Αν θέσουμε $x = y = 0$ στη δοθείσα σχέση, τότε θα προκύψει η ισότητα

$$f(-c) = f(c) + c - 1. \quad (1)$$

Αν ήταν $c=0$, τότε από την (1) προκύπτει $f(0)=f(0)-1$ (άτοπο). Άρα είναι $c\neq 0$.

Αν θέσουμε $x=f(y)\in A$ στη δοθείσα σχέση, τότε θα έχουμε

$$f(0)=f(x)+x^2+f(x)-1$$

$$f(x)=\frac{c+1}{2}-\frac{x^2}{2}, \tag{2}$$

για κάθε $x\in A$, δηλαδή έχουμε βρει τον περιορισμό της συνάρτησης f στο σύνολο τιμών A αυτής.

Το κρίσιμο σημείο για τη λύση του προβλήματος είναι το να αποδείξουμε ότι ισχύει η ισότητα συνόλων $A-A=\mathbb{R}$, δηλαδή ουσιαστικά το να αποδείξουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως διαφορά δύο αριθμών του συνόλου A. Το αντίστροφο είναι φανερό, αφού η διαφορά δύο αριθμών του A είναι πραγματικός αριθμός.

Αν θέσουμε $y=0$ στη δοθείσα σχέση, τότε προκύπτει

$$f(x-c)-f(x)=f(c)+cx-1$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε θα έχουμε

$$\{f(x-c)-f(x):x\in\mathbb{R}\}=\{cx+f(c)-1:x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R},$$

αφού είναι $c\neq 0$, που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Στη συνέχεια θεωρούμε το τυχαίο $x\in\mathbb{R}$, για το οποίο, αφού $\mathbb{R}=A-A$, θα υπάρχουν $y_1,y_2\in A$ έτσι ώστε $x=y_1-y_2$, οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} f(x)&=f(y_1-y_2)\\ &=f(y_2)+y_1y_2+f(y_1)-1\\ &=\frac{c+1}{2}-\frac{y_2^2}{2}+y_1y_2+\frac{c+1}{2}-\frac{y_1^2}{2}-1 \quad [\text{λόγω της } (2)]\\ &=c-\frac{(y_1-y_2)^2}{2}=c-\frac{x^2}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$

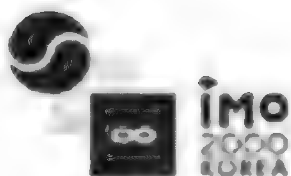
Από τις (2) και (3) προκύπτει $c=1$, οπότε θα έχουμε

$$f(x)=1-\frac{x^2}{2}, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Η λύση του προβλήματος τελειώνει με την επαλήθευση του ότι η συνάρτηση $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$, $x\in\mathbb{R}$ αποτελεί λύση του προβλήματος. Πράγματι έχουμε, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$,

$$f\left(x-f(y)\right)=f\left(x-1+\frac{y^2}{2}\right)=1-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}-\frac{y^4}{8}+x-\frac{xy^2}{2}+\frac{y^2}{2},$$

$$\begin{aligned}f\left(f(y)\right)+xf(y)+f(x)-1&=f\left(1-\frac{y^2}{2}\right)+x\left(1-\frac{y^2}{2}\right)+1-\frac{x^2}{2}-1\\&=1-\frac{1}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{8}+x-\frac{xy^2}{2}-\frac{x^2}{2}.\end{aligned}$$



41η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 2000

Τόπος Διοργάνωσης:	Ν. Κορέα (Ταεζόν)
Πρόεδρος Συμβ. Αρχηγών:	Sung Je Cho (Παν/μιο Ταενζόν)
Συμμετοχή:	82 χώρες με 6 το πολύ μαθητές η καθεμία
Νέες συμμετοχές:	--
Μέγιστη Βαθμολογία:	42 βαθμοί ανά μαθητή
Οι 8 πρώτες χώρες:	Κίνα (218), Ρωσία (215), Η.Π.Α. (184) Ν. Κορέα (172), Βουλγαρία (169), Βιετνάμ (169), Λευκορωσία (165), Ταϊβαν (164).

Η Ελληνική ομάδα πήρε μέρος με τους μαθητές Ι. Αναπολιτάνο (Χάλκινο μετάλλιο), Κ. Σταυρόπουλο (Εύφημο μνεία), Μ. Σταυρόπουλο, Μ. Δημάκο, Εμ. Νικολάου και Γ. Ράπτη. Αρχηγός της ομάδας ήταν ο κ. Ανάργυρος Φελλούρης και υπαρχηγός ο κ. Ευστράτιος Ράππος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Οι κύκλοι Γ_1 και Γ_2 τέμνονται στα σημεία M και N. Έστω l η κοινή εφαπτομένη των κύκλων Γ_1 και Γ_2 έτσι ώστε το σημείο M να βρίσκεται πλησιέστερα προς την l από ότι το σημείο N. Έστω ακόμη ότι, η l εφάπτεται του κύκλου Γ_1 στο σημείο A και του κύκλου Γ_2 στο σημείο B. Από το σημείο M φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την l η οποία τέμνει τον κύκλο Γ_1, εκτός του σημείου M, και στο σημείο C και τον κύκλο Γ_2, έκτός του σημείου M, και στο σημείο D.

Οι ευθείες CA και DB τέμνονται στο σημείο E, οι ευθείες AN και CD τέμνονται στο σημείο P και οι ευθείες BN και CD τέμνονται στο σημείο Q.

Να αποδείξετε ότι EP = EQ.

Λύση

Έστω K το σημείο τομής των MN και AB. Από το θεώρημα δύναμης σημείου ως προς κύκλο έχουμε

$$AK^2 = KN \cdot KM = BK^2$$

Σχήμα 138

δηλαδή AK = BK, οπότε το K είναι μέσον του AB. Επειδή είναι PQ ∥ AB, από τα ζεύγη των ομοίων τριγώνων PMN, AKN και QMN, BKN έχουμε

$$\frac{PM}{AK} = \frac{MN}{KN} = \frac{MQ}{BK},$$

οπότε αφού είναι AK = BK, προκύπτει ότι PM = MQ, δηλαδή το M είναι μέσον του PQ.

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι $EM \perp PQ$. Επειδή είναι CD ∥ AB και η AB εφάπτεται των κύκλων Γ_1 και Γ_2 στα A και B αντιστοίχως, τα σημεία A και B θα είναι μέσα των τόξων CM και MD, αντιστοίχως.

Έτσι τα τρίγωνα ACM και BDM είναι ισοσκελή. Επομένως, και από την παραλληλία CD ∥ AB, θα έχουμε

$$\widehat{BAM} = \widehat{AMC} = \widehat{ACM} = \widehat{EAB}$$
$$\widehat{ABM} = \widehat{BMD} = \widehat{BDM} = \widehat{EBA}$$

οπότε και τα τρίγωνα MAB και EAB είναι ίσα και έτσι θα είναι

AE = AM και BE = BM,

δηλαδή η AB είναι μεσοκάθετος της EM και $EM \perp AB$, άρα και $EM \perp PQ$.

Έχουμε αποδείξει ότι στο τρίγωνο EPQ η EM είναι διάμεσος και ύψος, οπότε το τρίγωνο EPQ είναι ισοσκελές με EP = EQ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνονται οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί a, b, c για τους οποίους ισχύει ότι $abc = 1$. Να αποδείξετε ότι

$$\left(\alpha - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{\alpha}\right) \leqslant 1. \quad (1)$$

Λύση ($1^{ος}$ τρόπος)

Με χρησιμοποίηση της σχέσης $abc = 1$, η μη ομογενής ανίσωση (1) μπορεί να μετασχηματισθεί σε **ομογενή** με μία κατάλληλη αλλαγή των μεταβλητών, αφού προσδιορίζονται θετικοί πραγματικοί αριθμοί, έστω x, y, z, ώστε:

$$\frac{x}{y} = \alpha, \quad \frac{y}{z} = b, \quad \frac{z}{x} = c,$$

οπότε η ανίσωση (1) γίνεται ισοδύναμη προς την ανίσωση

$$(x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) \leqslant xyz. \quad (2)$$

Ένας το πολύ από τους αριθμούς

$$u = x - y + z, \; v = y - z + x, \; w = z - x + y$$

είναι αρνητικός, γιατί ανά δύο έχουν θετικό άθροισμα, $u + v = 2x$, $v + w = 2y$, $w + u = 2z$.

Αν είναι αρνητικός ένας μόνος από τους αριθμούς u, v, w, τότε θα έχουμε $uvw \leqslant 0 < xyz$ και η ανίσωση (2) αληθεύει.

Αν είναι $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ και $w \geqslant 0$, τότε από την ανίσωση αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου μπορούμε να έχουμε $\sqrt{uv} \leqslant \frac{1}{2}(u + v) = x$, και ομοίως $\sqrt{vw} \leqslant y$, $\sqrt{wu} \leqslant z$, από τις οποίες με πολλαπλασιασμό κατά μέλη λαμβάνουμε $uvw \leqslant xyz$, οπότε πάλι η ανίσωση (2) αληθεύει.

($2^{ος}$ τρόπος)

Το πρώτο μέλος της ανίσωσης (1), λόγω της σχέσης $abc = 1$, είναι ίσο προς την παράσταση $(\alpha b - b + 1)(bc - c + 1)(c\alpha - \alpha + 1)$.

Επίσης, αφού $\frac{1}{b} = \alpha c$, $\frac{1}{c} = \alpha b$, $\frac{1}{\alpha} = bc$, το πρώτο μέλος της ανίσωσης (1) είναι ίσο προς την παράσταση $(\alpha - 1 + \alpha c)(b - 1 + \alpha b)(c - 1 + bc)$.

Αν ονομάσουμε το πρώτο μέλος της ανίσωσης (1) ως L, τότε θα έχουμε:

$$L^2 = (\alpha b - b + 1)(bc - c + 1)(c\alpha - \alpha + 1)\,(\alpha - 1 + \alpha c)(b - 1 + \alpha b)(c - 1 + bc)$$

Αν είναι $u = \alpha - 1 + \frac{1}{b} \leqslant 0$, τότε θα είναι $-1 < \alpha - 1 < 0$, αφού $\frac{1}{b} > 0$, $\alpha > 0$.

Επιπλέον θα είναι $-1 + \frac{1}{b} < \alpha - 1 + \frac{1}{b} = u \leqslant 0$, οπότε προκύπτει ότι $-b + 1 < 0$ ή $b > 1$.

Επομένως στην περίπτωση αυτή θα έχουμε και ότι $v = b - 1 + \frac{1}{c} > 0$, $w = c - 1 + \frac{1}{\alpha} \leqslant 0$, οπότε $L = uvw \leqslant 0 < 1$ και η ανίσωση (1) αληθεύει.

Ομοίως εργαζόμαστε και στις περιπτώσεις που είναι $v = b - 1 + \frac{1}{c} \leqslant 0$ ή $w = c - 1 + \frac{1}{\alpha} \leqslant 0$.

Αν είναι $u < 0$, $v < 0$, $w < 0$, τότε όλοι οι παράγοντες της έκφρασης του L^2 είναι θετικοί και από την ανίσωση του αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου μπορούμε να έχουμε τις ανισώσεις

$$\sqrt{(\alpha b - b + 1)(b - 1 + \alpha b)} \leqslant \frac{1}{2}[(\alpha b - b + 1) + (b - 1 + \alpha b)] = \alpha b$$

$$\sqrt{(bc - c + 1)(c - 1 + bc)} \leqslant \frac{1}{2}[(bc - c + 1) + (c - 1 + bc)] = bc$$

$$\sqrt{(c\alpha - \alpha + 1)(\alpha - 1 + \alpha c)} \leqslant \frac{1}{2}[(c\alpha - \alpha + 1) + (\alpha - 1 + \alpha c)] = c\alpha$$

από τις οποίες με πολλαπλασιασμό κατά μέλη λαμβάνουμε

$$L \leqslant (\alpha b)(bc)(c\alpha) = (\alpha bc)^2 = 1.$$

(3ος τρόπος)

Καταρχήν, παρατηρούμε ότι ισχύει $\alpha k b l c m = klm$, για κάθε $k, l, m \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\alpha \leqslant 1 \leqslant b \leqslant c$, αφού δεν είναι δυνατόν $\alpha < 1$ και $b < 1$ και $c < 1$ ή $\alpha > 1$ και $b > 1$ και $c > 1$, ενώ αν είναι $\alpha \leqslant b \leqslant 1 \leqslant c$, τότε $\frac{1}{\alpha} \geqslant \frac{1}{b} \geqslant 1 \geqslant \frac{1}{c}$ με $\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} = 1$.

Θέτουμε

$L = \left(\alpha - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{\alpha}\right)$ και ισοδύναμα έχουμε

$$L = (\alpha - 1 + \alpha c)(b - 1 + \alpha b)(c - 1 + bc) \qquad (1)$$

$$L = b(\alpha - 1 + \alpha c)\, c(b - 1 + \alpha b)\, \alpha(c - 1 + bc)$$

$$L = (ab - b + 1)(bc - c + 1)(ac - a + 1) \qquad (2)$$

Αν θέσουμε $x = a - 1,\ y = b - 1,\ w = c - 1,$

τότε από την υπόθεση $a \leqslant 1 \leqslant b \leqslant c$, προκύπτει ότι $-1 \leqslant x \leqslant 0$.

από τις (1) και (2) έχουμε

$$L = 1 + aw + yc + acyw + xb + abxw + bcxy + xyw$$

$$L = 1 - aw - yc + acyw - xb + abxw + bcxy - xyw,$$

οπότε με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι

$$aw + yc + xb + xyw = 0$$

$$aw + yc + xb = -xyw$$

$$(aw + yc + xb)^2 = x^2y^2w^2$$

$$a^2w^2 + y^2c^2 + x^2b^2 + 2(awyc + ycxb + xbaw) = x^2y^2w^2$$

$$\Rightarrow 2(awyc + ycxb + xbaw) = x^2y^2w^2 - a^2w^2 - y^2c^2 - x^2b^2$$

$$= x^2y^2w^2 - a^2w^2 - y^2(w + 1)^2 - x^2b^2$$

$$= x^2y^2w^2 - a^2w^2 - y^2w^2 - 2y^2w - y^2 - x^2b^2$$

$$= -a^2w^2 + y^2w^2(x^2 - 1) - 2y^2w - y^2 - x^2b^2 \leqslant 0$$

αληθής αφού $x^2 - 1 \leqslant 0$ και $w \geqslant 0$.

Έτσι τελικά έχουμε

$$L = 1 + (awcy + abxw + bcxy),$$

με $awcy + abxw + bcxy \leqslant 0$, οπότε άμεσα προκύπτει ότι είναι $L \leqslant 1$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω ο θετικός ακέραιος αριθμός $n \geqslant 2$. Πάνω σε μια οριζόντια ευθεία βρίσκονται αρχικά n ψύλλοι, όχι όλοι στο ίδιο σημείο της ευθείας. Αν λ είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, τότε ορίζουμε μια «μετακίνηση» ως εξής:

παίρνοντας δύο οποιουσδήποτε ψύλλους που βρίσκονται στα σημεία A και B, όπου το A βρίσκεται αριστερά του B, ο ψύλλος που βρίσκεται στο σημείο A πηδάει και καταλαμβάνει το σημείο C πάνω στην ευθεία δεξιά του B, έτσι ώστε $\frac{BC}{AB} = \lambda$.

Να καθορίσετε όλες τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει ότι, για κάθε τυχαίο σημείο M της ευθείας και για κάθε τυχαία αρχική θέση των n ψύλλων πάνω στην ευθεία, υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός από «μετακινήσεις» που μεταφέρει όλους τους ψύλλους σε θέσεις που βρίσκονται δεξιά του σημείου M.

Λύση

Μία εύλογη στρατηγική για να μεταφέρουμε τους ψύλλους όσο γίνεται πιο δεξιά είναι, σε κάθε μετακίνηση, ο ψύλλος που βρίσκεται πιο αριστερά να μεταφέρεται δεξιότερα του ψύλλου που βρίσκεται πιο δεξιά. Με αυτή τη στρατηγική, μετά από κ μετακινήσεις φθάνουμε σε μία τοποθέτηση των ψύλλων όπου δύο παράμετροι έχουν μεγάλη σημασία:

- η μέγιστη απόσταση μεταξύ ψύλλων, δηλαδή η διάμετρος του συνόλου των θέσεων τους, την οποία συμβολίζουμε με d_κ.
- η ελάχιστη απόσταση μεταξύ γειτονικών ψύλλων, την οποία συμβολίζουμε με δ_κ.

Προφανώς, ισχύει ότι: $d_\kappa \geqslant (n-1)\,\delta_\kappa$.

Μετά την κ+1 – μετακίνηση εμφανίζεται μία νέα απόσταση μεταξύ γειτονικών ψύλλων, η οποία ισούται με λd_κ. Αυτή μπορεί να είναι η νέα ελάχιστη απόσταση, οπότε $\delta_{\kappa+1} = \lambda d_\kappa$. Διαφορετικά θα ισχύει ότι: $\delta_{\kappa+1} \geqslant \delta_\kappa$.
Σε κάθε περίπτωση θα έχουμε

$$\frac{\delta_{\kappa+1}}{\delta_\kappa} \geqslant \min\left\{1, \frac{\lambda d_\kappa}{\delta_\kappa}\right\} \geqslant \min\{1, (n-1)\lambda\}.$$

Επομένως, αν $(n-1)\,\lambda \geqslant 1$ ή ισοδύναμα, αν $\lambda \geqslant \frac{1}{(n-1)}$, τότε $\delta_{\kappa+1} \geqslant \delta_\kappa$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$, δηλαδή η ακολουθία (δ_κ), $\kappa \in \mathbb{N}$, των ελαχίστων αποστάσεων είναι αύξουσα. Έτσι η θέση του ψύλλου που βρίσκεται πιο αριστερά, σε κάθε μετακίνηση θα μεταφέρεται δεξιότερα κατά ένα μήκος όχι μικρότερο από μία θετική σταθερά, οπότε τελικά μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό μετακινήσεων όλοι οι ψύλλοι θα μεταφερθούν δεξιότερα από οποιοδήποτε σημείο της ευθείας.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι, αν $\lambda < \frac{1}{(n-1)}$, τότε δεν ισχύει το ζητούμενο. Θεωρούμε την ευθεία που βρίσκονται οι ψύλλοι ως ευθεία των πραγματικών αριθμών και ταυτίζουμε τις θέσεις των ψύλλων με πραγματικούς αριθμούς.

Θεωρούμε τώρα μία τυχαία ακολουθία μετακινήσεων και υποθέτουμε ότι μετά την κ-μετακίνηση είναι:

- s_κ το άθροισμα όλων των αριθμών των θέσεων των ψύλλων
- w_κ ο αριθμός της θέσης του δεξιότερου ψύλλου.

Σημειώνουμε ότι ισχύει: $s_\kappa \leqslant n\, w_\kappa$.

Θα δείξουμε ότι η ακολουθία (w_κ), $\kappa \in \mathbb{N}$, είναι φραγμένη. Αυτό βεβαίως σημαίνει ότι η θέση του δεξιότερου ψύλλου θα είναι πάντοτε αριστερότερα από κάποιο σημείο M της ευθείας.

Έστω ότι κατά την $(\kappa+1)$-μετακίνηση ο ψύλλος από το σημείο $A(\alpha)$ πηδάει πάνω από το σημείο $B(b)$ και προσγειώνεται στο σημείο $C(c)$. Τότε θα έχουμε $c - b = \lambda(b - \alpha)$ ή ισοδύναμα $\lambda(c - \alpha) = (1 + \lambda)(c - b)$, οπότε

$$s_{\kappa+1} - s_\kappa = c - \alpha = \frac{1+\lambda}{\lambda}(c - b).$$

Αν είναι $c > w_\kappa$, τότε $w_{\kappa+1} = c$ και αφού πρέπει $b \leqslant w_\kappa$ θα ισχύει

$$s_{\kappa+1} - s_\kappa = \frac{1+\lambda}{\lambda}(c - b) \geqslant \frac{1+\lambda}{\lambda}(w_{\kappa+1} - w_\kappa) \qquad (1)$$

Η παραπάνω ανίσωση αληθεύει και όταν είναι $c \leqslant w_\kappa$, αφού τότε $w_{\kappa+1} - w_\kappa = 0$ και $s_{\kappa+1} - s_\kappa = c - \alpha > 0$.

Η ανίσωση (1) γράφεται ισοδύναμα ως

$$\frac{1+\lambda}{\lambda} w_{\kappa+1} - s_{\kappa+1} \leqslant \frac{1+\lambda}{\lambda} w_\kappa - s_\kappa,\ \kappa \in \mathbb{N},$$

οπότε η ακολουθία $z_\kappa = \frac{1+\lambda}{\lambda} w_\kappa - s_\kappa$ είναι φθίνουσα, με συνέπεια την ανίσωση $z_\kappa = \frac{1+\lambda}{\lambda} w_\kappa - s_\kappa \leqslant \frac{1+\lambda}{\lambda} w_0 - s_0 = z_0$, $\kappa \in \mathbb{N}$.

Όμως, από την υπόθεση $\lambda < 1/(n-1)$, προκύπτει ότι $1 + \lambda > n\lambda$ ή $\frac{1+\lambda}{\lambda} - n > 0$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$z_\kappa = \left(\frac{1+\lambda}{\lambda} - n\right) w_\kappa + (n\, w_\kappa - s_\kappa) \geqslant \left(\frac{1+\lambda}{\lambda} - n\right) w_\kappa$$

Έχουμε $w_\kappa \leqslant \dfrac{z_\kappa}{\frac{1+\lambda}{\lambda} - n} \leqslant \dfrac{z_0}{\frac{1+\lambda}{\lambda} - n}$, για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$.

Επομένως η θέση του δεξιότερου ψύλλου ποτέ δεν ξεπερνά μία σταθερά

$$K = \frac{z_0}{\frac{1+\lambda}{\lambda} - n} = \frac{\lambda z_0}{1 + \lambda(1 - n)}.$$

η οποία εξαρτάται από τα n, λ και τον αρχικό σχηματισμό των ψύλλων, όχι όμως και από τη στρατηγική των μετακινήσεων.

Άρα οι αριθμοί λ που ζητάμε είναι αυτοί που ικανοποιούν τη σχέση $\lambda \geq 1 / (n - 1)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Ένας ταχυδακτυλουργός έχει εκατό κάρτες αριθμημένες από το 1 μέχρι το 100. Ο ταχυδακτυλουργός τοποθετεί όλες τις κάρτες μέσα σε τρία κουτιά, ένα κόκκινο, ένα άσπρο και ένα μπλε κουτί, έτσι ώστε να υπάρχει τουλάχιστον μία κάρτα σε κάθε κουτί.

Ένας θεατής επιλέγει τυχαία δύο κουτιά και βγάζει μία κάρτα από το καθένα. Στη συνέχεια αθροίζει τους αριθμούς που υπάρχουν πάνω στις δύο κάρτες και ανακοινώνει το άθροισμα.

Με δεδομένο αυτό το άθροισμα, ο ταχυδακτυλουργός προσδιορίζει το κουτί από το οποίο ο θεατής δεν έβγαλε κάρτα.

Να βρείτε πόσοι διαφορετικοί τρόποι υπάρχουν να τοποθετήσει ο ταχυδακτυλουργός τις εκατό κάρτες στα τρία κουτιά, έτσι ώστε να προσδιορίζει πάντοτε το κουτί από το οποίο δε βγήκε καμία κάρτα.

(Δύο τρόποι θεωρούνται διαφορετικοί, όταν τουλάχιστον μία κάρτα βρίσκεται σε διαφορετικό κουτί.)

Λύση

Στη συνέχεια, όλοι οι αριθμοί που θα θεωρήσουμε θα είναι ακέραιοι μεταξύ 1 και 100, ενώ το χρώμα που θα αποδίδεται στον αριθμό i θα είναι το χρώμα του κουτιού στο οποίο ανήκει. Γράφουμε Κ για το κόκκινο, Α για το άσπρο και Μ για το μπλε. Υποθέτουμε ότι οι κάρτες έχουν τοποθετηθεί στα κοινά έτσι ώστε να ισχύει το ζητούμενο.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1

Υπάρχει κάποιο i τέτοιο ώστε οι αριθμοί i, $i + 1$, $i + 2$ έχουν διαφορετικά χρώματα, έστω Κ-Α-Μ.

Τότε, επειδή $i + (i + 3) = (i + 1) + (i + 2)$, το χρώμα του αριθμού $i + 3$ πρέπει να είναι υποχρεωτικά Κ. Πράγματι, αν το χρώμα του $i + 3$ ήταν Α, τότε από το άθροισμα $i + (i + 3)$ το κουτί που δεν έχει ληφθεί κάρτα είναι το Μ, ενώ από το άθροισμα $(i + 1) + (i + 2)$ το κουτί που δεν έχει ληφθεί κάρτα είναι το Κ, δηλαδή από ίσα αθροίσματα προκύπτει διαφορετικό κουτί από το οποίο δεν έχει ληφθεί κάρτα (άτοπο).

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι το χρώμα του αριθμού $i - 1$πρέπει

να είναι Μ.

Βλέπουμε λοιπόν ότι η ύπαρξη τριών διαδοχικών αριθμών με τρία διαφορετικά χρώματα προσδιορίζει και το χρώμα του επόμενου αριθμού αλλά και του προηγούμενού τους αριθμού.

Επομένως, είναι αρκετό να τοποθετήσουμε τους αριθμούς 1, 2, και 3 στα τρία διαφορετικά κουτιά και αυτό μπορεί να γίνει κατά 3! = 6 διαφορετικούς τρόπους. Στη συνέχεια, με τον τρόπο που περιγράψαμε, στο ίδιο κουτί με το 1 θα μπουν και οι αριθμοί 4, 7,..., 100 (ισοϋπόλοιποι με το 1 modulo 3), στο κουτί του 2 θα μπουν και οι αριθμοί 5, 8, 11,..., 98 (ισοϋπόλοιποι με το 2 modulo 3), ενώ στο κουτί του 3 θα μπουν και οι αριθμοί 6, 9, 12,..., 99 (ισοϋπόλοιποι με το 3 modulo 3).

Οι παραπάνω 6 διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης των καρτών στα τρία κουτιά είναι δεκτοί, γιατί αθροίσματα δύο αριθμών της μορφής Κ+Α, Α+Μ και Μ+Κ δίνουν διαφορετικά υπόλοιπα modulo 3, από τα οποία ο ταχυδακτυλουργός θα προσδιορίζει το κουτί από το οποίο δεν βγήκε κάρτα.

Περίπτωση 2

Έστω ότι δεν υπάρχουν τρεις διαδοχικοί αριθμοί σε τρία διαφορετικά κουτιά. Έστω ακόμη, ότι το 1 έχει χρώμα Κ και ότι Ι είναι ο μικρότερος αριθμός που δεν έχει χρώμα Κ. Έστω ότι το χρώμα του Ι είναι Α και ότι ο μικρότερος με χρώμα Μ είναι ο κ. Επειδή υποθέσαμε ότι δεν υπάρχει διαδοχική τριάδα αριθμών της μορφής k-A-M, θα ισχύει $i + 1 < k$.

Αν είναι $\kappa < 100$, τότε από την ισότητα $i + \kappa = (i - 1) + (\kappa + 1)$, ο $\kappa + 1$ πρέπει να έχει χρώμα Κ, αφού και ο $i - 1$ έχει χρώμα Κ. Επιπλέον από την ισότητα $i + (\kappa + 1) = (i + 1) + \kappa$, αν $\kappa < 100$, ο αριθμός $i + 1$ πρέπει να έχει χρώμα Μ, που είναι άτοπο γιατί ο μικρότερος αριθμός με χρώμα Μ είναι ο κ και $i + 1 < \kappa$. Επομένως θα είναι $\kappa = 100$.

Επίσης από την ισότητα $(i - 1) + 100 = i + 99$ προκύπτει ότι ο αριθμός 99 έχει χρώμα Α. Αν υπήρχε αριθμός $\iota > 1$ με χρώμα Κ, τότε από την ισότητα $\iota + 99 = (\iota - 1) + 100$ ο αριθμός $\iota - 1$ πρέπει να έχει χρώμα Μ, που είναι άτοπο γιατί ο μικρότερος αριθμός με χρώμα Μ είναι ο 100.

Επομένως, στην περίπτωση αυτή έχουμε την κατανομή

$$K : 1, \qquad A : 2, 3, 4, \ldots, 99, \qquad M : 100,$$

η οποία επαληθεύει το ζητούμενο, αφού για άθροισμα μικρότερο ή ίσο του 100 δεν έχει βγει κάρτα από το κουτί Μ, για άθροισμα 101 δεν έχει βγει κάρτα από το κουτί Α, ενώ για άθροισμα μεγαλύτερο του 101 δεν έχει βγει κάρτα από το κουτί Κ.

Ο αριθμός των διαφορετικών κατανομών των εκατό αριθμών στην πε-

ρίπτωση αυτή είναι $3! = 6$.

Επομένως, υπάρχουν συνολικά 12 διαφορετικοί τρόποι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5

Να εξετάσετε αν υπάρχει ή όχι θετικός ακέραιος n έτσι ώστε: ο n να διαιρείται με ακριβώς 2000 διαφορετικούς πρώτους αριθμούς, και ο αριθμός $2^n + 1$ να διαιρείται με τον n.

Λύση

Η απάντηση είναι ότι υπάρχει ο ζητούμενος αριθμός n. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη πιο γενική βοηθητική πρόταση:

Λήμμα 1 Για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει $n = n(\kappa) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$$n \mid 2^n + 1, \qquad 3 \mid n,$$

και ο n έχει ακριβώς κ πρώτους διαιρέτες.

Απόδειξη

Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής ως προς το θετικό ακέραιο κ.

Για $\kappa = 1$, είναι $n = n(1) = 3$.

Υποθέτουμε ότι για το $\kappa \geqslant 1$, υπάρχει θετικός ακέραιος $n(\kappa) = 3^l \cdot t$ με $l \geqslant 1$ και $3 \mid t$, που ικανοποιεί τις συνθήκες του λήμματος . Τότε ο αριθμός $n = n(\kappa)$ είναι περιττός, οπότε $3 \mid 2^{2n} - 2^n + 1$. Χρησιμοποιώντας την ισότητα $(2^n + 1)(2^{2n} - 2^n + 1) = 2^{3n} + 1$ λαμβάνουμε ότι $3n \mid 2^{3n} + 1$.

Σύμφωνα με το Λήμμα 2 που θα ακολουθήσει, υπάρχει πρώτος αριθμός p τέτοιος ώστε $p \mid 2^{3n} + 1$ και $p \mid 2^n + 1$.

Επομένως ο αριθμός $n = n(\kappa + 1) = 3pn(\kappa)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του λήμματος για τον $\kappa + 1$.

Λήμμα 2. Για κάθε ακέραιο $\alpha > 2$ υπάρχει πρώτος αριθμός p τέτοιος ώστε $p \mid \alpha^3 + 1$ και $p \mid \alpha + 1$.

Απόδειξη Έστω ότι δεν ισχύει το ζητούμενο για κάποιον ακέραιο $\alpha > 2$. Τότε κάθε πρώτος διαιρέτης του $\alpha^2 - \alpha + 1$ διαιρεί τον αριθμός $\alpha + 1$. Από την ταυτότητα $\alpha^2 - \alpha + 1 = (\alpha + 1)(\alpha - 2) + 3$,

Προκύπτει τότε, ότι ο 3 είναι ο μοναδικός πρώτος διαιρέτης του $\alpha^2 - \alpha + 1$, δηλαδή ο $\alpha^2 - \alpha + 1$είναι μία δύναμη του 3.

Επίσης, επειδή ο $\alpha + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 3, και ο $\alpha - 2$ θα είναι

πολλαπλάσιο του 3. Επομένως, ο αριθμός $\alpha^2 - \alpha + 1$ διαιρείται με το 3, όχι όμως και με το 9.

Επειδή ο αριθμός $\alpha^2 - \alpha + 1$ είναι μία δύναμη του 3, χωρίς να διαιρείται με το $9 = 3^2$, έπεται ότι θα είναι $\alpha^2 - \alpha + 1 = 3$, που είναι άτοπο, γιατί για $\alpha > 2$ ισχύει ότι $\alpha^2 - \alpha + 1 > 3$.

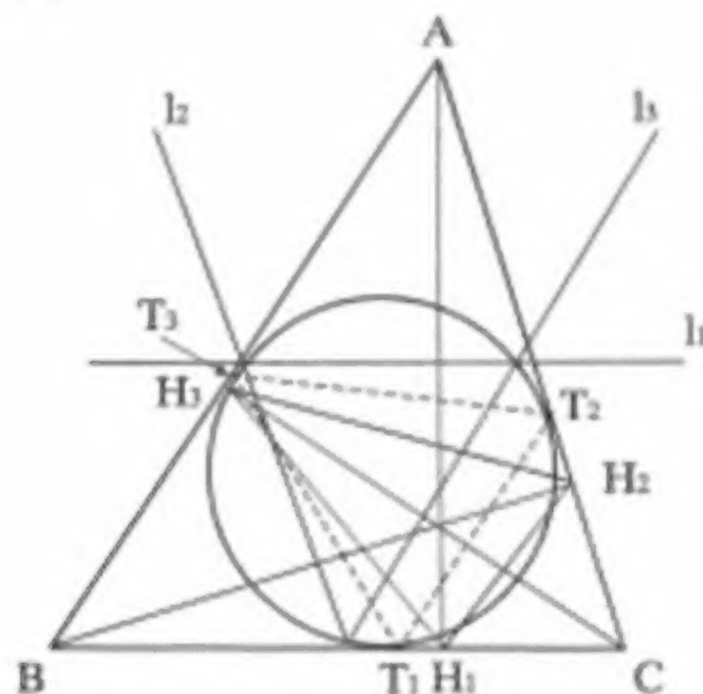
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6

Έστω AH_1, BH_2, CH_3 τα ύψη ενός οξυγωνίου τριγώνου ABC. Ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABC εφάπτεται των πλευρών BC, CA, AB στα σημεία T_1, T_2, T_3, αντιστοίχως. Έστω ακόμη ότι οι ευθείες l_1, l_2, l_3 είναι οι συμμετρικές ευθείες των ευθειών H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 ως προς άξονες τις ευθείες T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2, αντιστοίχως.

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες l_1, l_2, l_3 καθορίζουν ένα τρίγωνο του οποίου οι κορυφές βρίσκονται πάνω στον εγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC.

Λύση

Για την επίλυση του προβλήματος αυτού, που ήταν και το δύσκολο θέμα της δεύτερης ημέρας της Ολυμπιάδας, πρέπει κάποιος να πραγματοποιήσει τα εξής βήματα:



Σχήμα 139

i) Να αποδείξει ότι είναι $l_1 \parallel BC$ και ομοίως $l_2 \parallel AC$, $l_3 \parallel AB$.

ii) Να αποδείξει ότι το συμμετρικό του H_2 ως προς την ευθεία T_2T_3 βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας B, δηλαδή θα είναι το σημείο τομής της διχοτόμου της γωνίας B με την ευθεία l_1.

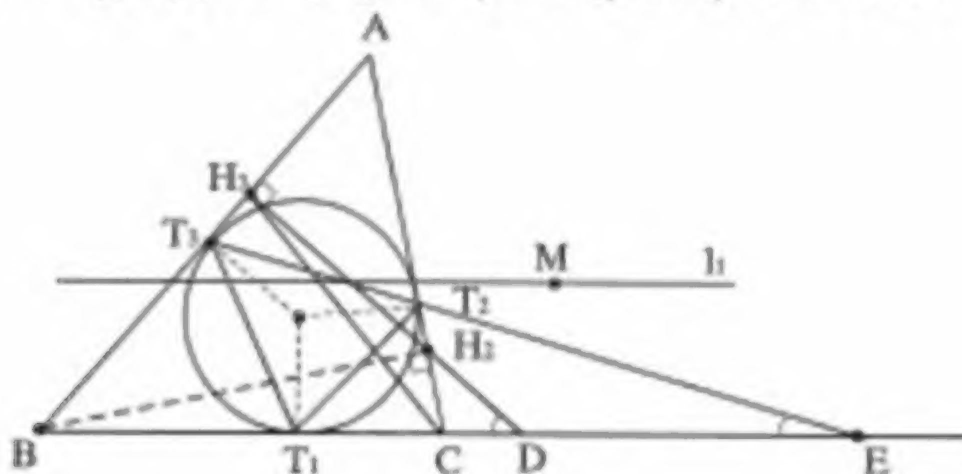
iii) Αν το συμμετρικό του T_2 ως προς τη διχοτόμο της γωνίας B είναι το

σημείο M_2, να αποδείξει ότι το M_2 ανήκει στον εγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC και ότι είναι $PM_2 \parallel BC$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω και λαμβάνοντας υπόψη αυτά που μπορούν να αποδειχθούν ομοίως για τα σημεία H_3, H_1 και T_3, T_1, προκύπτει ότι οι ευθείες l_1, l_2, l_3 τέμνουν τον εγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC στα σημεία M_1, M_2, M_3 που είναι συμμετρικά των σημείων T_1, T_2, T_3 ως προς τις διχοτόμους των γωνιών $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ και $\widehat{C}$ αντιστοίχως.

Απόδειξη (i)

Αν είναι $\widehat{B} = \widehat{C}$, η απόδειξη είναι προφανής, αφού $T_2T_3 \parallel H_2H_3 \parallel BC$. Υποθέτουμε ότι είναι $\widehat{B} \neq \widehat{C}$ και ότι οι ευθείες H_2H_3, T_2T_3 τέμνουν την ευθεία BC στα σημεία D, E αντιστοίχως,. Τότε τα D, E βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του ευθυγράμμου τμήματος BC (γιατί;). Επιπλέον έχουμε



Σχήμα 140

$$B\widehat{D}H_3 = |\,180^\circ - \widehat{B} - B\widehat{H_3}H_2\,| = |180^\circ - \widehat{B} - (180^\circ - \widehat{C}| = |\widehat{C} - \widehat{B}|$$

$$B\widehat{E}T_3 = |A\widehat{T_3}T_2 - \widehat{B}| = \left|\frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{A}) - \widehat{B}\right| = \left|\frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) - \widehat{B}\right| = \frac{|\widehat{C} - \widehat{B}|}{2}.$$

Επειδή η l_1 είναι συμμετρική της ευθείας H_2H_3 ως προς την ευθεία T_2T_3 θα έχουμε:
$$M\widehat{K}D = 2 \cdot D\widehat{K}T_2$$

Επιπλέον ισχύει

$$D\widehat{K}T_2 = B\widehat{D}H_3 - B\widehat{E}T_3 = |\widehat{C} - \widehat{B}| - \frac{|\widehat{C} - \widehat{B}|}{2} = \frac{|\widehat{C} - \widehat{B}|}{2} = B\widehat{E}T_3$$

Επομένως, έχουμε: $M\widehat{K}D = 2 \cdot B\widehat{E}T_3 = B\widehat{D}H_3$, οπότε θα είναι και $l_1 \parallel BC$.

Απόδειξη (ii)

Έστω ευθεία l που περνάει από το H_2 και είναι κάθετη προς την T_2T_3. Υποθέτουμε ότι η διχοτόμος BI τέμνει τις ευθείες T_2T_3 και l στα σημεία S

και P αντιστοίχως. Σημειώνουμε ότι το σημείο S ανήκει και στα δύο ευθύγραμμα τμήματα T_2T_3 και BP.

Για να δείξουμε ότι το σημείο P είναι συμμετρικό του H_2 ως προς την ευθεία T_2T_3, αρκεί να δείξουμε ότι $\widehat{PSH_2} = 2\cdot \widehat{PST_2}$.

Έχουμε $\widehat{PST_2} = \widehat{BST_3}$ και από το θεώρημα εξωτερικής γωνίας στο τρίγωνο BST_3 είναι

$$\widehat{BST_3} = \widehat{AT_3S} - \widehat{T_3BS} = \left(90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} - \frac{\widehat{B}}{2}\right) = \frac{\widehat{C}}{2}.$$

Όμως $\widehat{BST_1} = \widehat{BST_3} = \frac{\widehat{C}}{2}$, λόγω συμμετρίας περί τη BI, οπότε θα είναι

και $\widehat{BST_1} = \frac{\widehat{C}}{2} = \widehat{ICT_1}$ ή $\widehat{IST_1} = \widehat{ICT_1}$.

Σημειώνουμε ότι τα σημεία C και S βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την IT_1, αφού $\widehat{BT_1S} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2} > 90^\circ$.

Επομένως, από την ισότητα $\widehat{IST_1} = \widehat{ICT_1}$ έπεται ότι το τετράπλευρο SIT_1C είναι εγγράψιμο, οπότε $\widehat{ISC} = \widehat{IT_1C} = 90^\circ$. Άρα και το τετράπλευρο BCH_2S είναι εγγράψιμο, αφού και $\widehat{BH_2C} = 90^\circ$, οπότε $\widehat{PSH_2} = \widehat{C} = 2 \cdot \widehat{PST_2}$.

Απόδειξη (iii)

Η διχοτόμος BI είναι άξονας συμμετρίας του εγγεγραμμένου κύκλου οπότε το συμμετρικό M_2 του T_2 ως προς τη διχοτόμο BI βρίσκεται πάνω στον εγγεγραμμένο κύκλο.

Επιπλέον, από το εγγράψιμο BCH_2S και λόγω συμμετρίας των P και H_2 ως προς την T_2T_3, θα έχουμε $\widehat{BPT_2} = \widehat{SH_2T_2} = \frac{\widehat{B}}{2}$.

Οπότε, αφού το M_2 είναι συμμετρικό του T_2 ως προς τη διχοτόμο BI, λαμβάνουμε

$\widehat{BPM_2} = \widehat{BPT_2} = \frac{\widehat{B}}{2} = \widehat{CBP}$, δηλαδή είναι $PM_2 \parallel BC$.